

要点がわかる電磁気学
章末問題・解答集

新潟大学工学部
石井 望

2012年9月7日版

1章

【1】 $A = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$, $B = B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z$, $C = C_x \mathbf{a}_x + C_y \mathbf{a}_y + C_z \mathbf{a}_z$ とおく。式 (1.10) および式 (1.16) を利用すると

$$\begin{aligned} A \cdot (B \times C) &= (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \\ &= (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \left\{ \mathbf{a}_x \begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} - \mathbf{a}_y \begin{vmatrix} B_x & B_z \\ C_x & C_z \end{vmatrix} + \mathbf{a}_z \begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix} \right\} \\ &= A_x \begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} - A_y \begin{vmatrix} B_x & B_z \\ C_x & C_z \end{vmatrix} + A_z \begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

行列式について、行に関して偶置換しても値が変わらないことから

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

が成り立つ。これより、式 (1.17) が成り立つ。

【2】 $A = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$, $B = B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z$, $C = C_x \mathbf{a}_x + C_y \mathbf{a}_y + C_z \mathbf{a}_z$ とおく。

$$B \times C = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \mathbf{a}_x (B_y C_z - B_z C_y) - \mathbf{a}_y (B_x C_z - B_z C_x) + \mathbf{a}_z (B_x C_y - B_y C_x)$$

となるので

$$\begin{aligned} A \times (B \times C) &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_y C_z - B_z C_y & -(B_x C_z - B_z C_x) & B_x C_y - B_y C_x \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{a}_x \{A_y (B_x C_y - B_y C_x) + A_z (B_x C_z - B_z C_x)\} - \mathbf{a}_y \{A_x (B_x C_y - B_y C_x) - A_z (B_y C_z - B_z C_y)\} \\ &\quad + \mathbf{a}_z \{-A_x (B_x C_z - B_z C_x) - A_y (B_y C_z - B_z C_y)\} \\ &= \mathbf{a}_x \{B_x (A_y C_y + A_z C_z) - C_x (A_y B_y + A_z B_z)\} + \mathbf{a}_y \{B_y (A_x C_x + A_z C_z) - C_y (A_x B_x + A_z B_z)\} \\ &\quad + \mathbf{a}_z \{B_z (A_x C_x + A_y C_y) - C_z (A_x B_x + A_y B_y)\} \\ &= \mathbf{a}_x \{B_x (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - C_x (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)\} \\ &\quad + \mathbf{a}_y \{B_y (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - C_y (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)\} \\ &\quad + \mathbf{a}_z \{B_z (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - C_z (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)\} \\ &= (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z)(B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z) - (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)(C_x \mathbf{a}_x + C_y \mathbf{a}_y + C_z \mathbf{a}_z) \\ &= (A \cdot C)B - (A \cdot B)C \end{aligned}$$

【3】 $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$ なので, $x^2 + y^2 = (\rho \cos \phi)^2 + (\rho \sin \phi)^2 = \rho^2$ であって

$$A = -\frac{\rho \sin \phi}{\rho^2} \mathbf{a}_x + \frac{\rho \cos \phi}{\rho^2} \mathbf{a}_y = \frac{1}{\rho} (-\sin \phi \mathbf{a}_x + \cos \phi \mathbf{a}_y) = \frac{1}{\rho} \mathbf{a}_\phi$$

【4】 式 (1.34) より, $dl_\phi = |dr_\phi| = |\rho d\phi \mathbf{a}_\phi| = \rho d\phi$ であることを利用する。円の中心を原点 O とし, 円周が xy 面に存在するとすれば, $\rho = a$ である。

$$l = \int_0^{2\pi} a d\phi = a \int_0^{2\pi} 1 d\phi = 2\pi a$$

- 【5】式(1.39b)より, $dS_\theta = |d\mathbf{S}_\theta| = r \sin \theta dr d\phi \mathbf{a}_\theta = r \sin \theta dr d\phi$ であることを利用する。円すいの頂点を原点 O とし, 円すいの軸を z 軸とする。円すいの底面は $z > 0$ に位置するものとし, 底面の半径を a , 母線の長さを l とする。 $\sin \theta = a/l$ となることに注意して

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^l r \sin \theta dr d\phi = 2\pi \sin \theta \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^l = 2\pi \frac{a}{l} \frac{l^2}{2} = \pi a l$$

- 【6】式(1.42)より, $dV = \rho d\rho d\phi dz$ であることを利用する。底面の半径を a とし, 高さを h とする。円柱の軸を z 軸とし, 二つの底面を $z = 0$ と $z = h$ とする。

$$V = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho d\rho d\phi dz = 2\pi h \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^a = \pi a^2 h$$

- 【7】式(1.43)より, $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ であることを利用する。球の中心を原点 O とし, 半径を a とする。

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = 2\pi [-\cos \theta]_0^\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^a = \frac{4\pi a^3}{3}$$

2章

- 【1】 $r - r_A = \mathbf{0} - (a_x + a_y) = -a_x - a_y$, $|r - r_A| = \sqrt{2}$, $r - r_B = \mathbf{0} - (a_x + \sqrt{b}a_y + \sqrt{c}a_z) = -a_x - \sqrt{b}a_y - \sqrt{c}a_z$, $|r - r_B| = \sqrt{1+b+c}$ であるから, 式(2.10)より

$$\begin{aligned} E &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-a_x - a_y}{(\sqrt{2})^3} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-a_x - \sqrt{b}a_y - \sqrt{c}a_z}{(\sqrt{1+b+c})^3} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{(1+b+c)^{3/2}} \right) a_x + \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{b}}{(1+b+c)^{3/2}} \right) a_y + \frac{\sqrt{c}}{(1+b+c)^{3/2}} a_z \right] \end{aligned}$$

となる。問題文より $E_y = E_z = 0$ であるから

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{b}}{(1+b+c)^{3/2}} = 0 \tag{P.2.1}$$

$$\frac{\sqrt{c}}{(1+b+c)^{3/2}} = 0 \tag{P.2.2}$$

式(P.2.2)より $c = 0$ であるから, これを式(P.2.1)に代入すると

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{b}}{(1+b)^{3/2}} = 0$$

となる。整理すると, $(b-1)(b^2+4b-1) = 0$ となり, $b = 1, -2 \pm \sqrt{5}$ を得る。 $b \neq 1$ かつ $b \geq 0$ であるから, このうち条件を満足するのは $b = \sqrt{5} - 2$ となる。ゆえに, 点 B の座標は $(1, \sqrt{\sqrt{5}-2}, 0)$ と求められる。 ■

- 【2】例題2.1で積分範囲を $0 \leq z' < \infty$ とすればよい。

$$E = \int_0^\infty \frac{\rho_l dz'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \mathbf{a}_\rho + (z - z') \mathbf{a}_z}{\{\rho^2 + (z - z')^2\}^{3/2}}$$

$t = -(z - z')$ と変数変換を行い, 式(C.1)および(C.2)を利用すると

$$\begin{aligned} E &= \frac{\rho_l \rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-z}^\infty \frac{dt}{(t^2 + \rho^2)^{3/2}} \mathbf{a}_\rho - \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_{-z}^\infty \frac{t dt}{(t^2 + \rho^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z \\ &= \frac{\rho_l \rho}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{t}{\rho^2 \sqrt{t^2 + \rho^2}} \right]_{-z}^\infty \mathbf{a}_\rho - \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{t^2 + \rho^2}} \right]_{-z}^\infty \mathbf{a}_z = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 \rho} \left\{ \left(1 + \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) \mathbf{a}_\rho - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \mathbf{a}_z \right\} \end{aligned}$$

となる。 ■

【3】 $dQ = \rho_l dl' = \rho_l dz'$, $\mathbf{r} = \rho \mathbf{a}_\rho$, $\mathbf{r}' = z' \mathbf{a}_z$, $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \rho \mathbf{a}_\rho - z' \mathbf{a}_z$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{\rho^2 + z'^2}$ であるから

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\rho_l dz'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \mathbf{a}_\rho - z' \mathbf{a}_z}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

この微小電界を $z' = -L \rightarrow L$ で積分する。式 (C.1) を利用すると

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\rho_l \rho}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{-L}^L \frac{dz'}{(z'^2 + \rho^2)^{3/2}} \right) \mathbf{a}_\rho - \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{-L}^L \frac{z' dz'}{(z'^2 + \rho^2)^{3/2}} \right) \mathbf{a}_z \\ &= \frac{\rho_l \rho}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{z'}{\rho^2 \sqrt{z'^2 + \rho^2}} \right]_0^L \mathbf{a}_\rho = \dots = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 \rho} \frac{L}{\sqrt{\rho^2 + L^2}} \mathbf{a}_\rho \end{aligned}$$

となる。 $L \rightarrow \infty$ のとき, $\mathbf{E} \rightarrow \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 \rho} \mathbf{a}_\rho$ である。

【4】 (1) 円周上の $\mathbf{r}' = a \mathbf{a}_{\rho'}$ の点における線素 $dl' = a d\phi'$ に含まれる電荷 dQ は

$$dQ = \rho_l dl' = \rho_l a d\phi'$$

と与えられる。 $\mathbf{r} = z \mathbf{a}_z$ の点において円周上の線素 dl' による電界 $d\mathbf{E}$ は, $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = z \mathbf{a}_z - a \mathbf{a}_{\rho'}$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{z^2 + a^2}$ であるから

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_l a d\phi'}{4\pi\epsilon_0} \frac{z \mathbf{a}_z - a \mathbf{a}_{\rho'}}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

となる。この微小電界を $\phi = 0 \rightarrow 2\pi$ で積分することで, 円周上の線電荷による電界が与えられる。

$$\mathbf{E} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_l a d\phi'}{4\pi\epsilon_0} \frac{z \mathbf{a}_z - a \mathbf{a}_{\rho'}}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \left(\frac{\rho_l z a}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' \right) \mathbf{a}_z - \frac{\rho_l a^2}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{a}_{\rho'} d\phi'$$

ここで, $\mathbf{a}_{\rho'} = \cos \phi' \mathbf{a}_x + \sin \phi' \mathbf{a}_y$ より

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{a}_{\rho'} d\phi' = \int_0^{2\pi} (\cos \phi' \mathbf{a}_x + \sin \phi' \mathbf{a}_y) d\phi' = \left(\int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' \right) \mathbf{a}_x + \left(\int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi' \right) \mathbf{a}_y = \mathbf{0}$$

となる。ゆえに

$$\mathbf{E} = \left(\frac{\rho_l z a}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}} 2\pi \right) \mathbf{a}_z = \frac{\rho_l}{2\epsilon_0} \frac{z a}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z$$

(2) 上式に $z = 0$ を代入すると, 円周の中心では $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ となる。

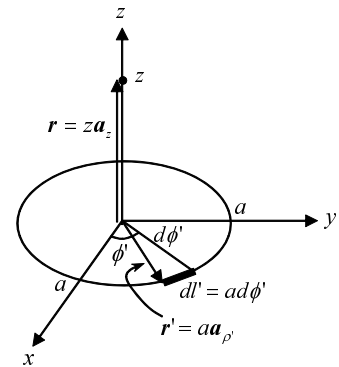
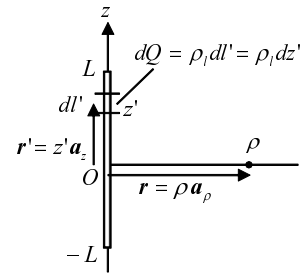
(3) $E = |\mathbf{E}| = \frac{\rho_l a}{2\epsilon_0} \frac{|z|}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$ は z の偶関数なので, まず $z > 0$ における増減を調べる。

$$\frac{dE}{dz} = \frac{\rho_l a}{2\epsilon_0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \right) = \dots = \frac{\rho_l a}{2\epsilon_0} \frac{a^2 - 2z^2}{(z^2 + a^2)^{5/2}}$$

dE/dz (E の z に関する傾き) は $z < a/\sqrt{2}$ において正, $z > a/\sqrt{2}$ において負となるので, $z = a/\sqrt{2}$ において E は最大となる。対称性から $z = -a/\sqrt{2}$ においても E は同じく最大となる。その値は

$$E_{\max} = \frac{\rho_l a}{2\epsilon_0} \frac{a/\sqrt{2}}{\{(a/\sqrt{2})^2 + a^2\}^{3/2}} = \dots = \frac{\rho_l}{3\sqrt{3}\epsilon_0 a}$$

と与えられる。

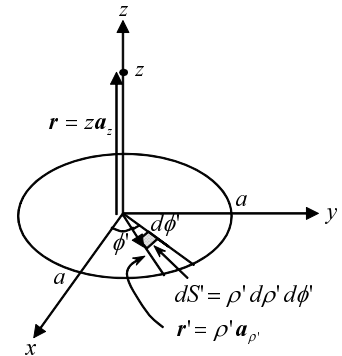


【5】 $dQ = \rho_s dS' = \rho_s \rho' d\rho' d\phi'$ による微小電界 E は, $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = z\mathbf{a}_z - \rho'\mathbf{a}_{\rho'}$,
 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{\rho'^2 + z^2}$ より

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_s \rho' d\rho' d\phi'}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-\rho'\mathbf{a}_{\rho'} + z\mathbf{a}_z)}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}}$$

$\rho' = 0 \rightarrow a, \phi' = 0 \rightarrow 2\pi$ にわたって積分する (円板全体について面積分する) と

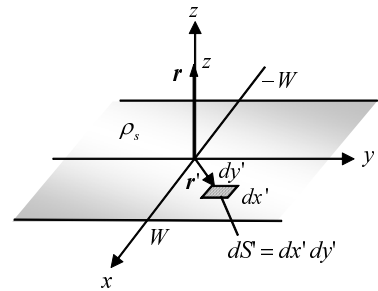
$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{\rho'^2 d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \mathbf{a}_{\rho'} d\phi' \\ &\quad + \left(\frac{\rho_s z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{\rho' d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' \right) \mathbf{a}_z \\ &= \left(\frac{\rho_s z}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}} \right]_0^a \right) 2\pi \mathbf{a}_z = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left(\text{sgn}(z) - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \mathbf{a}_z \end{aligned}$$



となる。 $a \rightarrow \infty$ のとき, $E \rightarrow \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \text{sgn}(z) \mathbf{a}_z$ である。

【6】 $dQ = \rho_s dS' = \rho_s dx' dy'$, $\mathbf{r} = z\mathbf{a}_z$, $\mathbf{r}' = x'\mathbf{a}_x + y'\mathbf{a}_y$, $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = z\mathbf{a}_z - x'\mathbf{a}_x - y'\mathbf{a}_y$,
 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{z^2 + x'^2 + y'^2}$ なので

$$\begin{aligned} d\mathbf{E} &= \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\rho_s dx' dy'}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\mathbf{a}_z - x'\mathbf{a}_x - y'\mathbf{a}_y}{(z^2 + x'^2 + y'^2)^{3/2}} \\ \mathbf{E} &= \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_{-W}^W \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\mathbf{a}_z - x'\mathbf{a}_x - y'\mathbf{a}_y}{(z^2 + x'^2 + y'^2)^{3/2}} dy' dx' \end{aligned}$$



x', y' に関する積分について, 被積分関数の偶奇性を利用すると, 積分の x, y 成分は消失して, x', y' の両方に対して偶関数であるような被積分関数のみが残る。残った被積分関数に対しては, x', y' の積分範囲を半分にして, その積分値を4倍すればよい。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \left(\frac{\rho_s z}{\pi\epsilon_0} \int_0^W \int_0^{\infty} \frac{dy'}{(z^2 + x'^2 + y'^2)^{3/2}} dx' \right) \mathbf{a}_z = \left(\frac{\rho_s z}{\pi\epsilon_0} \int_0^W \left[\frac{y'}{(z^2 + x'^2) \sqrt{z^2 + x'^2 + y'^2}} \right]_0^{\infty} dx' \right) \mathbf{a}_z \\ &= \left(\frac{\rho_s z}{\pi\epsilon_0} \int_0^W \frac{dx'}{z^2 + x'^2} \right) \mathbf{a}_z = \frac{\rho_s z}{\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{z} \tan^{-1} \frac{x'}{z} \right]_0^W \mathbf{a}_z = \frac{\rho_s}{\pi\epsilon_0} \tan^{-1} \left(\frac{W}{z} \right) \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

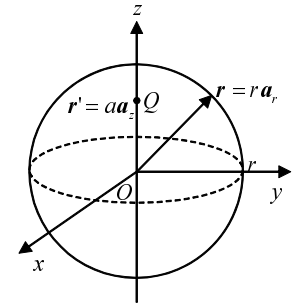
$W \rightarrow \infty$ とすると, $\tan^{-1} x$ が奇関数であること, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\tan^{-1} x) = \pi/2$ であることを考慮して

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\pi\epsilon_0} \tan^{-1} \left(\frac{W}{z} \right) \mathbf{a}_z = \frac{\rho_s}{\pi\epsilon_0} \tan^{-1} \left(\frac{W}{|z|} \right) \text{sgn}(z) \mathbf{a}_z \rightarrow \frac{\rho_s}{\pi\epsilon_0} \frac{\pi}{2} \text{sgn}(z) \mathbf{a}_z = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \text{sgn}(z) \mathbf{a}_z$$

3章

【1】 $E = \pm \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_z = k(dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z)$ から $dx = dy = 0$ となるので, $x = \text{一定}, y = \text{一定}$ を得る。これより, 電気力線は z 軸に平行な直線, すなわち, xy 平面に垂直な直線であることがわかる。

- 【2】球面上の点の位置ベクトルおよび面素は $\mathbf{r} = r\mathbf{a}_r = r \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_x + r \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_y + r \cos \theta \mathbf{a}_z$ および $dS = a_r r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ と与えられ、点電荷の位置ベクトルは $\mathbf{r}' = a\mathbf{a}_z$ と与えられる。 $(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{a}_r = r \cdot \mathbf{a}_r - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r = r - a \cos \theta$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = (r \sin \theta \cos \phi)^2 + (r \sin \theta \sin \phi)^2 + (r \cos \theta - a)^2 = r^2 - 2ra \cos \theta + a^2$ となるので、曲面 S を通過する電束 Ψ は次のように計算される。



$$\begin{aligned} \Psi &= \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{Q}{4\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \mathbf{a}_r r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{Qr^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{r - a \cos \theta}{(r^2 - 2ra \cos \theta + a^2)^{3/2}} \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{Qr^2}{2} \int_0^\pi \frac{r - a \cos \theta}{(r^2 - 2ra \cos \theta + a^2)^{3/2}} \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

$R^2 = r^2 - 2ra \cos \theta + a^2$ を θ で微分すると、 $RdR = ra \sin \theta d\theta$ となるから

$$\Psi = \frac{Qr^2}{2} \int_{|r-a|}^{r+a} \frac{1}{R^3} \left(r - \frac{r^2 + a^2 - R^2}{2r} \right) \frac{RdR}{ra} = \frac{Q}{4a} \int_{|r-a|}^{r+a} \left(1 + \frac{r^2 - a^2}{R^2} \right) dR = \frac{Q}{4a} \left[R - \frac{r^2 - a^2}{R} \right]_{|r-a|}^{r+a}$$

$r > a$ のとき

$$\Psi = \frac{Q}{4a} \left[(r+a) - (r-a) - (r^2 - a^2) \left(\frac{1}{r+a} - \frac{1}{r-a} \right) \right] = Q$$

$r < a$ のとき

$$\Psi = \frac{Q}{4a} \left[(r+a) + (r-a) - (r^2 - a^2) \left(\frac{1}{r+a} + \frac{1}{r-a} \right) \right] = 0$$

- 【3】〔式 (3.13) の確認〕電荷分布が原点に対して球対称であることから、体積電荷密度 ρ_v は r のみの関数である。これから、図 3.5 の球面 S 内に含まれる電荷は

$$\begin{aligned} Q_{\text{enclosed by } S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \rho_v(r') r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi' = 2\pi \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^r \rho_v(r') r'^2 dr' \\ &= 4\pi \int_0^r \rho_v(r') r'^2 dr' \end{aligned}$$

となる。よって、式 (3.12) から

$$\mathbf{D} = D_r \mathbf{a}_r = \frac{Q_{\text{enclosed by } S}}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r = \left(\frac{1}{r^2} \int_0^r \rho_v(r') r'^2 dr' \right) \mathbf{a}_r$$

を得る。

- 〔式 (3.15) の確認〕電荷分布が z 軸に対して軸対称であることから、体積電荷密度 ρ_v は ρ のみの関数である。これから、図 3.6 の円筒面 S 内に含まれる電荷は

$$Q_{\text{enclosed by } S} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^\rho \rho_v(\rho') \rho' d\rho' d\phi' dz' = 2\pi L \int_0^\rho \rho_v(\rho') \rho' d\rho'$$

となる。よって、式 (3.14) から

$$\mathbf{D} = D_\rho \mathbf{a}_\rho = \frac{Q_{\text{enclosed by } S}}{2\pi \rho L} \mathbf{a}_\rho = \left(\frac{1}{\rho} \int_0^\rho \rho_v(\rho') \rho' d\rho' \right) \mathbf{a}_\rho$$

を得る。

〔式 (3.17) の確認〕 電荷分布が xy 平面に対して面対称であることから，体積電荷密度 ρ_v は $|z|$ の関数である。これから，図 3.8 の円筒面 S 内に含まれる電荷は

$$Q_{\text{enclosed by } S} = \int_{-|z|}^{|z|} \iint_S \rho_v(z') dS' dz' = 2A \int_{+0}^{|z|} \rho_v(z') dz'$$

となる。 $\iint_S dS' = A$ となることに注意されたい。 $D_z(-z) = -D_z(z)$ の対称性および式 (3.16) から

$$D = D_z a_z = D_z(|z|) \text{sgn}(z) a_z = \frac{Q_{\text{enclosed by } S}}{2A} \text{sgn}(z) a_z = \left(\int_{+0}^{|z|} \rho_v(z') dz' \right) \text{sgn}(z) a_z$$

を得る。 |

【4】 閉曲面 S として，中心が原点 O ，半径 r の球面を選ぶ（図 3.5 参照）

a) $r < a$ のとき：閉曲面 S 内部に「面電荷密度 ρ_s で一様に帯電した半径 a の球面」が含まれない。これより，閉曲面 S 内に含まれる全電荷量は $Q_{\text{enclosed by } S} = 0$ となるので，式 (3.4), (3.13) より

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} D = \frac{Q_{\text{enclosed by } S}}{4\pi\epsilon_0 r^2} a_r = 0$$

となる。

b) $r > a$ のとき：閉曲面 S 内部に「面電荷密度 ρ_s で一様に帯電した半径 a の球面」が含まれる。これより，閉曲面 S 内に含まれる全電荷量は $Q_{\text{enclosed by } S} = \rho_s \cdot 4\pi a^2$ となるので，式 (3.4), (3.13) より

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} D = \frac{Q_{\text{enclosed by } S}}{4\pi\epsilon_0 r^2} a_r = \frac{\rho_s \cdot 4\pi a^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} a_r = \frac{\rho_s a^2}{\epsilon_0 r^2} a_r$$

となる。 |

【5】 閉曲面 S として，中心が原点 O ，半径 r の球面を選ぶ（図 3.5 参照）

a) $r < a$ のとき：閉曲面 S 内部に「体積電荷密度 ρ_v で一様に帯電した半径 a の球形領域」のうち，半径 r の球形領域の部分が含まれる。これより，閉曲面 S 内に含まれる全電荷量は

$$Q_{\text{enclosed by } S} = \rho_v \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

となるので，式 (3.4), (3.13) より

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} D = \frac{Q_{\text{enclosed by } S}}{4\pi\epsilon_0 r^2} a_r = \frac{\rho_v \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} a_r = \frac{\rho_v r}{3\epsilon_0} a_r$$

となる。

b) $r > a$ のとき：閉曲面 S 内部に「体積電荷密度 ρ_v で一様に帯電した半径 a の球形領域」すべてが含まれる。これより，閉曲面 S 内に含まれる全電荷量 $Q_{\text{enclosed by } S}$ は

$$Q_{\text{enclosed by } S} = \rho_v \cdot \frac{4}{3}\pi a^3$$

となるので，式 (3.4), (3.13) より

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} D = \frac{Q_{\text{enclosed by } S}}{4\pi\epsilon_0 r^2} a_r = \frac{\rho_v \cdot \frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} a_r = \frac{\rho_v a^3}{3\epsilon_0 r^2} a_r$$

となる。 |

【6】 閉曲面 S として、中心軸が z 軸、底面が半径 ρ の円、長さ L の円筒面を選ぶ (図 3.6 参照)。

a) $\rho < a$ のとき：閉曲面 S 内に円筒側面は含まれない。これより、閉曲面 S 内に含まれる電荷は $Q_{\text{enclosed by } S} = 0$ となるので、式 (3.4), (3.15) より

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} D = \frac{Q_{\text{enclosed by } S}}{2\pi\epsilon_0\rho L} a_\rho = 0$$

となる。

b) $\rho > a$ のとき：閉曲面 S 内に含まれる電荷 $Q_{\text{enclosed by } S}$ は、半径 a 、長さ L の円柱側面に帯電している電荷の総和であるから

$$Q_{\text{enclosed by } S} = \rho_s \cdot 2\pi a L$$

となる。式 (3.4), (3.15) より

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} D = \frac{Q_{\text{enclosed by } S}}{2\pi\epsilon_0\rho L} a_\rho = \frac{\rho_s \cdot 2\pi a L}{2\pi\epsilon_0\rho L} a_\rho = \frac{\rho_s a}{\epsilon_0\rho} a_\rho$$

となる。

【7】 閉曲面 S として、中心軸が z 軸、底面が半径 ρ の円、長さ L の円筒面を選ぶ (図 3.6 参照)。

a) $\rho < a$ のとき：閉曲面 S 内部には、半径 ρ 、長さ L の円筒領域が含まれる。これより、閉曲面 S 内に含まれる電荷 $Q_{\text{enclosed by } S}$ は

$$Q_{\text{enclosed by } S} = \rho_v \cdot \pi\rho^2 L$$

である。式 (3.4), (3.15) より

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} D = \frac{Q_{\text{enclosed by } S}}{2\pi\epsilon_0\rho L} a_\rho = \frac{\rho_v \cdot \pi\rho^2 L}{2\pi\epsilon_0\rho L} a_\rho = \frac{\rho_v\rho}{2\epsilon_0} a_\rho$$

となる。

b) $\rho > a$ のとき：閉曲面 S 内に含まれる電荷 $Q_{\text{enclosed by } S}$ は、半径 a 、長さ L の円柱内部に帯電している電荷の総和であるから

$$Q_{\text{enclosed by } S} = \rho_v \cdot \pi a^2 L$$

となる。式 (3.4), (3.15) より

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} D = \frac{Q_{\text{enclosed by } S}}{2\pi\epsilon_0\rho L} a_\rho = \frac{\rho_v \cdot \pi a^2 L}{2\pi\epsilon_0\rho L} a_\rho = \frac{\rho_v a^2}{2\epsilon_0\rho} a_\rho$$

となる。

【8】 閉曲面 S として、上面と下面が xy 平面の両側に同じ距離 z だけ離れた円筒面を選ぶ。上面と下面の面積を A とする (図 3.8 参照)。

a) $|z| < d$ のとき：閉曲面 S に含まれる電荷量は $Q_{\text{enclosed by } S} = \rho_v(A \cdot 2|z|)$ であるから、式 (3.4), (3.17) より

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} D = \frac{Q_{\text{enclosed by } S}}{2\epsilon_0 A} \text{sgn}(z) a_z = \frac{\rho_v(A \cdot 2|z|)}{2\epsilon_0 A} \text{sgn}(z) a_z = \frac{\rho_v z}{\epsilon_0} a_z$$

となる。

b) $|z| > d$ のとき：閉曲面 S に含まれる電荷量は $Q_{\text{enclosed by } S} = \rho_v(A \cdot 2d)$ であるから、式 (3.4), (3.17) より

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} D = \frac{Q_{\text{enclosed by } S}}{2\epsilon_0 A} \text{sgn}(z) a_z = \frac{\rho_v(A \cdot 2d)}{2\epsilon_0 A} \text{sgn}(z) a_z = \frac{\rho_v d}{\epsilon_0} \text{sgn}(z) a_z$$

となる。

【9】 図 1.14 において, $d\rho, d\phi, dz$ を $\Delta\rho, \Delta\phi, \Delta z$ と置き換えて考える。このとき, 図 1.14 の体積素に相当する領域の表面 ΔS に関する面積分を六つの面に分ける。

$$\oiint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\rho} + \iint_{\rho+\Delta\rho} + \iint_{\phi} + \iint_{\phi+\Delta\phi} + \iint_z + \iint_{z+\Delta z}$$

各面は十分に小さく, \mathbf{A} は定ベクトルとみなせるとする。このとき

$$\begin{aligned} \iint_{\rho} + \iint_{\rho+\Delta\rho} &\equiv \mathbf{A}(\rho, \phi, z) \cdot \iint_{\rho} (-d\mathbf{S}_{\rho}) + \mathbf{A}(\rho + \Delta\rho, \phi, z) \cdot \iint_{\rho+\Delta\rho} d\mathbf{S}_{\rho} \\ &\equiv \mathbf{A}(\rho, \phi, z) \cdot (-\rho\Delta\phi\Delta z\mathbf{a}_{\rho}) + \mathbf{A}(\rho + \Delta\rho, \phi, z) \cdot \{(\rho + \Delta\rho)\Delta\phi\Delta z\mathbf{a}_{\rho}\} \\ &= \frac{(\rho + \Delta\rho)A_{\rho}(\rho + \Delta\rho, \phi, z) - \rho A_{\rho}(\rho, \phi, z)}{\Delta\rho} \Delta\rho\Delta\phi\Delta z \\ &\equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} (\rho A_{\rho}) \rho \Delta\rho\Delta\phi\Delta z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} (\rho A_{\rho}) \Delta v \\ \iint_{\phi} + \iint_{\phi+\Delta\phi} &\equiv \mathbf{A}(\rho, \phi, z) \cdot \iint_{\phi} (-d\mathbf{S}_{\phi}) + \mathbf{A}(\rho, \phi + \Delta\phi, z) \cdot \iint_{\phi+\Delta\phi} d\mathbf{S}_{\phi} \\ &\equiv \mathbf{A}(\rho, \phi, z) \cdot (-\Delta\rho\Delta z\mathbf{a}_{\phi}) + \mathbf{A}(\rho, \phi + \Delta\phi, z) \cdot (\Delta\rho\Delta z\mathbf{a}_{\phi}) \\ &= \frac{A_{\phi}(\rho, \phi + \Delta\phi, z) - A_{\phi}(\rho, \phi, z)}{\Delta\phi} \Delta\rho\Delta\phi\Delta z \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_{\phi}}{\partial\phi} \rho \Delta\rho\Delta\phi\Delta z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_{\phi}}{\partial\phi} \Delta v \\ \iint_z + \iint_{z+\Delta z} &\equiv \mathbf{A}(\rho, \phi, z) \cdot \iint_z (-d\mathbf{S}_z) + \mathbf{A}(\rho, \phi, z + \Delta z) \cdot \iint_{z+\Delta z} d\mathbf{S}_z \\ &\equiv \mathbf{A}(\rho, \phi, z) \cdot (-\rho\Delta\rho\Delta\phi\mathbf{a}_z) + \mathbf{A}(\rho, \phi, z + \Delta z) \cdot (\rho\Delta\rho\Delta\phi\mathbf{a}_z) \\ &= \frac{A_z(\rho, \phi, z + \Delta z) - A_z(\rho, \phi, z)}{\Delta z} \rho \Delta\rho\Delta\phi\Delta z \equiv \frac{\partial A_z}{\partial z} \rho \Delta\rho\Delta\phi\Delta z = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta v \end{aligned}$$

ここで, 図 1.14 の体積素に相当する領域の体積が

$$\Delta v = \int_z^{z+\Delta z} \int_{\phi}^{\phi+\Delta\phi} \int_{\rho}^{\rho+\Delta\rho} \rho d\rho d\phi dz = \frac{(\rho + \Delta\rho)^2 - \rho^2}{2} \Delta\phi\Delta z \equiv \rho \Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

と与えられることを用いた。式 (3.20) より

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \oiint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} (\rho A_{\rho}) \Delta v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_{\phi}}{\partial\phi} \Delta v + \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta v \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} (\rho A_{\rho}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_{\phi}}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned}$$

となり, 式 (3.21b) が導かれる。

【10】 図 1.15 において, $dr, d\theta, d\phi$ を $\Delta r, \Delta\theta, \Delta\phi$ と置き換えて考える。このとき, 図 1.15 の体積素に相当する領域の表面 ΔS に関する面積分を六つの面に分ける。

$$\oiint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_r + \iint_{r+\Delta r} + \iint_{\theta} + \iint_{\theta+\Delta\theta} + \iint_{\phi} + \iint_{\phi+\Delta\phi}$$

各面は十分に小さく, \mathbf{A} は定ベクトルとみなせるとする。このとき

$$\begin{aligned} \iint_r + \iint_{r+\Delta r} &\equiv \mathbf{A}(r, \theta, \phi) \cdot \iint_r (-d\mathbf{S}_r) + \mathbf{A}(r + \Delta r, \theta, \phi) \cdot \iint_{r+\Delta r} d\mathbf{S}_r \\ &\equiv \mathbf{A}(r, \theta, \phi) \cdot (-r^2 \sin\theta\Delta\theta\Delta\phi\mathbf{a}_r) + \mathbf{A}(r + \Delta r, \theta, \phi) \cdot \{(r + \Delta r)^2 \sin\theta\Delta\theta\Delta\phi\mathbf{a}_r\} \\ &= \frac{(r + \Delta r)^2 A_r(r + \Delta r, \theta, \phi) - r^2 A_r(r, \theta, \phi)}{\Delta r} \sin\theta\Delta r\Delta\theta\Delta\phi \\ &\equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) r^2 \sin\theta\Delta r\Delta\theta\Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) \Delta v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_{\theta} + \iint_{\theta+\Delta\theta} &\equiv A(r, \theta, \phi) \cdot \iint_{\theta} (-d\mathbf{S}_{\theta}) + A(r, \theta + \Delta\theta, \phi) \cdot \iint_{\theta+\Delta\theta} d\mathbf{S}_{\theta} \\
 &\equiv A(r, \theta, \phi) \cdot (-r \sin \theta \Delta r \Delta \phi \mathbf{a}_{\theta}) + A(r, \theta + \Delta\theta, \phi) \cdot \{r \sin(\theta + \Delta\theta) \Delta r \Delta \phi \mathbf{a}_{\theta}\} \\
 &= \frac{\sin(\theta + \Delta\theta) A_{\theta}(r, \theta + \Delta\theta, \phi) - \sin \theta A_{\theta}(r, \theta, \phi)}{\Delta\theta} r \Delta r \Delta \theta \Delta \phi \\
 &\equiv \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_{\theta}) r^2 \sin \theta \Delta r \Delta \theta \Delta \phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_{\theta}) \Delta v \\
 \iint_{\phi} + \iint_{\phi+\Delta\phi} &\equiv A(r, \theta, \phi) \cdot \iint_{\phi} (-d\mathbf{S}_{\phi}) + A(r, \theta, \phi + \Delta\phi) \cdot \iint_{\phi+\Delta\phi} d\mathbf{S}_{\phi} \\
 &\equiv A(r, \theta, \phi) \cdot (-r \Delta r \Delta \theta \mathbf{a}_{\phi}) + A(r, \theta, \phi + \Delta\phi) \cdot (r \Delta r \Delta \theta \mathbf{a}_{\phi}) \\
 &= \frac{A_{\phi}(r, \theta, \phi + \Delta\phi) - A_{\phi}(r, \theta, \phi)}{\Delta\phi} r \Delta r \Delta \theta \Delta \phi \\
 &\equiv \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_{\phi}}{\partial \phi} r^2 \sin \theta \Delta r \Delta \theta \Delta \phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_{\phi}}{\partial \phi} \Delta v
 \end{aligned}$$

ここで、図 1.15 の体積素に相当する領域の体積が

$$\begin{aligned}
 \Delta v &= \int_{\phi}^{\phi+\Delta\phi} \int_{\theta}^{\theta+\Delta\theta} \int_r^{r+\Delta r} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \frac{(r + \Delta r)^3 - r^3}{3} \{\cos \theta - \cos(\theta + \Delta\theta)\} \Delta\phi \\
 &\equiv r^2 \Delta r \left(-2 \sin \frac{\theta + (\theta + \Delta\theta)}{2} \sin \frac{\theta - (\theta + \Delta\theta)}{2} \right) \Delta\phi \equiv r^2 \sin \theta \Delta r \Delta \theta \Delta \phi
 \end{aligned}$$

と与えられることを用いた。式 (3.20) より

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{A} &= \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \oiint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) \Delta v + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_{\theta}) \Delta v + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_{\phi}}{\partial \phi} \Delta v \right) \\
 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_{\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_{\phi}}{\partial \phi}
 \end{aligned}$$

となり、式 (3.21c) が導かれる。

4 章

【1】 経路 C 上の点は $r = 2(\cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \phi \mathbf{a}_y)$ ($0 \leq \phi \leq \pi/3$) と与えられる。したがって、経路 C 上において

$$\mathbf{E} = 4(\sin^2 \phi \mathbf{a}_x + \cos^2 \phi \mathbf{a}_y), \quad d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{d\phi} d\phi = 2(-\sin \phi \mathbf{a}_x + \cos \phi \mathbf{a}_y) d\phi$$

であるから

$$\begin{aligned}
 W &= -Q \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -Q \int_0^{\pi/3} 4(\sin^2 \phi \mathbf{a}_x + \cos^2 \phi \mathbf{a}_y) \cdot 2(-\sin \phi \mathbf{a}_x + \cos \phi \mathbf{a}_y) d\phi \\
 &= -8Q \int_0^{\pi/3} (-\sin^3 \phi + \cos^3 \phi) d\phi = -8Q \int_0^{\pi/3} \{(1 - \cos^2 \phi)(-\sin \phi d\phi) + (1 - \sin^2 \phi)(\cos \phi d\phi)\} \\
 &= -8Q \left[\left(\cos \phi - \frac{\cos^3 \phi}{3} \right) + \left(\sin \phi - \frac{\sin^3 \phi}{3} \right) \right]_0^{\pi/3} = \dots = \left(\frac{5}{3} - 3\sqrt{3} \right) Q
 \end{aligned}$$

【2】 電荷 Q および -Q による電位の和を考えて

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \\
 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right] = 0
 \end{aligned}$$

整理すると、 $x^2 + y^2 + (z-d)^2 = x^2 + y^2 + (z+d)^2$ 、すなわち、 $z=0$ を得る。これは xy 平面である。

【3】〔式(4.9)の導出〕式(3.13)より $E_r(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} F(r)$, $F(r) = \int_0^r \rho_v(r') r'^2 dr'$ である。基準面を $r = a$ とすれば

$$\begin{aligned} V(r) &= - \int_a^r E_r(r') dr' = - \frac{1}{\epsilon_0} \int_a^r \frac{1}{r'^2} F(r') dr' = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{r'} F(r') \right]_a^r - \frac{1}{\epsilon_0} \int_a^r \frac{1}{r'} \frac{dF(r')}{dr'} dr' \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} F(r) - \frac{1}{a} F(a) \right) - \frac{1}{\epsilon_0} \int_a^r \rho_v(r') r' dr' \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \int_0^r \rho_v(r') r'^2 dr' + \int_r^\infty \rho_v(r') r' dr' \right) - \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} \int_0^a \rho_v(r') r'^2 dr' + \int_a^\infty \rho_v(r') r' dr' \right) \end{aligned}$$

となるので、式(4.9)が確認された。

〔式(4.11)の導出〕式(3.15)より $E_\rho(\rho) = \frac{1}{\epsilon_0 \rho} F(\rho)$, $F(\rho) = \int_0^\rho \rho_v(\rho') \rho' d\rho'$ である。基準面を $\rho = a$ とすれば

$$\begin{aligned} V(\rho) &= - \int_a^\rho E_\rho(\rho') d\rho' = - \frac{1}{\epsilon_0} \int_a^\rho \frac{1}{\rho'} F(\rho') d\rho' = - \frac{1}{\epsilon_0} \left[(\ln \rho') F(\rho') \right]_a^\rho + \frac{1}{\epsilon_0} \int_a^\rho (\ln \rho') \frac{dF(\rho')}{d\rho'} d\rho' \\ &= - \frac{1}{\epsilon_0} \left\{ \ln \rho \int_0^\rho \rho_v(\rho') \rho' d\rho' - \ln a \int_0^a \rho_v(\rho') \rho' d\rho' \right\} + \frac{1}{\epsilon_0} \int_a^\rho \rho_v(\rho') \rho' \ln \rho' d\rho' \\ &= - \frac{1}{\epsilon_0} \left(\ln \rho \int_0^\rho \rho_v(\rho') \rho' d\rho' + \int_\rho^\infty \rho_v(\rho') \rho' \ln \rho' d\rho' \right) \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon_0} \left(\ln a \int_0^a \rho_v(\rho') \rho' d\rho' + \int_a^\infty \rho_v(\rho') \rho' \ln \rho' d\rho' \right) \end{aligned}$$

となるので、式(4.11)が確認された。

〔式(4.13)の導出〕式(3.17)より $E_z(z) = \frac{\text{sgn}(z)}{\epsilon_0} F(z)$, $F(z) = \int_{+0}^{|z|} \rho_v(z') dz'$ である。基準面を $z = a$ とすれば、

$\frac{d|z|}{dz} = \text{sgn}(z)$, $\frac{dF(z)}{dz} = \rho_v(|z|) \frac{d|z|}{dz} = \rho_v(z) \text{sgn}(z)$ となることに注意して

$$\begin{aligned} V(z) &= - \int_a^z E_z(z') dz' = - \frac{1}{\epsilon_0} \int_a^z \text{sgn}(z') F(z') dz' = - \frac{1}{\epsilon_0} \left[|z'| F(z') \right]_a^z + \frac{1}{\epsilon_0} \int_a^z |z'| \frac{dF(z')}{dz'} dz' \\ &= - \frac{1}{\epsilon_0} \left(|z| \int_{+0}^{|z|} \rho_v(z') dz' - |a| \int_{+0}^{|a|} \rho_v(z') dz' \right) + \frac{1}{\epsilon_0} \int_a^z \rho_v(z') z' dz' \\ &= - \frac{1}{\epsilon_0} \left(|z| \int_{+0}^{|z|} \rho_v(z') dz' + \int_z^\infty \rho_v(z') z' dz' \right) + \frac{1}{\epsilon_0} \left(|a| \int_{+0}^{|a|} \rho_v(z') dz' + \int_a^\infty \rho_v(z') z' dz' \right) \end{aligned}$$

ここで、 $\rho_v(z)z$ は z に関する奇関数であるから、 $\int_{-z}^z \rho_v(z') z' dz' = 0$ となり

$$\int_z^\infty \rho_v(z') z' dz' = \int_{|z|}^\infty \rho_v(z') z' dz'$$

の関係が成り立つので

$$V(z) = - \frac{1}{\epsilon_0} \left(|z| \int_{+0}^{|z|} \rho_v(z') dz' + \int_{|z|}^\infty \rho_v(z') z' dz' \right) + \frac{1}{\epsilon_0} \left(|a| \int_{+0}^{|a|} \rho_v(z') dz' + \int_{|a|}^\infty \rho_v(z') z' dz' \right)$$

となり、式(4.13)が確認された。 ▮

【4】〔線積分による方法〕基準点 B を $z = 0$ の面上の点としたときの観測点 A における電位を V とする。2章の章末問題【5】の結果を用いて

$$\begin{aligned} V &= - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_B^A \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left(\text{sgn}(z) - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) \mathbf{a}_z \cdot (d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z) \\ &= - \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \int_0^z \left(\text{sgn}(z) - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) dz = - \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left[|z| - \sqrt{z^2 + a^2} \right]_0^z = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left(-|z| + \sqrt{z^2 + a^2} - a \right) \end{aligned}$$

$a \rightarrow \infty$ のとき

$$V = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0}|z| + \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}(\sqrt{z^2+a^2}-a) = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0}|z| + \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}\frac{(z^2+a^2)-a^2}{\sqrt{z^2+a^2}+a} \rightarrow -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0}|z| \quad \blacksquare$$

〔電位の重ね合わせによる方法〕基準点を無限遠点としたときの電位を V_∞ とし、基準点を $z=0$ としたときの電位を V とする。 $dQ = \rho_s dS' = \rho_s \rho' d\rho' d\phi'$ による電位 dV_∞ は、 $r-r' = za_z - \rho' a_{\rho'}$ 、 $|r-r'| = \sqrt{z^2+\rho'^2}$ より

$$dV_\infty = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0|r-r'|} = \frac{\rho_s \rho' d\rho' d\phi'}{4\pi\epsilon_0\sqrt{\rho'^2+z^2}}$$

$\rho' = 0 \rightarrow a, \phi' = 0 \rightarrow 2\pi$ にわたって積分すると、円板全体について面積分することになる。

$$\begin{aligned} V_\infty &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho_s \rho' d\rho' d\phi'}{4\pi\epsilon_0\sqrt{\rho'^2+z^2}} = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^a \frac{\rho' d\rho'}{\sqrt{\rho'^2+z^2}} \\ &= \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \left[\sqrt{\rho'^2+z^2} \right]_0^a = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} (\sqrt{a^2+z^2}-|z|) \end{aligned}$$

ゆえに

$$V = V_\infty(z) - V_\infty(0) = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} (-|z| + \sqrt{z^2+a^2} - a) \quad \blacksquare$$

【5】基準点 B を $\rho = b$ としたときの観測点 A における電位を V とする。3章の章末問題【6】の結果から

$$V = -\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\int_B^A E_\rho \mathbf{a}_\rho \cdot (d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z) = -\int_b^\rho E_\rho d\rho$$

a) $\rho > a$ のとき

$$V = -\int_b^\rho E_\rho d\rho = -\int_b^\rho \frac{\rho_s a}{\epsilon_0 \rho} d\rho = -\frac{\rho_s a}{\epsilon_0} \int_b^\rho \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\rho_s a}{\epsilon_0} [\ln \rho]_b^\rho = \frac{\rho_s a}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{\rho}$$

b) $\rho < a$ のとき

$$V = -\int_b^a E_\rho d\rho - \int_a^\rho E_\rho d\rho = -\int_b^a \frac{\rho_s a}{\epsilon_0 \rho} d\rho - \int_a^\rho (0) d\rho = -\frac{\rho_s a}{\epsilon_0} \int_b^a \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\rho_s a}{\epsilon_0} [\ln \rho]_b^a = \frac{\rho_s a}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \quad \blacksquare$$

【6】基準点 B を $\rho = b$ としたときの観測点 A における電位を V とする。3章の章末問題【7】の結果から

$$V = -\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\int_B^A E_\rho \mathbf{a}_\rho \cdot (d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z) = -\int_b^\rho E_\rho d\rho$$

a) $\rho > a$ のとき

$$V = -\int_b^\rho E_\rho d\rho = -\int_b^a \frac{\rho_v a^2}{2\epsilon_0 \rho} d\rho - \int_a^\rho \frac{\rho_v a^2}{2\epsilon_0} d\rho = -\frac{\rho_v a^2}{2\epsilon_0} \int_b^a \frac{d\rho}{\rho} - \frac{\rho_v a^2}{2\epsilon_0} (\rho - a) = -\frac{\rho_v a^2}{2\epsilon_0} [\ln \rho]_b^a - \frac{\rho_v a^2}{2\epsilon_0} (\rho - a)$$

b) $\rho < a$ のとき

$$\begin{aligned} V &= -\int_b^\rho E_\rho d\rho = -\int_b^a E_\rho d\rho - \int_a^\rho E_\rho d\rho = -\int_b^a \frac{\rho_v a^2}{2\epsilon_0 \rho} d\rho - \int_a^\rho \frac{\rho_v \rho}{2\epsilon_0} d\rho \\ &= -\frac{\rho_v a^2}{2\epsilon_0} \int_b^a \frac{d\rho}{\rho} - \frac{\rho_v}{2\epsilon_0} \int_a^\rho \rho d\rho = -\frac{\rho_v a^2}{2\epsilon_0} [\ln \rho]_b^a - \frac{\rho_v}{2\epsilon_0} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_a^\rho = \frac{\rho_v}{2\epsilon_0} \left(a^2 \ln \frac{b}{a} + \frac{a^2 - \rho^2}{2} \right) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

【 7 】 観測点を A , 基準点 (無限遠点) を B とすると , 3 章の章末問題【 4 】の結果から

$$V = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_B^A E_r \mathbf{a}_r \cdot (dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi) = - \int_\infty^r E_r dr$$

a) $r > a$ のとき

$$V = - \int_\infty^r E_r dr = - \int_\infty^r \frac{\rho_s a^2}{\epsilon_0 r^2} dr = - \frac{\rho_s a^2}{\epsilon_0} \int_\infty^r \frac{dr}{r^2} = - \frac{\rho_s a^2}{\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_\infty^r = \frac{\rho_s a^2}{\epsilon_0 r}$$

b) $r < a$ のとき

$$V = - \int_\infty^a E_r dr - \int_a^r E_r dr = - \int_\infty^a \frac{\rho_s a^2}{\epsilon_0 r^2} dr - \int_a^r (0) dr = - \frac{\rho_s a^2}{\epsilon_0} \int_\infty^a \frac{dr}{r^2} = - \frac{\rho_s a^2}{\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_\infty^a = \frac{\rho_s a}{\epsilon_0}$$

【 8 】 観測点を A , 基準点 (無限遠点) を B とすると , 3 章の章末問題【 5 】の結果から

$$V = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_B^A E_r \mathbf{a}_r \cdot (dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi) = - \int_\infty^r E_r dr$$

a) $r > a$ のとき

$$V = - \int_\infty^r E_r dr = - \int_\infty^r \frac{\rho_v a^3}{3\epsilon_0 r^2} dr = - \frac{\rho_v a^3}{3\epsilon_0} \int_\infty^r \frac{dr}{r^2} = - \frac{\rho_v a^3}{3\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_\infty^r = \frac{\rho_v a^3}{3\epsilon_0 r}$$

b) $r < a$ のとき

$$\begin{aligned} V &= - \int_\infty^a E_r dr - \int_a^r E_r dr = - \int_\infty^a \frac{\rho_v a^3}{3\epsilon_0 r^2} dr - \int_a^r \frac{\rho_v r}{3\epsilon_0} dr = - \frac{\rho_v a^3}{3\epsilon_0} \int_\infty^a \frac{dr}{r^2} - \frac{\rho_v}{3\epsilon_0} \int_a^r r dr \\ &= - \frac{\rho_v a^3}{3\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_\infty^a - \frac{\rho_v}{3\epsilon_0} \left[\frac{r^2}{2} \right]_a^r = \frac{\rho_v a^2}{3\epsilon_0} - \frac{\rho_v (r^2 - a^2)}{6\epsilon_0} = \frac{\rho_v}{2\epsilon_0} \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right) \end{aligned}$$

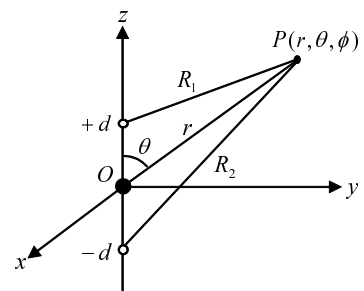
【 9 】 図のように , R_1, R_2 を選ぶ。このとき , 点 P における電位は

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{2}{r} \right)$$

と与えられる。ここで , 余弦定理と近似式

$$(1 + 2ax + bx^2)^{-1/2} \cong 1 - ax + \frac{3a^2 - b}{2} x^2 \quad (|x| \ll 1)$$

を利用する。 $d/r \ll 1$ なので



$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} = \frac{1}{r} \left\{ 1 - 2 \cos \theta \left(\frac{d}{r} \right) + \left(\frac{d}{r} \right)^2 \right\}^{-1/2} \\ &\cong \frac{1}{r} \left\{ 1 + \cos \theta \left(\frac{d}{r} \right) + \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \left(\frac{d}{r} \right)^2 \right\} = \frac{1}{r} + \frac{d \cos \theta}{r^2} + \frac{d^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2r^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_2} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos(\pi - \theta)}} = \frac{1}{r} \left\{ 1 - 2 \cos(\pi - \theta) \left(\frac{d}{r} \right) + \left(\frac{d}{r} \right)^2 \right\}^{-1/2} \\ &\cong \frac{1}{r} \left\{ 1 + \cos(\pi - \theta) \left(\frac{d}{r} \right) + \frac{3 \cos^2(\pi - \theta) - 1}{2} \left(\frac{d}{r} \right)^2 \right\} = \frac{1}{r} - \frac{d \cos \theta}{r^2} + \frac{d^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2r^3} \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left\{ \frac{1}{r} + \frac{d \cos \theta}{r^2} + \frac{d^2(3 \cos^2 \theta - 1)}{2r^3} \right\} + \left\{ \frac{1}{r} - \frac{d \cos \theta}{r^2} + \frac{d^2(3 \cos^2 \theta - 1)}{2r^3} \right\} - \frac{2}{r} \right] \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d^2(3 \cos^2 \theta - 1)}{r^3} = \frac{Qd^2(3 \cos^2 \theta - 1)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E &= -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta = \frac{Qd^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-(3 \cos^2 \theta - 1) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^3} \right) \mathbf{a}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (3 \cos^2 \theta - 1) \mathbf{a}_\theta \right] \\ &= \frac{Qd^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-(3 \cos^2 \theta - 1) \frac{-3}{r^4} \mathbf{a}_r - \frac{1}{r^4} 3(-2 \cos \theta \sin \theta) \mathbf{a}_\theta \right] \\ &= \frac{3Qd^2}{4\pi\epsilon_0 r^4} \left\{ (3 \cos^2 \theta - 1) \mathbf{a}_r + 2 \sin \theta \cos \theta \mathbf{a}_\theta \right\} \end{aligned}$$

【10】 V は ρ のみの関数なので, ϕ, z に関する偏微分は 0 となる。よって, 式 (4.35b), (4.36) より

$$\begin{aligned} \nabla^2 V &= \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dV}{d\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{\rho} \right) \right] = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln a - \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho \right) \right] \\ &= -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{d}{d\rho} (\ln \rho) \right] = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \cdot \frac{1}{\rho} \right) = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (1) = 0 \end{aligned}$$

となり, $\rho \neq 0$ においてラプラスの方程式を満足する。

5 章

【1】 導体球および導体球殻の中心を原点とし, 原点からの距離を r とする。導体間 ($a < r < b$) の電界を E_1 とし, 導体外 ($r > c$) の電界を E_2 とする。また, 導体 1 (内導体) の電位を V_1 とし, 導体 2 (外導体) の電位を V_2 とする。ガウスの法則を適用する際の閉曲面 S は原点を中心とする半径 r の球面とする。

(1) 導体 2 (外導体) に電荷が与えられておらず, 導体 1 (内導体) のみに電荷 Q が与えられている場合は, 静電誘導より, 導体 2 の内側表面に $-Q$ の電荷が, 外側表面に Q の電荷が生じる。導体 2 の外部に閉曲面 S を考え, この内部の電荷の代数和を求めると $Q_{\text{enclosed by } S} = Q$ であるから, $r > c$ では, ガウスの法則より, すなわち, 式 (3.4), (3.13) を利用して

$$E_2 = \frac{1}{\epsilon_0} D_2 = \frac{Q_{\text{enclosed by } S}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r (= E_{2r} \mathbf{a}_r)$$

となる。また, 二つの導体間に設けた閉曲面 S 内部に含まれる電荷は $Q_{\text{enclosed by } S} = Q$ である。ゆえに, $a < r < b$ において, ガウスの法則より, すなわち, 式 (3.4), (3.13) を利用して

$$E_1 = \frac{1}{\epsilon_0} D_1 = \frac{Q_{\text{enclosed by } S}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r (= E_{1r} \mathbf{a}_r)$$

次に, V_2 は

$$V_2 = - \int_{\infty}^c E_{2r} dr = - \int_{\infty}^c \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c}$$

V_1 は

$$V_1 = - \int_{\infty}^c E_{2r} dr - \int_b^a E_{1r} dr = - \int_{\infty}^c \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr - \int_b^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

ここで, 導体内 ($b < r < c$) の電界が 0 であることに注意されたい。

- (2) 外導体(導体2)に電荷を与えても内導体球(導体1)には電荷は誘起されないことに注意して,各部に閉曲面 S を考え,ガウスの法則を適用する。外導体外部の閉曲面 S 内の電荷量は $Q_{\text{enclosed by } S} = Q$ であるから, $r > c$ において,式(3.4),(3.13)を利用して

$$E_2 = \frac{1}{\epsilon_0} D_2 = \frac{Q_{\text{enclosed by } S}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r (= E_{2r} \mathbf{a}_r)$$

また,導体1に電荷がなく,導体間で考える閉曲面 S 内における電荷が $Q_{\text{enclosed by } S} = 0$ となるため, $a < r < b$ において $E_1 = \mathbf{0}$ となる。次に,電位 V_2 は

$$V_2 = - \int_{\infty}^c E_{2r} dr = - \int_{\infty}^c \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c}$$

となり,電位 V_1 は

$$V_1 = - \int_{\infty}^c E_{2r} dr - \int_b^a E_{1r} dr = - \int_{\infty}^c \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c}$$

となる。ここで,導体内 ($b < r < c$) の電界が $\mathbf{0}$ であることに注意されたい。

- (3) 外導体(導体2)外部の閉曲面内の総電荷量は $Q_{\text{enclosed by } S} = 0$ となるから, $r > c$ において, $E_2 = \mathbf{0}$ となる。また,両導体の間の閉曲面 S に存在する電荷は $Q_{\text{enclosed by } S} = Q$ である。したがって, $a < r < b$ において,ガウスの法則より,すなわち,式(3.4),(3.13)を利用して

$$E_1 = \frac{1}{\epsilon_0} D_1 = \frac{Q_{\text{enclosed by } S}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r (= E_{1r} \mathbf{a}_r)$$

これから,電位は

$$V_2 = - \int_{\infty}^c E_{2r} dr = 0$$

$$V_1 = - \int_{\infty}^c E_{2r} dr - \int_c^b E_r dr - \int_b^a E_{1r} dr = - \int_b^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

- 【2】内導体表面に一樣に総量 Q の電荷を帯電させると,静電誘導により外導体表面に一樣に総量 $-Q$ の電荷が帯電する。原点 O を中心とする半径 r の球面を閉曲面 S とすると,内外導体間(自由空間, $a < r < b$)において, $Q_{\text{enclosed by } S} = Q$ であるから,式(3.4),(3.13)より

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D} = \frac{Q_{\text{enclosed by } S}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

となる。これより, $r = b$ を基準面とする電位は, $d\mathbf{r} = dr\mathbf{a}_r + r d\theta\mathbf{a}_\theta + r \sin\theta d\phi\mathbf{a}_\phi$ より

$$V(r) = - \int_b^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_b^r E_r dr = - \int_b^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_b^r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)$$

と与えられる。 $V(a) = V_0$ より

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} = \frac{V_0}{1/a - 1/b}$$

これより

$$V(r) = \frac{V_0}{1/a - 1/b} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) = V_0 \frac{1/r - 1/b}{1/a - 1/b}$$

を得る。

【3】(1) E を定数として, $E = \frac{A + B \cos \theta}{C + D \cos \theta}$ とおく。分母を払い, 整理すると

$$(A - CE) + (B - DE) \cos \theta = 0$$

任意の θ , すなわち, 任意の $\cos \theta$ に対して上式が成立するためには $A - CE = B - DE = 0$ である必要があることから

$$f(\theta) = E = \frac{A}{C} = \frac{B}{D}$$

の関係を得る。

(2) (ヒント: 球面上の点 A の位置ベクトルは $\mathbf{r}_A = a\mathbf{a}_r$ である。また, $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_z = \cos \theta$ の関係にも注意。2つの点電荷による球面上の電位を 0 と置く。その上で, $Q'/Q = \text{一定}$ という条件を利用せよ。その際, (1) の結果を利用することになる。)

点 P の電荷 Q および点 P' の電荷 Q' による電位 V が 0 となることより

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_P|} + \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{P'}|} = 0$$

上式を変形すると

$$\frac{Q'}{Q} = -\frac{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{P'}|}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_P|}$$

ここで, $\mathbf{r}_P = d\mathbf{a}_z, \mathbf{r}_{P'} = d'\mathbf{a}_z$ なので

$$|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_P|^2 = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_P) \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_P) = |\mathbf{r}_A|^2 - 2\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_P + |\mathbf{r}_P|^2 = a^2 - 2ad \cos \theta + d^2$$

$$|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{P'}|^2 = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{P'}) \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{P'}) = |\mathbf{r}_A|^2 - 2\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_{P'} + |\mathbf{r}_{P'}|^2 = a^2 - 2ad' \cos \theta + d'^2$$

ゆえに

$$\frac{Q'}{Q} = -\sqrt{\frac{a^2 - 2ad' \cos \theta + d'^2}{a^2 - 2ad \cos \theta + d^2}} = -\sqrt{\frac{(a^2 + d'^2) - 2ad' \cos \theta}{(a^2 + d^2) - 2ad \cos \theta}}$$

この値が一定値となるためには

$$\frac{a^2 + d'^2}{a^2 + d^2} = \frac{-2ad'}{-2ad}$$

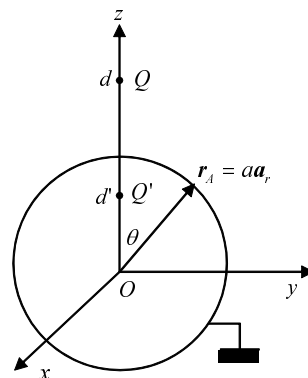
$d \neq d'$ を考慮して, $d' = a^2/d$ を得る。これから, 求める点 P' の座標は $(0, 0, a^2/d)$ となる。このとき

$$\frac{Q'}{Q} = -\frac{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{P'}|}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_P|} = -\sqrt{\frac{d'}{d}} = -\frac{a}{d}$$

(3) (ヒント: $E = -\nabla V$ の関係を利用して電位から電界を求めてもよいが, この場合はクーロンの法則を利用して直接 $\mathbf{r} = r\mathbf{a}_r$ における点電荷 Q と Q' による電界を計算するのが手っ取り早い。クーロンの定理から, $\rho_s = D_r|_{r=a} = \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_r|_{r=a}$ を計算する。その際, (2) で導出した結果を利用すること。最後の面積分の際に必要な不定積分 $\int \frac{\sin \theta d\theta}{(E + F \cos \theta)^{3/2}}$ は $t = E + F \cos \theta$ と置換すれば計算できる。)

クーロンの法則により, 球面 $r = a$ における電界は

$$\begin{aligned} E|_{r=a} &= \frac{Q(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_P)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_P|^3} + \frac{Q'(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{P'})}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{P'}|^3} = \frac{Q(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_P)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_P|^3} + \frac{\left(-\frac{a}{d}Q\right)(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{P'})}{4\pi\epsilon_0\left(\frac{a}{d}|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_P|\right)^3} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_P|^3} \left\{ (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_P) - \frac{d^2}{a^2}(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{P'}) \right\} \end{aligned}$$



ゆえに

$$\begin{aligned} \rho_s &= \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_r|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi|r_A - \mathbf{r}_P|^3} \left\{ (a\mathbf{a}_r - d\mathbf{a}_z) - \frac{d^2}{a^2} \left(a\mathbf{a}_r - \frac{a^2}{d} \mathbf{a}_z \right) \right\} \cdot \mathbf{a}_r \\ &= -\frac{Q(d^2 - a^2)}{4\pi a(d^2 + a^2 - 2da \cos \theta)^{3/2}} \end{aligned}$$

よって、導体球表面上に誘導される電荷の総量 Q_i は

$$\begin{aligned} Q_i &= \iint_{r=a} \rho_s dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho_s a^2 \sin \theta d\theta d\phi = -\frac{Qa(d^2 - a^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(d^2 + a^2 - 2da \cos \theta)^{3/2}} \\ &= -\frac{Qa(d^2 - a^2)}{4\pi} \cdot 2\pi \left[-\frac{1}{da \sqrt{d^2 + a^2 - 2da \cos \theta}} \right]_0^\pi = -\frac{Q(d^2 - a^2)}{2d} \left(-\frac{1}{d+a} + \frac{1}{d-a} \right) = \frac{a}{d} Q \\ &= Q' \end{aligned}$$

【4】 $r > a$ のとき、ガウスの法則より、すなわち、式 (3.4), (3.13) より

$$\mathbf{D} = \frac{Q_{\text{enclosed by } S}}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r = \frac{\rho_v \cdot \frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r = \frac{\rho_v a^3}{3r^2} \mathbf{a}_r, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D} = \frac{\rho_v a^3}{3\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

$r < a$ のとき、ガウスの法則より、すなわち、式 (5.15), (5.16), (3.13) より

$$\mathbf{D} = \frac{Q_{\text{enclosed by } S}}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r = \frac{\rho_v \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r = \frac{\rho_v r}{3} \mathbf{a}_r, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \mathbf{D} = \frac{\rho_v r}{3\epsilon_0 \epsilon_r} \mathbf{a}_r$$

となるから、電位は、 $r > a$ のとき

$$V = -\int_\infty^r E_r dr = -\int_\infty^r \frac{\rho_v a^3}{3\epsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho_v a^3}{3\epsilon_0 r}$$

$r < a$ のとき

$$V = -\int_\infty^a E_r dr - \int_a^r E_r dr = -\int_\infty^a \frac{\rho_v a^3}{3\epsilon_0 r^2} dr - \int_a^r \frac{\rho_v r}{3\epsilon_0 \epsilon_r} dr = \frac{\rho_v a^2}{3\epsilon_0} + \frac{\rho_v (a^2 - r^2)}{6\epsilon_0 \epsilon_r}$$

と与えられる。

【5】 誘電体内におけるガウスの法則の微分形 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$ に $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon(-\nabla V) = -\epsilon \nabla V$ の関係を代入すると

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (-\epsilon \nabla V) = -\epsilon \nabla \cdot (\nabla V) = -\epsilon \nabla^2 V = \rho_v$$

を得る。ここで、 ϵ を定数と仮定した。これから、ポワソンの方程式 $\nabla^2 V = -\rho_v/\epsilon$ が導かれる。

【6】 境界面では電界の接線成分 (x 成分) が等しいので、 $E_1 \cdot \mathbf{a}_x = E_2 \cdot \mathbf{a}_x$ が成り立つ。これより

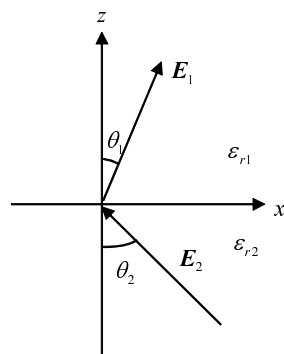
$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$$

また、境界面では電束密度の法線成分 (z 成分) が等しいので、 $D_1 \cdot \mathbf{a}_z = D_2 \cdot \mathbf{a}_z$ が成り立つ。これより

$$\epsilon_{r1} E_1 \cos \theta_1 = \epsilon_{r2} E_2 \cos \theta_2$$

これらの式から、 E_1, E_2 を消去する (各辺の比を取る) と

$$\left(\frac{E_2}{E_1} \right) \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\epsilon_{r1} \cos \theta_1}{\epsilon_{r2} \cos \theta_2}$$



すなわち

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}$$

の関係が得られる。

- 【7】点 P に置かれた点電荷によって生じる電界によって、誘電体境界面 $z = 0$ に面電荷が分布する。よって、 $z > 0$ での電界は、点 P の点電荷による電界と $z = 0$ 面に誘導される面電荷による電界の合成である。いま、 $z < 0$ の誘電体を自由空間に置き換え、 $z = 0$ 面に誘導される面電荷の寄与を点 $P'(0, 0, -d)$ に配置する点電荷 Q' で表現する。したがって、 $z > 0$ において、位置 r における電界は

$$E_{>} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - d\mathbf{a}_z}{|\mathbf{r} - d\mathbf{a}_z|^3} + \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} + d\mathbf{a}_z}{|\mathbf{r} + d\mathbf{a}_z|^3}$$

と表現できる。一方、 $z < 0$ においても、点 P による電界と $z = 0$ 境界面における面電荷により電界が形成される。この電界について、 $z > 0$ の自由空間を誘電率 ϵ の誘電体に置き換え、点 $P(0, 0, d)$ に配置する点電荷 Q'' による電界で表現できると仮定する。したがって、 $z < 0$ において、位置 r における電界は

$$E_{<} = \frac{Q''}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r} - d\mathbf{a}_z}{|\mathbf{r} - d\mathbf{a}_z|^3}$$

となる。 Q' 、 Q'' を決定するために、 $z = 0$ において境界条件を適用する。以下、 $z = 0$ 面において、 $\mathbf{r} = xa_x + ya_y$ であるから、 $|\mathbf{r} - d\mathbf{a}_z| = |\mathbf{r} + d\mathbf{a}_z| = \sqrt{x^2 + y^2 + d^2}$ であることに注意すると

$$E_{>|z=0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{xa_x + ya_y - d\mathbf{a}_z}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} + \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{xa_x + ya_y + d\mathbf{a}_z}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$E_{<|z=0} = \frac{Q''}{4\pi\epsilon} \frac{xa_x + ya_y - d\mathbf{a}_z}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}$$

となる。 $z = 0$ で電界の接線成分、すなわち、 x 成分および y 成分が等しいので

$$\frac{Q}{\epsilon_0} + \frac{Q'}{\epsilon_0} = \frac{Q''}{\epsilon} \tag{P.5.1}$$

$z = 0$ で電束密度の法線成分、すなわち、 z 成分が等しいので

$$-Q + Q' = -Q'' \tag{P.5.2}$$

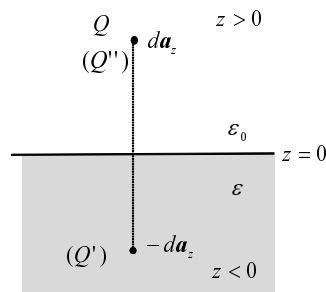
式 (P.5.1) と式 (P.5.2) を連立させて、 Q' 、 Q'' について解くと

$$Q' = \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\epsilon_0 + \epsilon} Q, \quad Q'' = \frac{2\epsilon}{\epsilon_0 + \epsilon} Q$$

となる。これから、点 P の点電荷 Q に作用する力は

$$\mathbf{F} = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\mathbf{a}_z - (-d\mathbf{a}_z)}{|d\mathbf{a}_z - (-d\mathbf{a}_z)|^3} = \frac{QQ'}{16\pi\epsilon_0 d^2} \mathbf{a}_z = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2} \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\epsilon_0 + \epsilon} \mathbf{a}_z$$

となる。一般に、 $\epsilon > \epsilon_0$ なので、 F は、 $-\mathbf{a}_z$ 方向に、つまり、誘電体に引き寄せられるように働く。



- 【 8 】 (1) 誘電体境界において電束密度の法線成分が連続であることに注意して， $\epsilon_{r1}, \epsilon_{r2}$ の領域に対してガウスの法則を適用する。閉曲面 S として，中心軸が z 軸であり，半径 ρ ，長さ L の円筒面を考える。内導体に単位長あたり ρ_l の電荷を与えると，式 (3.15) より

$$D = \frac{Q_{\text{enclosed by } S}}{2\pi\rho L} a_\rho = \frac{\rho_l L}{2\pi\rho L} a_\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\rho} a_\rho$$

各領域における電界 (ρ 成分) は，式 (5.15), (5.16) より

$$E_{1\rho} = \frac{1}{\epsilon_0\epsilon_{r1}} D_\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}\rho} \quad (a < \rho < c)$$

$$E_{2\rho} = \frac{1}{\epsilon_0\epsilon_{r2}} D_\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}\rho} \quad (c < \rho < b)$$

となる。条件より， $E_{1\rho, \text{max}} = E_{2\rho, \text{max}}$ ， $E_{1\rho, \text{min}} = E_{2\rho, \text{min}}$ であるから

$$\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}a} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}c} \quad \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}c} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}b}$$

すなわち

$$\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} = \frac{c}{a}, \quad \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} = \frac{b}{c}$$

これから， $c = \sqrt{ab}$ の関係を得る。

- (2) 電位差を計算すると

$$\begin{aligned} V &= - \int_b^c E_{2\rho} d\rho - \int_c^a E_{1\rho} d\rho = - \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}} \int_b^c \frac{d\rho}{\rho} - \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}} \int_c^a \frac{d\rho}{\rho} \\ &= \dots = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\epsilon_{r1}} \ln \frac{c}{a} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \ln \frac{b}{c} \right) = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\epsilon_{r1}} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \right) \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

ゆえに

$$C = \frac{\rho_l \cdot 1}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0}{(1/\epsilon_{r1} + 1/\epsilon_{r2}) \ln(b/a)}$$

- 【 9 】 境界において電界の接線成分が等しいので，同じ半径 ρ での E_ρ は $\epsilon_{r1}, \epsilon_{r2}$ の領域に対して共通であると考えてよい。内導体に単位長あたり ρ_l の電荷を与え，閉曲面 S として，中心軸が z 軸であり，半径 ρ ，長さ L の円筒面を選ぶ。電荷分布の軸対称性から，電束密度 D は ρ 成分のみとなり，円筒面の底面に関する法単位ベクトルと直交する。このように，簡単化されたガウスの法則 (3.11) の左辺において，円筒面の側面の寄与を考えればよい。したがって

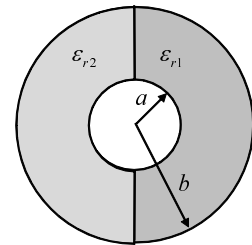
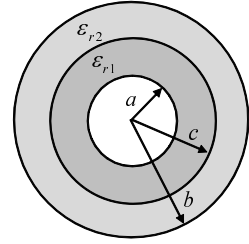
$$\epsilon_0\epsilon_{r1}E_\rho \cdot \pi\rho \cdot L + \epsilon_0\epsilon_{r2}E_\rho \cdot \pi\rho \cdot L = \rho_l \cdot L$$

すなわち

$$E_\rho = \frac{\rho_l}{\pi\epsilon_0(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})\rho}$$

したがって，内外導体間の電位差 V は

$$V = - \int_b^a E_\rho d\rho = - \frac{\rho_l}{\pi\epsilon_0(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})} \int_b^a \frac{d\rho}{\rho} = \dots = \frac{\rho_l}{\pi\epsilon_0(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})} \ln \frac{b}{a}$$



ゆえに

$$C = \frac{\rho_l \cdot 1}{V} = \frac{\pi \epsilon_0 (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})}{\ln(b/a)}$$

- 【10】 内導体に Q の電荷を与え、中心が原点 O にあり、半径が r であるような球面を閉曲面 S に選び、ガウスの法則を適用する。境界条件より誘電体境界において電界の接線成分が等しいので、同じ半径 r での E_r は $\epsilon_{r1}, \epsilon_{r2}$ の領域に対して共通である。閉曲面 S のうち、 ϵ_{r1} が占有する面積 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi r^2 \int_0^{\pi/6} \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi r^2 [-\cos \theta]_0^{\pi/6} = (2 - \sqrt{3})\pi r^2 \end{aligned}$$

であり、 ϵ_{r2} が占有する面積 S_2 は

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi r^2 \int_{\pi/6}^{\pi} \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi r^2 [-\cos \theta]_{\pi/6}^{\pi} = (2 + \sqrt{3})\pi r^2 \end{aligned}$$

であることに注意して、簡単化されたガウスの法則 (3.11) より

$$\epsilon_0 \epsilon_{r1} E_r \cdot S_1 + \epsilon_0 \epsilon_{r2} E_r \cdot S_2 = Q$$

これから

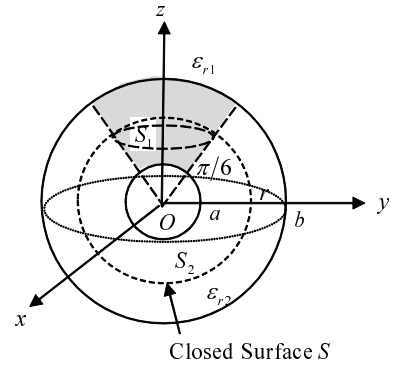
$$E_r = \frac{Q}{\epsilon_0 (\epsilon_{r1} S_1 + \epsilon_{r2} S_2)} = \frac{Q}{\pi \epsilon_0 \{(2 - \sqrt{3})\epsilon_{r1} + (2 + \sqrt{3})\epsilon_{r2}\} r^2}$$

したがって、内外導体間の電位差 V は

$$\begin{aligned} V &= - \int_b^a E_r dr = - \frac{Q}{\pi \epsilon_0 \{(2 - \sqrt{3})\epsilon_{r1} + (2 + \sqrt{3})\epsilon_{r2}\}} \int_b^a \frac{dr}{r^2} \\ &= \dots = \frac{Q}{\pi \epsilon_0 \{(2 - \sqrt{3})\epsilon_{r1} + (2 + \sqrt{3})\epsilon_{r2}\}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \end{aligned}$$

ゆえに

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\pi \epsilon_0 \{(2 - \sqrt{3})\epsilon_{r1} + (2 + \sqrt{3})\epsilon_{r2}\}}{1/a - 1/b}$$



6章

- 【1】 式 (6.15) を

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho_v = 0$$

と書き直し、両辺に $e^{(\sigma/\epsilon)t}$ を乗じて整理すると

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_v e^{(\sigma/\epsilon)t}) = 0$$

となる。上式を t に関して積分し、初期条件 $\rho_v(t=0) = \rho_0$ を考慮すると

$$\rho_v = \rho_0 e^{-(\sigma/\epsilon)t}$$

を得る。

【2】正に帯電した導体を取り囲む閉曲面を S とすると

$$Q = \iint_S \epsilon E \cdot dS = \epsilon \iint_S E \cdot dS, \quad I = \iint_S J \cdot dS = \iint_S \sigma E \cdot dS = \sigma \iint_S E \cdot dS$$

一方, 導体間の電位差は $V = - \int_-^+ E \cdot dr$ と与えられるので

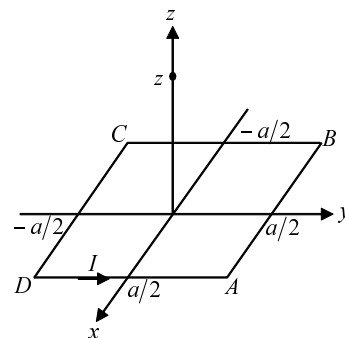
$$C = \frac{Q}{V} = \epsilon \iint_S E \cdot dS / \left(- \int_-^+ E \cdot dr \right), \quad R = \frac{V}{I} = \left(- \int_-^+ E \cdot dr \right) / \sigma \iint_S E \cdot dS$$

したがって

$$CR = \left\{ \epsilon \iint_S E \cdot dS / \left(- \int_-^+ E \cdot dr \right) \right\} \cdot \left\{ \left(- \int_-^+ E \cdot dr \right) / \sigma \iint_S E \cdot dS \right\} = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

7章

【1】式(7.11)を利用してよいが, ここではビオ・サバルの法則を利用して解く。辺 AB が点 $P(0, 0, z)$ につくる磁界をビオ・サバルの法則で求める。図に示すように, ループが xy 平面に含まれるように座標系を設定し, 電流の流れる向きを決める。



$$\mathbf{r} = z\mathbf{a}_z, \quad \mathbf{r}' = x'\mathbf{a}_x + (a/2)\mathbf{a}_y, \quad d\mathbf{r}' = dx'\mathbf{a}_x,$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = -x'\mathbf{a}_x - (a/2)\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z,$$

$$R = |\mathbf{R}| = \sqrt{x'^2 + (a/2)^2 + z^2}$$

であるから

$$d\mathbf{H}_{AB} = \frac{I d\mathbf{r}' \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} = \frac{I dx' \mathbf{a}_x \times \{-x' \mathbf{a}_x - (a/2) \mathbf{a}_y + z \mathbf{a}_z\}}{4\pi \{x'^2 + (a/2)^2 + z^2\}^{3/2}}$$

$$= -\frac{I}{4\pi} \left(z \mathbf{a}_y + \frac{a}{2} \mathbf{a}_z \right) \frac{dx'}{\{x'^2 + (a/2)^2 + z^2\}^{3/2}}$$

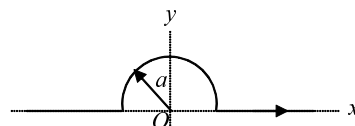
これから

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{AB} &= -\frac{I}{4\pi} \left(z \mathbf{a}_y + \frac{a}{2} \mathbf{a}_z \right) \int_{a/2}^{-a/2} \frac{dx'}{\{x'^2 + (a/2)^2 + z^2\}^{3/2}} = \frac{I}{2\pi} \left(z \mathbf{a}_y + \frac{a}{2} \mathbf{a}_z \right) \int_0^{a/2} \frac{dx'}{\{x'^2 + (a/2)^2 + z^2\}^{3/2}} \\ &= \frac{I}{2\pi} \left(z \mathbf{a}_y + \frac{a}{2} \mathbf{a}_z \right) \left[\frac{x'}{\{(a/2)^2 + z^2\} \sqrt{x'^2 + (a/2)^2 + z^2}} \right]_0^{a/2} = \frac{I}{2\pi} \left(z \mathbf{a}_y + \frac{a}{2} \mathbf{a}_z \right) \frac{a/2}{\{(a/2)^2 + z^2\} \sqrt{a^2/2 + z^2}} \end{aligned}$$

となる。ここで, 式(C.1)を利用した。同様に, $\mathbf{H}_{BC}, \mathbf{H}_{CD}, \mathbf{H}_{DA}$ を計算する。したがって

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{AB} + \mathbf{H}_{BC} + \mathbf{H}_{CD} + \mathbf{H}_{DA} = \frac{Ia^2}{2\pi(z^2 + a^2/4) \sqrt{z^2 + a^2/2}} \mathbf{a}_z$$

【2】 $x \geq a$ の直線状導線が点 O に作る磁界は 0 となる。なぜならば, ビオ・サバルの法則 $d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{r}' \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$ の関係において, $d\mathbf{r}' = dx' \mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_R = -\mathbf{a}_x$ より $d\mathbf{r}' \times \mathbf{a}_R = 0$ となるためである。このように, 導線のある軸上における磁界は 0 となる。同様に, $x \leq -a$ の直線状導線が点 O に作る磁界も 0 となる。



したがって, 点 O に生じる磁界は半円に流れる電流によって生じる。この磁界は, 例題 7.3 と同様に計算する。ただし, $z = 0$ であって, 積分区間を $\phi' = \pi$ から $\phi' = 0$ までとする。

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi a} \int_{\pi}^0 d\phi' \mathbf{a}_z = -\frac{I}{4a} \mathbf{a}_z$$

- 【3】 コイル A から点 P までの距離を z とすると, z の増加する向きを z 軸の正の向きとなることに注意する。例題 7.3 の結果を利用する。コイル A が点 P に作る磁界は, N_A 巻きであることから, 1 巻ループによる磁界の N_A 倍の磁界となるので

$$\mathbf{H}_A = \frac{N_A I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z$$

で与えられる。同様に, コイル B が点 P に作る磁界は

$$\mathbf{H}_B = \frac{N_B I b^2}{2\{(d-z)^2 + b^2\}^{3/2}} \mathbf{a}_z$$

となる。したがって, 両コイルの合成磁界 \mathbf{H} は

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_B = \frac{I}{2} \left[\frac{N_A a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{N_B b^2}{\{(d-z)^2 + b^2\}^{3/2}} \right] \mathbf{a}_z$$

と与えられる。題意から, $z = a/2$ で $\mathbf{H} = H_z \mathbf{a}_z$ が一様となる (z の変化に対する磁界の z 成分の変化の割合が 0 となる) ためには, $dH_z/dz|_{z=a/2} = 0$ であればよい。

$$\frac{dH_z}{dz} = \frac{I}{2} \left[\frac{(-3/2) \cdot 2z}{(z^2 + a^2)^{5/2}} N_A a^2 + \frac{(-3/2) \cdot 2(d-z)(-1)}{\{(d-z)^2 + b^2\}^{5/2}} N_B b^2 \right] = 0$$

上式に, $z = a/2$, $d - z = (a + b)/2 - a/2 = b/2$ を代入すると

$$\frac{-3(a/2)}{(5a^2/4)^{5/2}} N_A a^2 + \frac{3(b/2)}{(5b^2/4)^{5/2}} N_B b^2 = 0$$

すなわち, $N_A/a^2 = N_B/b^2$ なる条件を得る。

- 【4】 軸対称の電流分布は $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = J_z(\rho) \mathbf{a}_z$ と与えられるので, 閉曲線 C で囲まれる曲面を S とするとき

$$I_{\text{net through } S} = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\rho J_z(\rho') \rho' d\rho' d\phi' = 2\pi \int_0^\rho J_z(\rho') \rho' d\rho'$$

式 (7.18) から

$$\mathbf{H} = H_\phi \mathbf{a}_\phi = \frac{I_{\text{net through } S}}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi = \left(\frac{1}{\rho} \int_0^\rho J_z(\rho') \rho' d\rho' \right) \mathbf{a}_\phi$$

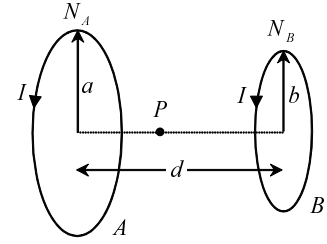
となり, 式 (7.19) が確認された。

- 【5】 z 軸を中心軸とするような半径 a の円筒表面を考える。閉曲線 C を z 軸に中心があり, xy 平面に平行な平面に存在する半径 ρ の円周とする。閉曲線 C に囲まれた曲面を S とする。
 $\rho < a$ のとき, $I_{\text{net through } S} = 0$ であるから, 式 (7.19) から

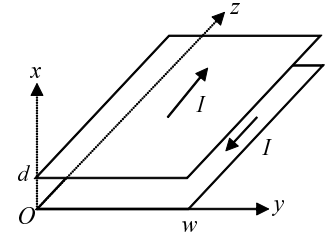
$$\mathbf{H} = \frac{I_{\text{net through } S}}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi = \mathbf{0}$$

$\rho > a$ のとき, $I_{\text{net through } S} = I$ であるから, 式 (7.19) から

$$\mathbf{H} = \frac{I_{\text{net through } S}}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$



- 【6】 $w \gg d$ であることから，無限長導体板は無限に広い導体板と考えてよい。したがって，例題 7.7 の結果をそれぞれの導体板に対して適用することができる。また，面電流密度の定義から， $x = d$ の導体面では $J_s = (I/w)a_z$ ， $x = 0$ の導体面では $J_s = -(I/w)a_z$ となる。



a) $x = d$ の導体板による磁界

$$x > d \text{ のとき } H_{top} = \frac{1}{2}J_s \times a_x = \frac{1}{2}\{(I/w)a_z\} \times a_x = \frac{I}{2w}a_y$$

$$x < d \text{ のとき } H_{top} = \frac{1}{2}J_s \times (-a_x) = \frac{1}{2}\{(I/w)a_z\} \times (-a_x) = -\frac{I}{2w}a_y$$

b) $x = 0$ の導体板による磁界

$$x > 0 \text{ のとき } H_{bottom} = \frac{1}{2}J_s \times a_x = \frac{1}{2}\{-(I/w)a_z\} \times a_x = -\frac{I}{2w}a_y$$

$$x < 0 \text{ のとき } H_{bottom} = \frac{1}{2}J_s \times (-a_x) = \frac{1}{2}\{-(I/w)a_z\} \times (-a_x) = \frac{I}{2w}a_y$$

以上をまとめると， $0 < x < d$ のとき

$$H = H_{top} + H_{bottom} = -\frac{I}{2w}a_y + \left(-\frac{I}{2w}a_y\right) = -\frac{I}{w}a_y$$

- 【7】 図 1.14 において， $d\rho, d\phi, dz$ を $\Delta\rho, \Delta\phi, \Delta z$ とみなす。

〔 ρ 成分〕閉曲線 ΔC_ρ として， $\rho = \text{一定}$ となる面の四辺形を考える。このとき，閉曲線 ΔC_ρ の向きは，この向きに右ねじをまわすときに右ねじが a_ρ の方向に進むように選ぶ。 ΔC_ρ を周囲とする四辺形の面積は

$$\Delta S_\rho = \int_z^{z+\Delta z} \int_\phi^{\phi+\Delta\phi} dS_\rho = \int_z^{z+\Delta z} \int_\phi^{\phi+\Delta\phi} \rho d\phi dz = \rho \Delta\phi \Delta z$$

ただし， $dS_\rho = |dS_\rho| = \rho d\phi dz$ とする（式 (1.38a) 参照）。このとき，式 (7.22) の線積分は

$$\oint_{\Delta C_\rho} A \cdot dr = \int_\phi A \cdot dr + \int_{z+\Delta z} A \cdot dr + \int_{\phi+\Delta\phi} A \cdot dr + \int_z A \cdot dr$$

により評価できる。閉曲線 ΔC_ρ は次の四つの辺を分解して考える。このときの線素に関する線積分を併せて計算しておく。

- $\phi = \text{一定}$: $dr = dr_z = dz a_z$, $\int_\phi dr = \int_{z+\Delta z}^z dz a_z = -\Delta z a_z$
- $z = \text{一定}$: $dr = dr_\phi = \rho d\phi a_\phi$, $\int_z dr = \int_\phi^{\phi+\Delta\phi} \rho d\phi a_\phi = \rho \Delta\phi a_\phi$
- $\phi + \Delta\phi = \text{一定}$: $dr = dr_z = dz a_z$, $\int_{\phi+\Delta\phi} dr = \int_z^{z+\Delta z} dz a_z = \Delta z a_z$
- $z + \Delta z = \text{一定}$: $dr = dr_\phi = \rho d\phi a_\phi$, $\int_{z+\Delta z} dr = \int_{\phi+\Delta\phi}^\phi \rho d\phi a_\phi = -\rho \Delta\phi a_\phi$

各辺は十分に短いので，各辺において A は定ベクトルとみなすことができる。

$$\begin{aligned} \int_\phi A \cdot dr + \int_{\phi+\Delta\phi} A \cdot dr &\cong A(\rho, \phi, z) \cdot \int_\phi dr + A(\rho, \phi + \Delta\phi, z) \cdot \int_{\phi+\Delta\phi} dr \\ &= A(\rho, \phi, z) \cdot (-\Delta z a_z) + A(\rho, \phi + \Delta\phi, z) \cdot (\Delta z a_z) \\ &= \frac{A_z(\rho, \phi + \Delta\phi, z) - A_z(\rho, \phi, z)}{\Delta\phi} \Delta\phi \Delta z \cong \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \rho \Delta\phi \Delta z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \Delta S_\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_z A \cdot dr + \int_{z+\Delta z} A \cdot dr &\doteq A(\rho, \phi, z) \cdot \int_z dr + A(\rho, \phi + \Delta\phi, z) \cdot \int_{z+\Delta z} dr \\ &= A(\rho, \phi, z) \cdot (-\rho\Delta\phi\mathbf{a}_\phi) + A(\rho, \phi, z + \Delta z) \cdot (-\rho\Delta\phi\mathbf{a}_\phi) \\ &= -\frac{A_\phi(\rho, \phi, z + \Delta z) - A_\phi(\rho, \phi, z)}{\Delta z} \rho\Delta\phi\Delta z \doteq -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} \rho\Delta\phi\Delta z = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} \Delta S_\rho \end{aligned}$$

式(7.22) から, $\nabla \times A$ の ρ 成分は

$$(\nabla \times A)_\rho = (\nabla \times A) \cdot \mathbf{a}_\rho = \lim_{\Delta S_\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_\rho} \oint_{\Delta C_\rho} A \cdot dr = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}$$

と与えられる。

〔 ϕ 成分〕閉曲線 ΔC_ϕ として, $\phi = \text{一定}$ となる面の四辺形を考える。このとき, 閉曲線 ΔC_ϕ の向きは, この向きに右ねじをまわすときに右ねじが \mathbf{a}_ϕ の方向に進むように選ぶ。 ΔC_ϕ を周囲とする四辺形の面積は

$$\Delta S_\phi = \int_z^{z+\Delta z} \int_\rho^{\rho+\Delta\rho} dS_\phi = \int_z^{z+\Delta z} \int_\rho^{\rho+\Delta\rho} d\rho dz = \Delta\rho\Delta z$$

ただし, $dS_\phi = |d\mathbf{S}_\phi| = d\rho dz$ とする (式(1.38b) 参照)。このとき, 式(7.22) の線積分は

$$\oint_{\Delta C_\rho} A \cdot dr = \int_\rho A \cdot dr + \int_{z+\Delta z} A \cdot dr + \int_{\rho+\Delta\rho} A \cdot dr + \int_z A \cdot dr$$

により評価できる。閉曲線 ΔC_ρ は次の四つの辺を分解して考える。このときの線素に関する線積分を併せて計算しておく。

- $\rho = \text{一定}$: $dr = dr_z = dz\mathbf{a}_z$, $\int_\rho dr = \int_z^{z+\Delta z} dz\mathbf{a}_z = \Delta z\mathbf{a}_z$
- $z + \Delta z = \text{一定}$: $dr = dr_\rho = d\rho\mathbf{a}_\rho$, $\int_{z+\Delta z} dr = \int_\rho^{\rho+\Delta\rho} d\rho\mathbf{a}_\rho = \Delta\rho\mathbf{a}_\rho$
- $\rho + \Delta\rho = \text{一定}$: $dr = dr_z = dz\mathbf{a}_z$, $\int_{\rho+\Delta\rho} dr = \int_{z+\Delta z}^z dz\mathbf{a}_z = -\Delta z\mathbf{a}_z$
- $z = \text{一定}$: $dr = dr_\rho = d\rho\mathbf{a}_\rho$, $\int_z dr = \int_{\rho+\Delta\rho}^\rho d\rho\mathbf{a}_\rho = -\Delta\rho\mathbf{a}_\rho$

各辺は十分に短いので, 各辺において A は定ベクトルとみなすことができる。

$$\begin{aligned} \int_{z+\Delta z} A \cdot dr + \int_z A \cdot dr &\doteq A(\rho, \phi, z + \Delta z) \cdot \int_{z+\Delta z} dr + A(\rho, \phi, z) \cdot \int_z dr \\ &= A(\rho, \phi, z + \Delta z) \cdot (\Delta\rho\mathbf{a}_\rho) + A(\rho, \phi, z) \cdot (-\Delta\rho\mathbf{a}_\rho) \\ &= \frac{A_\rho(\rho, \phi, z + \Delta z) - A_\rho(\rho, \phi, z)}{\Delta z} \Delta\rho\Delta z \doteq \frac{\partial A_\rho}{\partial z} \Delta\rho\Delta z = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} \Delta S_\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_\rho A \cdot dr + \int_{\rho+\Delta\rho} A \cdot dr &\doteq A(\rho, \phi, z) \cdot \int_\rho dr + A(\rho + \Delta\rho, \phi, z) \cdot \int_{\rho+\Delta\rho} dr \\ &= A(\rho, \phi, z) \cdot (\Delta z\mathbf{a}_z) + A(\rho + \Delta\rho, \phi, z) \cdot (-\Delta z\mathbf{a}_z) \\ &= -\frac{A_z(\rho + \Delta\rho, \phi, z) - A_z(\rho, \phi, z)}{\Delta\rho} \Delta\rho\Delta z \doteq -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \Delta\rho\Delta z = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \Delta S_\phi \end{aligned}$$

式(7.22) から, $\nabla \times A$ の ϕ 成分は

$$(\nabla \times A)_\phi = (\nabla \times A) \cdot \mathbf{a}_\phi = \lim_{\Delta S_\phi \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_\phi} \oint_{\Delta C_\phi} A \cdot dr = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$

と与えられる。

〔z成分〕閉曲線 ΔC_z として、 $z = \text{一定}$ となる面の四辺形を考える。このとき、閉曲線 ΔC_z の向きは、この向きに右ねじをまわすときに右ねじが a_z の方向に進むように選ぶ。 ΔC_z を周囲とする四辺形の面積は

$$\Delta S_z = \int_{\phi}^{\phi+\Delta\phi} \int_{\rho}^{\rho+\Delta\rho} dS_z = \int_{\phi}^{\phi+\Delta\phi} \int_{\rho}^{\rho+\Delta\rho} \rho d\rho d\phi = \rho\Delta\rho\Delta\phi$$

ただし、 $dS_z = |dS_z| = \rho d\rho d\phi$ とする（式 (1.38c) 参照）。このとき、式 (7.22) の線積分は

$$\oint_{\Delta C_z} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\rho} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\phi+\Delta\phi} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\rho+\Delta\rho} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\phi} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

により評価できる。閉曲線 ΔC_z は次の四つの辺を分解して考える。このときの線素に関する線積分を併せて計算しておく。

- $\rho = \text{一定}$: $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_{\phi} = \rho d\phi \mathbf{a}_{\phi}$, $\int_{\rho} d\mathbf{r} = \int_{\phi+\Delta\phi}^{\phi} \rho d\phi \mathbf{a}_{\phi} = -\rho\Delta\phi \mathbf{a}_{\phi}$
- $\phi + \Delta\phi = \text{一定}$: $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_{\rho} = d\rho \mathbf{a}_{\rho}$, $\int_{\phi+\Delta\phi} d\mathbf{r} = \int_{\rho+\Delta\rho}^{\rho} d\rho \mathbf{a}_{\rho} = -\Delta\rho \mathbf{a}_{\rho}$
- $\rho + \Delta\rho = \text{一定}$: $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_{\phi} = \rho d\phi \mathbf{a}_{\phi}$, $\int_{\rho+\Delta\rho} d\mathbf{r} = \int_{\phi}^{\phi+\Delta\phi} (\rho + \Delta\rho) d\phi \mathbf{a}_{\phi} = (\rho + \Delta\rho)\Delta\phi \mathbf{a}_{\phi}$
- $\phi = \text{一定}$: $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_{\rho} = d\rho \mathbf{a}_{\rho}$, $\int_{\phi} d\mathbf{r} = \int_{\rho}^{\rho+\Delta\rho} d\rho \mathbf{a}_{\rho} = \Delta\rho \mathbf{a}_{\rho}$

各辺は十分に短いので、各辺において \mathbf{A} は定ベクトルとみなすことができる。

$$\begin{aligned} \int_{\rho} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\rho+\Delta\rho} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &\cong \mathbf{A}(\rho, \phi, z) \cdot \int_{\rho} d\mathbf{r} + \mathbf{A}(\rho + \Delta\rho, \phi, z) \cdot \int_{\rho+\Delta\rho} d\mathbf{r} \\ &= \mathbf{A}(\rho, \phi, z) \cdot (-\rho\Delta\phi \mathbf{a}_{\phi}) + \mathbf{A}(\rho + \Delta\rho, \phi, z) \cdot \{(\rho + \Delta\rho)\Delta\phi \mathbf{a}_{\phi}\} \\ &= \frac{(\rho + \Delta\rho)A_{\phi}(\rho + \Delta\rho, \phi, z) - \rho A_{\phi}(\rho, \phi, z)}{\Delta\rho} \Delta\rho\Delta\phi \\ &\cong \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_{\phi}) \rho \Delta\rho\Delta\phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_{\phi}) \Delta S_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\phi+\Delta\phi} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\phi} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &\cong \mathbf{A}(\rho, \phi + \Delta\phi, z) \cdot \int_{\phi+\Delta\phi} d\mathbf{r} + \mathbf{A}(\rho, \phi, z) \cdot \int_{\phi} d\mathbf{r} \\ &= \mathbf{A}(\rho, \phi + \Delta\phi, z) \cdot (-\Delta\rho \mathbf{a}_{\rho}) + \mathbf{A}(\rho, \phi, z) \cdot (\Delta\rho \mathbf{a}_{\rho}) \\ &= -\frac{A_{\rho}(\rho, \phi + \Delta\phi, z) - A_{\rho}(\rho, \phi, z)}{\Delta\phi} \Delta\rho\Delta\phi \cong -\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_{\rho}}{\partial \phi} \rho \Delta\rho\Delta\phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_{\rho}}{\partial \phi} \Delta S_z \end{aligned}$$

式 (7.22) から、 $\nabla \times \mathbf{A}$ の z 成分は

$$(\nabla \times \mathbf{A})_z = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a}_z = \lim_{\Delta S_z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_z} \oint_{\Delta C_z} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_{\phi}) - \frac{\partial A_{\rho}}{\partial \phi} \right]$$

と与えられる。以上により、式 (7.23b) が確認された。 |

【8】 図 1.15 において、 $dr, d\theta, d\phi$ を $\Delta r, \Delta\theta, \Delta\phi$ とみなす。

〔r成分〕閉曲線 ΔC_r として、 $r = \text{一定}$ となる面の四辺形を考える。このとき、閉曲線 ΔC_r の向きは、この向きに右ねじをまわすときに右ねじが a_r の方向に進むように選ぶ。 ΔC_r を周囲とする四辺形の面積は

$$\Delta S_r = \int_{\phi}^{\phi+\Delta\phi} \int_{\theta}^{\theta+\Delta\theta} dS_r = \int_{\phi}^{\phi+\Delta\phi} \int_{\theta}^{\theta+\Delta\theta} r^2 \sin\theta d\theta d\phi \cong r^2 \sin\theta \Delta\theta \Delta\phi$$

ただし, $dS_r = |dS_r| = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ とする (式 (1.39a) 参照), このとき, 式 (7.22) の線積分は

$$\oint_{\Delta C_r} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\theta} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\phi} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\theta+\Delta\theta} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\phi+\Delta\phi} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

により評価できる。閉曲線 ΔC_r は次の四つの辺を分解して考える。このときの線素に関する線積分を併せて計算しておく。

- $\theta = \text{一定}$: $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_\phi = r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi$, $\int_{\theta} d\mathbf{r} = \int_{\phi+\Delta\phi}^{\phi} r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi = -r \sin \theta \Delta\phi \mathbf{a}_\phi$
- $\phi = \text{一定}$: $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_\theta = r d\theta \mathbf{a}_\theta$, $\int_{\phi} d\mathbf{r} = \int_{\theta}^{\theta+\Delta\theta} r d\theta \mathbf{a}_\theta = r \Delta\theta \mathbf{a}_\theta$
- $\theta + \Delta\theta = \text{一定}$: $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_\phi = r \sin(\theta + \Delta\theta) d\phi \mathbf{a}_\phi$, $\int_{\theta+\Delta\theta} d\mathbf{r} = \int_{\phi}^{\phi+\Delta\phi} r \sin(\theta + \Delta\theta) d\phi \mathbf{a}_\phi = r \sin(\theta + \Delta\theta) \Delta\phi \mathbf{a}_\phi$
- $\phi + \Delta\phi = \text{一定}$: $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_\theta = r d\theta \mathbf{a}_\theta$, $\int_{\phi+\Delta\phi} d\mathbf{r} = \int_{\theta+\Delta\theta}^{\theta} r d\theta \mathbf{a}_\theta = -r \Delta\theta \mathbf{a}_\theta$

各辺は十分に短いので, 各辺において \mathbf{A} は定ベクトルとみなすことができる。

$$\begin{aligned} \int_{\theta} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\theta+\Delta\theta} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &\doteq \mathbf{A}(r, \theta, \phi) \cdot \int_{\theta} d\mathbf{r} + \mathbf{A}(r, \theta + \Delta\theta, \phi) \cdot \int_{\theta+\Delta\theta} d\mathbf{r} \\ &= \mathbf{A}(r, \theta, \phi) \cdot (-r \sin \theta \Delta\phi \mathbf{a}_\phi) + \mathbf{A}(r, \theta + \Delta\theta, \phi) \cdot \{r \sin(\theta + \Delta\theta) \Delta\phi \mathbf{a}_\phi\} \\ &= \frac{\sin(\theta + \Delta\theta) A_\phi(r, \theta + \Delta\theta, \phi) - \sin \theta A_\phi(r, \theta, \phi)}{\Delta\theta} r \Delta\theta \Delta\phi \\ &\doteq \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) r^2 \sin \theta \Delta\theta \Delta\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) \Delta S_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\phi} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\phi+\Delta\phi} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &\doteq \mathbf{A}(r, \theta, \phi) \cdot \int_{\phi} d\mathbf{r} + \mathbf{A}(r, \theta, \phi + \Delta\phi) \cdot \int_{\phi+\Delta\phi} d\mathbf{r} \\ &= \mathbf{A}(r, \theta, \phi) \cdot (r \Delta\theta \mathbf{a}_\theta) + \mathbf{A}(r, \theta, \phi + \Delta\phi) \cdot (-r \Delta\theta \mathbf{a}_\theta) \\ &= -\frac{A_\theta(r, \theta, \phi + \Delta\phi) - A_\theta(r, \theta, \phi)}{\Delta\phi} r \Delta\theta \Delta\phi \\ &\doteq -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} r^2 \sin \theta \Delta\theta \Delta\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \Delta S_r \end{aligned}$$

式 (7.22) から, $\nabla \times \mathbf{A}$ の r 成分は

$$(\nabla \times \mathbf{A})_r = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a}_r = \lim_{\Delta S_r \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_r} \oint_{\Delta C_r} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right]$$

と与えられる。

〔 θ 成分〕閉曲線 ΔC_θ として, $\theta = \text{一定}$ となる面の四辺形を考える。このとき, 閉曲線 ΔC_θ の向きは, この向きに右ねじをまわすときに右ねじが \mathbf{a}_θ の方向に進むように選ぶ。 ΔC_θ を周囲とする四辺形の面積は

$$\Delta S_\theta = \int_{\phi}^{\phi+\Delta\phi} \int_r^{r+\Delta r} dS_\theta = \int_{\phi}^{\phi+\Delta\phi} \int_r^{r+\Delta r} r \sin \theta dr d\phi \doteq r \sin \theta \Delta r \Delta\phi$$

ただし, $dS_\theta = |dS_\theta| = d \sin \theta dr d\phi$ とする (式 (1.39b) 参照), このとき, 式 (7.22) の線積分は

$$\oint_{\Delta C_\theta} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_r \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\phi} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{r+\Delta r} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\phi+\Delta\phi} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

により評価できる。閉曲線 ΔC_θ は次の四つの辺を分解して考える。このときの線素に関する線積分を併せて計算しておく。

- $r = \text{一定} : dr = dr_\phi = r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi, \int_r dr = \int_\phi^{\phi+\Delta\phi} r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi = r \sin \theta \Delta\phi \mathbf{a}_\phi$
- $\phi = \text{一定} : dr = dr_r = dr_r, \int_\phi dr = \int_{r+\Delta r}^r dr_r = -\Delta r \mathbf{a}_r$
- $r + \Delta r = \text{一定} : dr = dr_\phi = r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi, \int_{r+\Delta r} dr = \int_{\phi+\Delta\phi}^\phi (r + \Delta r) \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi = -(r + \Delta r) \sin \theta \Delta\phi \mathbf{a}_\phi$
- $\phi + \Delta\phi = \text{一定} : dr = dr_r = dr_r, \int_{\phi+\Delta\phi} dr = \int_r^{r+\Delta r} dr_r = \Delta r \mathbf{a}_r$

各辺は十分に短いので、各辺において A は定ベクトルとみなすことができる。

$$\begin{aligned} \int_r A \cdot dr + \int_{r+\Delta r} A \cdot dr &\doteq A(r, \theta, \phi) \cdot \int_r dr + A(r + \Delta r, \theta, \phi) \cdot \int_{r+\Delta r} dr \\ &= A(r, \theta, \phi) \cdot (r \sin \theta \Delta\phi \mathbf{a}_\phi) + A(r + \Delta r, \theta, \phi) \cdot \{- (r + \Delta r) \sin \theta \Delta\phi \mathbf{a}_\phi\} \\ &= \frac{(r + \Delta r) A_\phi(r + \Delta r, \theta, \phi) - r A_\phi(r, \theta, \phi)}{\Delta r} \sin \theta \Delta r \Delta\phi \\ &\doteq -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) r \sin \theta \Delta r \Delta\phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \Delta S_\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_\phi A \cdot dr + \int_{\phi+\Delta\phi} A \cdot dr &\doteq A(r, \theta, \phi) \cdot \int_\phi dr + A(r, \theta, \phi + \Delta\phi) \cdot \int_{\phi+\Delta\phi} dr \\ &= A(r, \theta, \phi) \cdot (-\Delta r \mathbf{a}_r) + A(r, \theta, \phi + \Delta\phi) \cdot (\Delta r \mathbf{a}_r) \\ &= \frac{A_r(r, \theta, \phi + \Delta\phi) - A_r(r, \theta, \phi)}{\Delta\phi} \Delta r \Delta\phi \\ &\doteq \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} r \sin \theta \Delta r \Delta\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \Delta S_\theta \end{aligned}$$

式 (7.22) から、 $\nabla \times A$ の θ 成分は

$$(\nabla \times A)_\theta = (\nabla \times A) \cdot \mathbf{a}_\theta = \lim_{\Delta S_\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_\theta} \oint_{\Delta C_\theta} A \cdot dr = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right]$$

と与えられる。

[ϕ 成分] 閉曲線 ΔC_ϕ として、 $\phi = \text{一定}$ となる面の四辺形を考える。このとき、閉曲線 ΔC_ϕ の向きは、この向きに右ねじをまわすときに右ねじが \mathbf{a}_ϕ の方向に進むように選ぶ。 ΔC_ϕ を周囲とする四辺形の面積は

$$\Delta S_\phi = \int_\theta^{\theta+\Delta\theta} \int_r^{r+\Delta r} dS_\phi = \int_\theta^{\theta+\Delta\theta} \int_r^{r+\Delta r} r dr d\theta \doteq r \Delta r \Delta\theta$$

ただし、 $dS_\phi = |d\mathbf{S}_\phi| = r dr d\theta$ とする (式 (1.39c) 参照)。このとき、式 (7.22) の線積分は

$$\oint_{\Delta C_\phi} A \cdot dr = \int_r A \cdot dr + \int_\theta A \cdot dr + \int_{r+\Delta r} A \cdot dr + \int_{\theta+\Delta\theta} A \cdot dr$$

により評価できる。閉曲線 ΔC_ϕ は次の四つの辺を分解して考える。このときの線素に関する線積分を併せて計算しておく。

- $r = \text{一定} : dr = dr_\theta = rd\theta \mathbf{a}_\theta, \int_r dr = \int_\theta^{\theta+\Delta\theta} rd\theta \mathbf{a}_\theta = -r \Delta\theta \mathbf{a}_\theta$
- $\theta = \text{一定} : dr = dr_r = dr_r, \int_\theta dr = \int_r^{r+\Delta r} dr_r = \Delta r \mathbf{a}_r$
- $r + \Delta r = \text{一定} : dr = dr_\theta = rd\theta \mathbf{a}_\theta, \int_r dr = \int_\theta^{\theta+\Delta\theta} (r + \Delta r) d\theta \mathbf{a}_\theta = (r + \Delta r) \Delta\theta \mathbf{a}_\theta$

• $\theta + \Delta\theta = \text{一定} : dr = dr_r = dra_r, \int_{\theta} dr = \int_{r+\Delta r} dra_r = -\Delta ra_r$

各辺は十分に短いので、各辺において A は定ベクトルとみなすことができる。

$$\begin{aligned} \int_r A \cdot dr + \int_{r+\Delta r} A \cdot dr &\doteq A(r, \theta, \phi) \cdot \int_r dr + A(r + \Delta r, \theta, \phi) \cdot \int_{r+\Delta r} dr \\ &= A(r, \theta, \phi) \cdot (-r\Delta\theta a_\theta) + A(r + \Delta r, \theta, \phi) \cdot \{(r + \Delta r)\Delta\theta a_\theta\} \\ &= \frac{(r + \Delta r)A_\theta(r + \Delta r, \theta, \phi) - rA_\theta(r, \theta, \phi)}{\Delta r} \Delta r \Delta\theta \\ &\doteq \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_\theta) r \Delta r \Delta\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_\theta) \Delta S_\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\theta+\Delta\theta} A \cdot dr + \int_{\theta} A \cdot dr &\doteq A(r, \theta, \phi) \cdot \int_{\theta} dr + A(r, \theta + \Delta\theta, \phi) \cdot \int_{\theta+\Delta\theta} dr \\ &= A(r, \theta, \phi) \cdot (\Delta r a_r) + A(r, \theta + \Delta\theta, \phi) \cdot (-\Delta r a_r) \\ &= -\frac{A_r(r, \theta + \Delta\theta, \phi) - A_r(r, \theta, \phi)}{\Delta\theta} \Delta r \Delta\theta \\ &\doteq -\frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} r \Delta r \Delta\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \Delta S_\phi \end{aligned}$$

式 (7.22) から、 $\nabla \times A$ の ϕ 成分は

$$(\nabla \times A)_\phi = (\nabla \times A) \cdot a_\phi = \lim_{\Delta S_\phi \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_\phi} \oint_{\Delta C_\phi} A \cdot dr = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$$

と与えられる。以上により、式 (7.23c) が確認された。

【9】 (1) $B = \nabla \times A = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} a_\rho & \rho a_\phi & a_z \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\phi & \partial/\partial z \\ 0 & \rho(0) & A_z(\rho) \end{vmatrix} = -\frac{dA_z(\rho)}{d\rho} a_\phi$ であるから、 $B_\rho = 0, B_\phi = -\frac{dA_z(\rho)}{d\rho}, B_z = 0$

(2) $B_\phi = -\frac{dA_z(\rho)}{d\rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$ を ρ について積分すると、 $A_z(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \rho + C$ となる。ここで、 C は定数とする。よって

$$A = A_z(\rho) a_z = \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \rho + C \right) a_z$$

【10】 ポワソンの方程式 (4.36) の解は式 (4.37) で与えられることから、一般に、 $\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r})$ の解は $\varphi(\mathbf{r}) = \iiint_v \frac{f(\mathbf{r}')}{4\pi R} dv'$ で与えられる。ただし、 $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ とする。さて、式 (7.32) から

$$\begin{aligned} A(\mathbf{r}) &= A_x(\mathbf{r}) a_x + A_y(\mathbf{r}) a_y + A_z(\mathbf{r}) a_z \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \frac{J(\mathbf{r}')}{R} dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \frac{J_x(\mathbf{r}') a_x + J_y(\mathbf{r}') a_y + J_z(\mathbf{r}') a_z}{R} dv' \\ &= \left(\iiint_v \frac{\mu_0 J_x(\mathbf{r}')}{4\pi R} dv' \right) a_x + \left(\iiint_v \frac{\mu_0 J_y(\mathbf{r}')}{4\pi R} dv' \right) a_y + \left(\iiint_v \frac{\mu_0 J_z(\mathbf{r}')}{4\pi R} dv' \right) a_z \end{aligned}$$

成分を比較して

$$A_x(\mathbf{r}) = \iiint_v \frac{\mu_0 J_x(\mathbf{r}')}{4\pi R} dv', \quad A_y(\mathbf{r}) = \iiint_v \frac{\mu_0 J_y(\mathbf{r}')}{4\pi R} dv', \quad A_z(\mathbf{r}) = \iiint_v \frac{\mu_0 J_z(\mathbf{r}')}{4\pi R} dv'$$

これらは次の方程式を満足する。

$$\nabla^2 A_x(\mathbf{r}) = -\mu_0 J_x(\mathbf{r}), \quad \nabla^2 A_y(\mathbf{r}) = -\mu_0 J_y(\mathbf{r}), \quad \nabla^2 A_z(\mathbf{r}) = -\mu_0 J_z(\mathbf{r})$$

したがって、式 (B.10) より

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A} &= (\nabla^2 A_x) \mathbf{a}_x + (\nabla^2 A_y) \mathbf{a}_y + (\nabla^2 A_z) \mathbf{a}_z = (-\mu_0 J_x) \mathbf{a}_x + (-\mu_0 J_y) \mathbf{a}_y + (-\mu_0 J_z) \mathbf{a}_z \\ &= -\mu_0 (J_x \mathbf{a}_x + J_y \mathbf{a}_y + J_z \mathbf{a}_z) = -\mu_0 \mathbf{J}\end{aligned}$$

の関係が得られる。式 (B.23) から、 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ である。これに、クローンゲージ、すなわち、式 (7.33) の関係 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を代入する。これから

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\mu_0} \{ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \} = \frac{1}{\mu_0} \{ \nabla(0) - (-\mu_0 \mathbf{J}) \} = \mathbf{J}$$

を得る。 |

8 章

【1】 荷電粒子の速度を v とすると、ローレンツ力は $F = Qv \times B$ となり、この荷電粒子の運動方程式は

$$m \frac{dv}{dt} = Qv \times B$$

で与えられる。直角座標を用いると、この運動方程式は

$$m \frac{dv_x}{dt} = Q(v_y B_z - v_z B_y), \quad m \frac{dv_y}{dt} = Q(v_z B_x - v_x B_z), \quad m \frac{dv_z}{dt} = Q(v_x B_y - v_y B_x)$$

のように書ける。ここで、一般性を失うことなく、図に示すように、磁束密度の向きを x 軸に一致させ、 $B = B a_x$ ($B > 0$) とすると、運動方程式は

$$m \frac{dv_x}{dt} = 0 \tag{P.8.1}$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = Qv_z B \tag{P.8.2}$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = -Qv_y B \tag{P.8.3}$$

となる。時刻 $t = 0$ における初期条件を

$$v_x = 0, \quad v_y = v_0, \quad v_z = 0, \quad x = y = z = 0$$

とすると、まず、式 (P.8.1) から

$$v_x = 0, \quad x = 0$$

となり、荷電粒子の運動は yz 面内に限られる。次に、式 (P.8.2) を t に関して微分し、式 (P.8.3) を代入すると

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} + \left(\frac{QB}{m} \right)^2 v_y = 0 \tag{P.8.4}$$

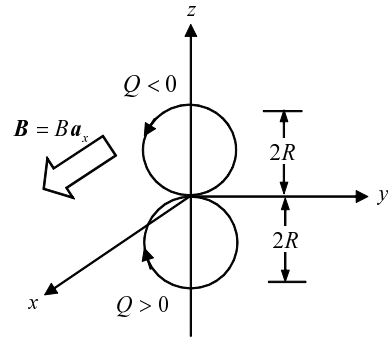
が得られる。式 (P.8.4) の解は、初期条件を考慮して

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \cos \omega_c t \tag{P.8.5}$$

$$y = \frac{v_0}{\omega_c} \sin \omega_c t \tag{P.8.6}$$

と求められる。ここで、 ω_c は

$$\omega_c = \frac{|Q|B}{m} \tag{P.8.7}$$



で与えられる。さらに、式 (P.8.5) を式 (P.8.2) に代入し、初期条件を考慮すると

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \mp v_0 \sin \omega_c t \tag{P.8.8}$$

$$z = \mp \frac{v_0}{\omega_c} (1 - \cos \omega_c t) \tag{P.8.9}$$

が得られる。ここで複号同順で、 $Q > 0$, $Q < 0$ に対してそれぞれ上段, 下段の符号を用いる。式 (P.8.6), (P.8.9) から、荷電粒子の軌跡が

$$y^2 + (z \pm R)^2 = R^2 \tag{P.8.10}$$

と求められる。ここで、 R は

$$R = \frac{v_0}{\omega_c} = \frac{mv_0}{|Q|B} \tag{P.8.11}$$

で与えられる。式 (P.8.6), (P.8.9), (P.8.10) からわかるように、荷電粒子は角速度 ω_c , 半径 R の等速円運動をする。これをサイクロトロン運動といい、 ω_c, R をそれぞれサイクロトロン角周波数, ラーモア半径という。また、式 (P.8.6), (P.8.9) からわかるように、荷電粒子は $Q > 0, Q < 0$ のそれぞれの場合、磁束密度に関して右ねじの関係と反対方向, 右ねじの関係にある方向に回転する。

【2】 電子の速度を v , 電荷量を $-e$ (e : 電気素量) とすると、電界 E , 磁束密度 B 中における電子の運動方程式は

$$m \frac{dv}{dt} = -e(E + v \times B)$$

で与えられる。ここで、一般性を失うことなく、図のように、磁束密度の向きを x 軸に一致させることができる。また、2枚の極板を $z = 0, d$ におき、極板間の電位差を V とすると、電界は

$$E = E_z a_z = -\frac{V}{d} a_z$$

となる。このとき、電子の運動方程式は

$$m \frac{dv_x}{dt} = 0 \tag{P.8.12}$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -ev_z B \tag{P.8.13}$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = e \frac{V}{d} + ev_y B \tag{P.8.14}$$

と書ける。時刻 $t = 0$ における初期条件を

$$v_x = v_y = v_z = 0, \quad x = y = z = 0$$

とすると、まず、式 (P.8.12) から

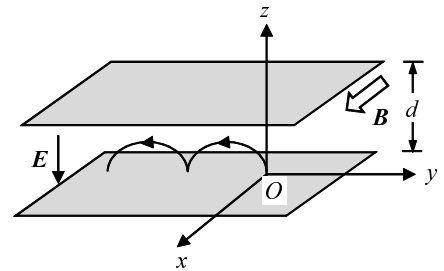
$$v_x = 0, \quad x = 0$$

となるので、電子の運動は yz 面内に限られる。次に、式 (P.8.14) を t で微分し、式 (P.8.13) を代入すると

$$\frac{d^2 v_z}{dt^2} + \omega_c^2 v_z = 0 \tag{P.8.15}$$

が得られる。ここで ω_c は

$$\omega_c = \frac{eB}{m} \tag{P.8.16}$$



で与えられる。式 (P.8.15) の解は、初期条件 ($t = 0$ で $v_z = 0$) を考慮すると、 $v_z = C \sin \omega_c t$ となる (C は定数)。これを式 (P.8.14) に代入すると

$$v_y = \frac{m}{eB} \frac{dv_z}{dt} - \frac{V}{Bd} = C \cos \omega_c t - \frac{V}{Bd}$$

初期条件 ($t = 0$ で $v_y = 0$) より $C = V/Bd = eV/\omega_c md$ となるので、 v_y, v_z は次のように与えられる。

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{eV}{\omega_c md} (\cos \omega_c t - 1) \tag{P.8.17}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{eV}{\omega_c md} \sin \omega_c t \tag{P.8.18}$$

さらに、初期条件 ($t = 0$ で $y = z = 0$) を考慮すると

$$y = \frac{eV}{\omega_c^2 md} (\sin \omega_c t - \omega_c t) \tag{P.8.19}$$

$$z = \frac{eV}{\omega_c^2 md} (1 - \cos \omega_c t) \tag{P.8.20}$$

とサイクロイドの軌跡が得られる。電子が陽極に達しないためには、 z の最大値 $z_{\max} = 2eV/\omega_c^2 md$ が極板間距離 d よりも小さくなる必要がある。 $z_{\max} = d$ となる磁界 H_c を臨界磁界といい

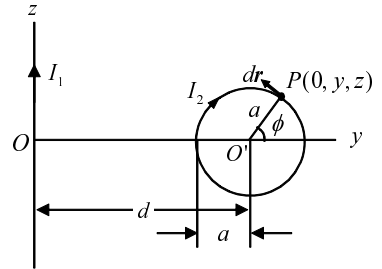
$$H_c = \frac{1}{\mu_0 d} \sqrt{\frac{2mV}{e}}$$

と求められる。電子は、式 (P.8.19), (P.8.20) に従い、図に示すように運動する。これをサイクロイド運動という。

【3】 図のように座標を設定する。図の点 P の位置に無限長直線電流 I_1 がつくる磁界は

$$\mathbf{H} = \frac{I_1}{2\pi(d + a \cos \phi)} (-\mathbf{a}_x)$$

となる。円電流 I_2 上の点 P (位置ベクトル $\mathbf{r} = d\mathbf{a}_y + a(\cos \phi \mathbf{a}_y + \sin \phi \mathbf{a}_z)$) における線素 $d\mathbf{r} = a(-\sin \phi \mathbf{a}_y + \cos \phi \mathbf{a}_z)d\phi$ に作用する力は



$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= I_2 d\mathbf{r} \times (\mu_0 \mathbf{H}) = I_2 a (-\sin \phi \mathbf{a}_y + \cos \phi \mathbf{a}_z) d\phi \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d + a \cos \phi)} (-\mathbf{a}_x) \\ &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{a(\cos \phi \mathbf{a}_y + \sin \phi \mathbf{a}_z)}{d + a \cos \phi} d\phi \end{aligned}$$

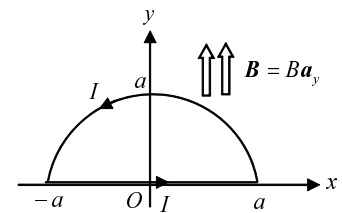
となるから、円電流全体に作用する力は、式 (C.7) を用いて

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{2\pi} \frac{a \cos \phi d\phi}{d + a \cos \phi} \mathbf{a}_y - \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{2\pi} \frac{a \sin \phi d\phi}{d + a \cos \phi} \mathbf{a}_z \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{d}{d + a \cos \phi}\right) d\phi \mathbf{a}_y + \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} [-\ln(d + a \cos \phi)]_0^{2\pi} \mathbf{a}_z \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left(2\pi - d \frac{2\pi}{\sqrt{d^2 - a^2}}\right) \mathbf{a}_y = \mu_0 I_1 I_2 \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 - a^2}}\right) \mathbf{a}_y \end{aligned}$$

となる ($I_1 I_2 > 0$ なら引力)

- 【 4 】 一様な磁束密度 B 内に、電流 I が流れている任意の形状のループに作用する力は $F = 0$ となることを利用する。さて、半円と直径はループを構成しているので、 $F_{\text{半円}} + F_{\text{直径}} = 0$ が成り立つ。これより

$$F_{\text{半円}} = -F_{\text{直径}} = -IL \times B = -I(2a\mathbf{a}_x) \times B\mathbf{a}_y = -2IaB\mathbf{a}_z$$



- 【 5 】 図 7.4 に示すように座標を選ぶ。円周上の点 $r = aa_\rho$ における電流素片 $Idr = Iad\phi a_\phi$ に作用する力は

$$dF = Idr \times B = Iad\phi a_\phi \times B$$

であるから、この点におけるトルクは

$$\begin{aligned} dT &= \mathbf{r} \times dF = aa_\rho \times (Iad\phi a_\phi \times B) = Ia^2 d\phi a_\rho \times (a_\phi \times B) \\ &= Ia^2 d\phi [(a_\rho \cdot B)a_\phi - (a_\rho \cdot a_\phi)B] = Ia^2 d\phi (B \cdot a_\rho)a_\phi \end{aligned}$$

となる。ここで

$$B \cdot a_\rho = (B_x a_x + B_y a_y + B_z a_z) \cdot (\cos \phi a_x + \sin \phi a_y) = B_x \cos \phi + B_y \sin \phi$$

であるから

$$\begin{aligned} dT &= Ia^2 d\phi (B_x \cos \phi + B_y \sin \phi)(-\sin \phi a_x + \cos \phi a_y) \\ &= Ia^2 (-B_x \cos \phi \sin \phi - B_y \sin^2 \phi) d\phi a_x + Ia^2 (B_x \cos^2 \phi + B_y \sin \phi \cos \phi) d\phi a_y \end{aligned}$$

となる。したがって、円形ループ電流全体では

$$\begin{aligned} T &= \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} dT \\ &= Ia^2 \int_0^{2\pi} (-B_x \cos \phi \sin \phi - B_y \sin^2 \phi) d\phi a_x + Ia^2 \int_0^{2\pi} (B_x \cos^2 \phi + B_y \sin \phi \cos \phi) d\phi a_y \\ &= Ia^2 \pi (-B_y a_x + B_x a_y) = I(\pi a^2) a_z \times B = IS \times B = \mathbf{m} \times B \end{aligned}$$

となる。

- 【 6 】 図のように z 軸を選ぶと、例題 7.4 の結果から、無限長ソレノイド内の磁束密度は

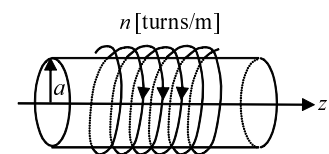
$$B = \mu_0 n I a_z$$

となる。単位長あたりの鎖交数は n に等しいので、 S をコイル断面として、単位長あたりの鎖交磁束は次のように与えられる。

$$\Lambda = n\Phi = n \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_z dS = \mu_0 n^2 I \iint_S dS = \mu_0 n^2 I \cdot \pi a^2$$

これより、単位長あたりの自己インダクタンスは次で与えられる。

$$L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{n\Phi}{I} = \mu_0 n^2 \cdot \pi a^2$$



- 【 7 】 例題 7.9 から、コイル内部には $B = \frac{\mu NI}{2\pi\rho} a_\phi$ の磁束密度が生じる。断面 S を通過する磁束 Φ は

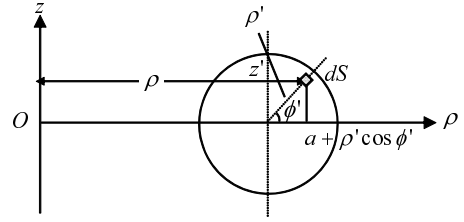
$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_\phi dS = \iint_S \frac{\mu NI}{2\pi\rho} a_\phi \cdot a_\phi dS = \frac{\mu NI}{2\pi} \iint_S \frac{dS}{\rho}$$

となる。 $\rho = a$ を原点とする極座標 (ρ', ϕ') を導入すると

$$\rho = a + \rho' \cos \phi', \quad dS = \rho' d\rho' d\phi'$$

となるので

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\mu NI}{2\pi} \int_0^b \int_0^{2\pi} \frac{\rho' d\phi' d\rho'}{a + \rho' \cos \phi'} \\ &= \frac{\mu NI}{2\pi} \int_0^b \left[\int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{a + \rho' \cos \phi'} \right] \rho' d\rho' \\ &= \frac{\mu NI}{2\pi} \int_0^b \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - \rho'^2}} \rho' d\rho' = \mu NI \int_0^b \frac{\rho' d\rho'}{\sqrt{a^2 - \rho'^2}} = \mu NI \left[-\sqrt{a^2 - \rho'^2} \right]_0^b = \mu NI(a - \sqrt{a^2 - b^2}) \end{aligned}$$



ここで、式 (C.7) を利用した。コイルの巻き数は N なので、鎖交磁束は $\Lambda = N\Phi$ となる。したがって、自己インダクタンスは

$$L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{N\Phi}{I} = \mu N^2(a - \sqrt{a^2 - b^2})$$

となる。

- 【8】有限長ソレノイド内の磁束密度は、 $l_1 \gg a_1$ なので、ほぼ一様であって、 $B = (\mu_0 N_1 I_1 / l_1) a_z$ となる。ソレノイド内に図に示すようにおかれた円形コイルの断面 S を通過する磁束は

$$\Phi_{21} = \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_n dS = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l_1} \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_n \iint_S dS = \frac{\mu_0 N_1 I_1 \cos \theta}{l_1} \pi a_2^2$$

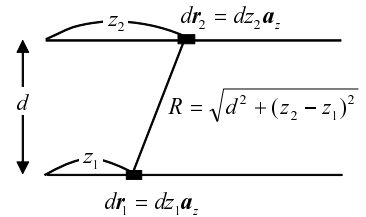
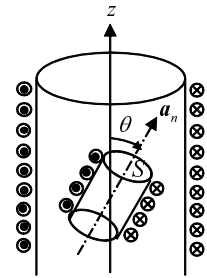
となる。円形コイルの巻き数は N_2 であるから、このコイルの鎖交磁束は $\Lambda_{21} = N_2 \Phi_{21}$ と与えられる。これより、相互インダクタンスは

$$M = \frac{\Lambda_{21}}{I_1} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi a_2^2 N_1 N_2 \cos \theta}{l_1}$$

となる。

- 【9】右図に示す構造に対してノイマンの公式を適用する。

$$\begin{aligned} M &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^l dz_1 \int_0^l dz_2 \frac{1}{\sqrt{d^2 + (z_2 - z_1)^2}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^l \ln \left[(z_2 - z_1) + \sqrt{d^2 + (z_2 - z_1)^2} \right]_0^l dz_1 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^l \left\{ \ln \left[(l - z_1) + \sqrt{d^2 + (l - z_1)^2} \right] - \ln \left[-z_1 + \sqrt{d^2 + z_1^2} \right] \right\} dz_1 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^l \left\{ \ln \frac{-d^2}{(l - z_1) - \sqrt{d^2 + (l - z_1)^2}} - \ln \frac{-d^2}{-z_1 - \sqrt{d^2 + z_1^2}} \right\} dz_1 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^l \left\{ \ln \left[z_1 + \sqrt{d^2 + z_1^2} \right] - \ln \left[(z_1 - l) + \sqrt{d^2 + (z_1 - l)^2} \right] \right\} dz_1 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \left[z_1 \ln \left[z_1 + \sqrt{d^2 + z_1^2} \right] - \sqrt{d^2 + z_1^2} \right]_0^l \right. \\ &\quad \left. - \left[(z_1 - l) \ln \left[(z_1 - l) + \sqrt{d^2 + (z_1 - l)^2} \right] - \sqrt{d^2 + (z_1 - l)^2} \right]_0^l \right\} \end{aligned} \tag{P.8.21}$$



$$= \dots = \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ l \ln \frac{\sqrt{d^2 + l^2} + l}{d} - \sqrt{d^2 + l^2} + d \right\}$$

$d/l \ll 1$ のとき

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left\{ \ln \frac{l}{d} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{d}{l}\right)^2} + 1 \right) - \sqrt{1 + \left(\frac{d}{l}\right)^2} + \frac{d}{l} \right\} \doteq \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{2l}{d} - 1 \right)$$

〔注〕式 (P.8.21) の積分計算

$$\begin{aligned} \text{Int.} &= \int \ln \left[(z_1 - l) + \sqrt{d^2 + (z_1 - l)^2} \right] dz_1 \\ &= (z_1 - l) \ln \left[(z_1 - l) + \sqrt{d^2 + (z_1 - l)^2} \right] - \int (z_1 - l) \frac{1 + (z_1 - l) / \sqrt{d^2 + (z_1 - l)^2}}{(z_1 - l) + \sqrt{d^2 + (z_1 - l)^2}} dz_1 \\ &= (z_1 - l) \ln \left[(z_1 - l) + \sqrt{d^2 + (z_1 - l)^2} \right] - \int \frac{z_1 - l}{\sqrt{d^2 + (z_1 - l)^2}} dz_1 \\ &= (z_1 - l) \ln \left[(z_1 - l) + \sqrt{d^2 + (z_1 - l)^2} \right] - \sqrt{d^2 + (z_1 - l)^2} \end{aligned}$$

【10】 図のように座標系を選ぶと、直線状電流 I が円形コイル内の点 P につくる磁束密度は

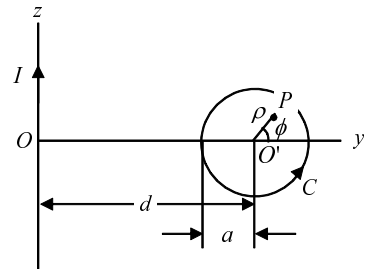
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(d + \rho \cos \phi)} (-\mathbf{a}_x)$$

であって、円形コイルとの鎖交磁束は、円形コイル断面を S として

$$\begin{aligned} \Lambda &= \iint_S \mathbf{B} \cdot (-\mathbf{a}_x) dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{d + \rho \cos \phi} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^a \frac{2\pi}{\sqrt{d^2 - \rho^2}} \rho d\rho = \mu_0 I \int_0^a \frac{\rho}{\sqrt{d^2 - \rho^2}} d\rho = \mu_0 I \left[-\sqrt{d^2 - \rho^2} \right]_0^a = \mu_0 I (d - \sqrt{d^2 - a^2}) \end{aligned}$$

となる。 ϕ に関する積分計算は式 (C.7) を利用した。したがって、相互インダクタンスは次のようになる。

$$M = \frac{\Lambda}{I} = \mu_0 (d - \sqrt{d^2 - a^2})$$



9章

【1】 鎖交磁束は $\Lambda = N\Phi = N\Phi_0 \sin \omega t$ であるから、コイル内に発生する起電力 V_e は、ファラデーの法則より、次のようになる。

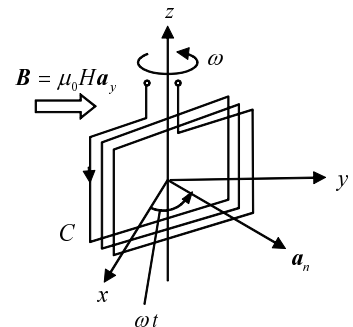
$$V_e = -\frac{d\Lambda}{dt} = -N\Phi_0 \omega \cos \omega t$$

【2】 コイルの回転軸を z 軸に取り、 y 方向に磁束密度 $\mathbf{B} = \mu_0 H \mathbf{a}_y$ ($H > 0$) を仮定する。時刻 $t = 0$ でのコイルが yz 面にあるものとする。時刻 t におけるコイルの面 S の面積ベクトルの方向 \mathbf{a}_n は、ループ C に関して右ねじの関係にある面 S 上の単位法線ベクトルであって

$$\mathbf{a}_n = \cos \omega t \mathbf{a}_x + \sin \omega t \mathbf{a}_y$$

と与えられる。時刻 t でコイルの面 S を通過する磁束 Φ は

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_n dS = \iint_S (\mu_0 H \mathbf{a}_y) \cdot (\cos \omega t \mathbf{a}_x + \sin \omega t \mathbf{a}_y) dS$$



$$= \mu_0 H \sin \omega t \iint_S dS = \mu_0 H S \sin \omega t$$

と与えられる。コイルの巻き数は N であるから、鎖交磁束は

$$\Lambda = N\Phi = N\mu_0 H S \sin \omega t$$

となり、ファラデーの法則から、誘導起電力は

$$V_e = -\frac{d\Lambda}{dt} = -N\mu_0 H S \omega \cos \omega t$$

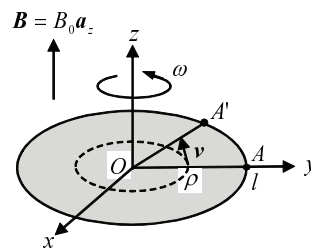
と求められる。

- 【3】円板を xy 面におき、その中心を原点 O に一致させ、 z 方向に磁束密度 $B = B_0 a_z$ をかける。導体 OA の $\rho = \rho$ の部分の速度は $v = \rho \omega a_\phi$ と与えられるので、この部分での誘導電界は

$$E = v \times B = (\rho \omega a_\phi) \times (B_0 a_z) = \omega B_0 \rho a_\rho$$

したがって、 OA 間の誘導起電力は

$$\begin{aligned} V_e &= \int_A^O E \cdot dr = \int_l^0 (\omega B_0 \rho a_\rho) \cdot (d\rho a_\rho) = \omega B_0 \int_l^0 \rho d\rho \\ &= -\frac{1}{2} \omega B_0 l^2 \end{aligned}$$



- 【4】ファラデーの電磁誘導の法則の積分形

$$\oint_C E \cdot dr = - \iint_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS \tag{P.9.1}$$

に基づいて考える。閉経路 C として、 z 軸に中心があつて、 xy 平面に平行な半径 ρ の円周を選ぶ。与えられた磁束密度 B の軸対称性から、電界は $E = E_\phi a_\phi$ とおく (E_ϕ は ϕ に無関係)。このとき、式 (P.9.1) の左辺の線積分は

$$\oint_C E \cdot dr = \int_0^{2\pi} (E_\phi a_\phi) \cdot (d\rho a_\rho + \rho d\phi a_\phi + dz a_z) = \int_0^{2\pi} E_\phi \rho d\phi = E_\phi \rho \int_0^{2\pi} d\phi = E_\phi \cdot 2\pi\rho$$

となる。

a) $\rho \leq a$ のとき：式 (P.9.1) の右辺の面積分は、

$$\begin{aligned} - \iint_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS &= - \int_0^{2\pi} \int_0^\rho (\omega B_0 \cos \omega t a_z) \cdot (a_z \rho d\rho d\phi) = -\omega B_0 \cos \omega t \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\rho \rho d\rho \\ &= -\omega B_0 \cos \omega t \cdot 2\pi \cdot \frac{\rho^2}{2} = -\omega B_0 \cos \omega t \cdot \pi\rho^2 \end{aligned}$$

であるから、式 (P.9.1) より

$$E_\phi \cdot 2\pi\rho = -\omega B_0 \cos \omega t \cdot \pi\rho^2$$

となるので

$$E = E_\phi a_\phi = -\frac{\omega B_0 \cos \omega t}{2} \rho a_\phi$$

b) $\rho > a$ のとき：式 (P.9.1) の右辺の面積分は、 $\rho > a$ において $\partial B/\partial t = 0$ なので

$$\begin{aligned} - \iint_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS &= - \int_0^{2\pi} \int_0^a (\omega B_0 \cos \omega t a_z) \cdot (a_z \rho d\rho d\phi) = -\omega B_0 \cos \omega t \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \rho d\rho \\ &= -\omega B_0 \cos \omega t \cdot 2\pi \cdot \frac{a^2}{2} = -\omega B_0 \cos \omega t \cdot \pi a^2 \end{aligned}$$

であるから，式 (P.9.1) より

$$E_\phi \cdot 2\pi\rho = -\omega B_0 \cos \omega t \cdot \pi a^2$$

となるので

$$E = E_\phi \mathbf{a}_\phi = -\frac{\omega B_0 \cos \omega t a^2}{2\rho} \mathbf{a}_\phi$$

- 【5】 $\rho = \rho$ から $\rho + d\rho$ までの間の軸方向に単位長あたり蓄えられる磁気的エネルギーは， $B = \mu_0 H = \mu_0 H_\phi \mathbf{a}_\phi$ を仮定して

$$dW_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv \doteq \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} (2\pi\rho d\rho \cdot 1) = \mu_0 H_\phi^2 \pi\rho d\rho$$

と与えられる*1。例題 7.6 の結果を利用して，全磁気的エネルギーは

$$\begin{aligned} W_m &= \int_0^\infty \mu_0 H_\phi^2 \pi\rho d\rho = \int_0^a \mu_0 \left(\frac{I\rho}{2\pi a^2} \right)^2 \pi\rho d\rho + \int_a^b \mu_0 \left(\frac{I}{2\pi\rho} \right)^2 \pi\rho d\rho + \int_b^c \mu_0 \left(\frac{I}{2\pi\rho} \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2} \right)^2 \pi\rho d\rho \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a^4} \int_0^a \rho^3 d\rho + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi(c^2 - b^2)^2} \int_b^c \frac{(c^2 - \rho^2)^2}{\rho} d\rho \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a} + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left[\frac{c^4}{(c^2 - b^2)^2} \ln \frac{c}{b} - \frac{3c^2 - b^2}{4(c^2 - b^2)} \right] \end{aligned}$$

と計算される。したがって，単位長あたりの自己インダクタンスは次のようになる。

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} + \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{c^4}{(c^2 - b^2)^2} \ln \frac{c}{b} - \frac{3c^2 - b^2}{4(c^2 - b^2)} \right]$$

- 【6】 蓄積される磁気的エネルギーは，直線電流自身の自己インダクタンス L_{11} による寄与，円電流ループの自己インダクタンス L_{22} による寄与，直線電流と円電流との間の相互インダクタンス M による寄与の和で表される。

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 + M I_1 I_2$$

ここで， L_{11} ならびに L_{22} は d の関数でないことに注意して，直線電流と円電流との間に働く力は

$$\mathbf{F} = \nabla W_m = \frac{\partial M}{\partial d} I_1 I_2 \mathbf{a}_y$$

となる。ここで， \mathbf{a}_y は直線電流に垂直で円の中心を通る方向のうち d が大きくなる方向の単位ベクトルとする（図を描いてみよう）。8章の章末問題【10】の結果から， $M = \mu_0(d - \sqrt{d^2 - a^2})$ であるから

$$\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial d} [\mu_0(d - \sqrt{d^2 - a^2})] I_1 I_2 \mathbf{a}_y = \mu_0 I_1 I_2 \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 - a^2}} \right) \mathbf{a}_y$$

- 【7】 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ の発散を考える。恒等的に $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$ が成り立つから

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$$

ここで， ∇ は x, y, z に関連した微分演算子であって，時間微分 $\partial/\partial t$ と順序を入れ換えても構わない。よって， $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$ の関係を用いて

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D}) = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

となり，連続の式が導かれる。

*1 $d\rho \ll \rho$ と考え， $dv = (v + dv) - v = \pi(\rho + d\rho)^2 \cdot 1 - \pi\rho^2 \cdot 1 \doteq 2\pi\rho d\rho \cdot 1$ と近似。

【 8 】 マクスウェルの方程式は

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

である。これらの方程式とベクトル恒等式 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ を利用する。

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla(0) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} \\ &= \nabla \times \left(-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

ゆえに

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

を得る。これから、 $v = \pm 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ であることがわかる。 |

【 9 】 図 5.5 の境界に対して式 (9.57a) を適用する。5.2 節の〔条件 ① の証明〕において、 $\Delta h \rightarrow 0$ の極限の下で、式 (9.57a) の線積分 $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ は、 $(E_2 - E_1)a_t \Delta w$ となることが示されている。ここでは、式 (9.57a) の面積分 $-\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ を評価する。図 5.5 において、閉曲線 C で囲まれた曲面 S の法単位ベクトルは $\mathbf{a}_t \times \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_s$ である。曲面 S のうち領域 1 に含まれる部分を S_1 とし、領域 2 に含まれる部分を S_2 とするとき、それぞれの面積ベクトル $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ は

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_2 = \frac{\Delta w \Delta h}{2} \mathbf{a}_s$$

と与えられる。 S の面積 $\Delta w \Delta h$ は十分に小さいので、 $\Delta h \rightarrow 0$ の極限の下で

$$\begin{aligned} -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} &= -\iint_{S_1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ &\doteq -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \cdot \mathbf{S}_1 - \frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial t} \cdot \mathbf{S}_2 = -\frac{\Delta w \Delta h}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{a}_s \rightarrow 0 \end{aligned}$$

となる。したがって、式 (9.57a) より、 $(E_2 - E_1) \cdot \mathbf{a}_t \Delta w = 0$ を得る。スカラー三重積の公式 (B.4) から、 $(E_2 - E_1) \cdot \mathbf{a}_t = (E_2 - E_1) \cdot (\mathbf{a}_n \times \mathbf{a}_s) = \mathbf{a}_s \cdot \{\mathbf{a}_n \times (E_2 - E_1)\}$ 、すなわち、式 (9.58a) の関係が導かれる。 |

【 10 】 図 8.10 の境界に対して式 (9.57b) を適用する。8.6 節の〔条件 ① の証明〕において、 $\Delta h \rightarrow 0$ の極限の下で、式 (9.57b) の線積分 $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}$ は、 $(H_2 - H_1)a_t \Delta w$ となり、面積分 $\iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ は $J_s \cdot \mathbf{a}_s \Delta w$ となることが示されている。ここでは、式 (9.57b) の面積分 $\iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ を評価する。図 8.10 において、閉曲線 C で囲まれた曲面 S の法単位ベクトルは $\mathbf{a}_t \times \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_s$ である。曲面 S のうち領域 1 に含まれる部分を S_1 とし、領域 2 に含まれる部分を S_2 とするとき、それぞれの面積ベクトル $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ は

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_2 = \frac{\Delta w \Delta h}{2} \mathbf{a}_s$$

と与えられる。 S の面積 $\Delta w \Delta h$ は十分に小さいので、 $\Delta h \rightarrow 0$ の極限の下で

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_1} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ &\doteq \frac{\partial \mathbf{D}_1}{\partial t} \cdot \mathbf{S}_1 + \frac{\partial \mathbf{D}_2}{\partial t} \cdot \mathbf{S}_2 = \frac{\Delta w \Delta h}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{D}_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{D}_2}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{a}_s \rightarrow 0 \end{aligned}$$

となる。したがって、式 (9.57a) より、 $(H_2 - H_1) \cdot \mathbf{a}_t \Delta w = J_s \cdot \mathbf{a}_s \Delta w$ の関係が得られるので、8.6 節の〔条件 ① の証明〕と同様にして、式 (9.58b) が導かれる。 |

10 章

【 1 】

$$\begin{aligned} \langle W_e \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\iiint_v \frac{\epsilon}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv \right] dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\iiint_v \frac{\epsilon}{2} \operatorname{Re} [\tilde{\mathbf{E}} e^{j\omega t}] \cdot \operatorname{Re} [\tilde{\mathbf{E}} e^{j\omega t}] dv \right] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\iiint_v \frac{\epsilon}{2} \frac{\tilde{\mathbf{E}} e^{j\omega t} + \tilde{\mathbf{E}}^* e^{-j\omega t}}{2} \cdot \frac{\tilde{\mathbf{E}} e^{j\omega t} + \tilde{\mathbf{E}}^* e^{-j\omega t}}{2} dv \right] dt \\ &= \frac{1}{8T} \int_0^T \left[\iiint_v \epsilon (2\tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} e^{j2\omega t} + \tilde{\mathbf{E}}^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}^* e^{-j2\omega t}) dv \right] dt \\ &= \iiint_v \frac{\epsilon}{8} \left[\frac{1}{T} \int_0^T (2\tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} e^{j2\omega t} + \tilde{\mathbf{E}}^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}^* e^{-j2\omega t}) dt \right] dv = \iiint_v \frac{\epsilon}{4} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} dv \end{aligned}$$

同様に, $\langle W_m \rangle = \iiint_v \frac{\mu}{4} \tilde{\mathbf{H}} \cdot \tilde{\mathbf{H}}^* dv$, $\langle P_l \rangle = \iiint_v \frac{\sigma}{2} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^* dv$ と計算できる。

$$\begin{aligned} \langle P_s \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\iiint_v \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_0 dv \right] dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\iiint_v \operatorname{Re} [\tilde{\mathbf{E}} e^{j\omega t}] \cdot \operatorname{Re} [\tilde{\mathbf{J}}_0 e^{j\omega t}] dv \right] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\iiint_v \frac{\tilde{\mathbf{E}} e^{j\omega t} + \tilde{\mathbf{E}}^* e^{-j\omega t}}{2} \cdot \frac{\tilde{\mathbf{J}}_0 e^{j\omega t} + \tilde{\mathbf{J}}_0^* e^{-j\omega t}}{2} dv \right] dt \\ &= \frac{1}{4T} \int_0^T \left[\iiint_v (\tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{J}}_0 + \tilde{\mathbf{E}}^* \cdot \tilde{\mathbf{J}}_0 + \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{J}}_0 e^{j2\omega t} + \tilde{\mathbf{E}}^* \cdot \tilde{\mathbf{J}}_0^* e^{-j2\omega t}) dv \right] dt \\ &= \iiint_v \frac{1}{4} \left[\frac{1}{T} \int_0^T (\tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{J}}_0 + \tilde{\mathbf{E}}^* \cdot \tilde{\mathbf{J}}_0 + \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{J}}_0 e^{j2\omega t} + \tilde{\mathbf{E}}^* \cdot \tilde{\mathbf{J}}_0^* e^{-j2\omega t}) dt \right] dv = \iiint_v \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{J}}_0 \right] dv \end{aligned}$$

【 2 】 フェザー表示されたマクスウェルの回転方程式は

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\tilde{\mathbf{H}} \tag{P.10.1}$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{J}}_0 + \sigma\tilde{\mathbf{E}} + j\omega\epsilon\tilde{\mathbf{E}} \tag{P.10.2}$$

であり, これらを用いて複素ポインティングベクトル $\tilde{\mathbf{S}}_p = \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^* / 2$ を評価する。

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{S}}_p = \frac{1}{2} \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*) = \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{H}}^* \cdot \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}} \cdot \nabla \times \tilde{\mathbf{H}}^*] \tag{P.10.3}$$

上式で, 式 (P.10.2) の共役を取った式が必要であって

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}}^* = \tilde{\mathbf{J}}_0^* + \sigma\tilde{\mathbf{E}}^* - j\omega\epsilon\tilde{\mathbf{E}}^* \tag{P.10.4}$$

式 (P.10.3) に式 (P.10.1) と式 (P.10.4) を代入すると

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{S}}_p &= \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{H}}^* \cdot (-j\omega\mu\tilde{\mathbf{H}}) - \tilde{\mathbf{E}} \cdot (\tilde{\mathbf{J}}_0^* + \sigma\tilde{\mathbf{E}}^* - j\omega\epsilon\tilde{\mathbf{E}}^*)] \\ &= -2j\omega \left[\frac{1}{4} \mu \tilde{\mathbf{H}} \cdot \tilde{\mathbf{H}}^* - \frac{1}{4} \epsilon \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^* \right] - \frac{1}{2} \sigma \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^* - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{J}}_0^* \end{aligned}$$

上式の両辺を領域 v で体積分すると

$$\iiint_v \nabla \cdot \tilde{\mathbf{S}}_p dv = -2j\omega \left[\iiint_v \frac{1}{4} \mu \tilde{\mathbf{H}} \cdot \tilde{\mathbf{H}}^* dv - \iiint_v \frac{1}{4} \epsilon \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^* dv \right] - \iiint_v \frac{1}{2} \sigma \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^* dv - \iiint_v \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{J}}_0^* dv$$

となる。左辺にガウスの発散定理を, 右辺に 10 章の章末問題【 1 】の結果を用いると, 題意の複素ポインティング定理を得る。 ■

【 3 】 (1) $\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} = \nabla(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}) - \nabla \times (\nabla \times \tilde{\mathbf{E}})$, $\nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{k}$ (\mathbf{k} : 定ベクトル) 等のベクトル恒等式を利用する。

$$\begin{aligned} \nabla(e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) &= e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\nabla(-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) = -j\mathbf{k}e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} &= \nabla \cdot (\mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = \mathbf{E}_0 \cdot \nabla(e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = \mathbf{E}_0 \cdot (-j\mathbf{k}e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = -j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0)e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ \nabla(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}) &= \nabla\{-j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0)e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\} = -j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0)\nabla(e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = -j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0)(-j\mathbf{k}e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0)\mathbf{k}e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} &= \nabla \times (\mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = \nabla(e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \times \mathbf{E}_0 = (-j\mathbf{k}e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \times \mathbf{E}_0 = j(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{k})e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ \nabla \times (\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}) &= \nabla \times \{j(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{k})e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\} = j\nabla(e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \times (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{k}) = j(-j\mathbf{k}e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \times (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{k}) \\ &= \mathbf{k} \times (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{k})e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})\mathbf{E}_0 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0)\mathbf{k}\}e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \{k^2\mathbf{E}_0 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0)\mathbf{k}\}e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \end{aligned}$$

これから, $\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} + k^2 \tilde{\mathbf{E}} = -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0)\mathbf{k}e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \{k^2\mathbf{E}_0 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0)\mathbf{k}\}e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + k^2\mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ を得る。

(2) $0 = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} = -j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0)e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = -j(\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}})$ より, $\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0$ を得る。また

$$\tilde{\mathbf{H}} = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -\frac{1}{j\omega\mu} j(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{k})e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{k} \times (\mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}$$

と変形できる。

【 4 】 損失性媒質中における一様平面波は, 例えば

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}} &= E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{a}_x \\ \tilde{\mathbf{H}} &= \frac{E_0}{Z_w} e^{-\gamma z} \mathbf{a}_y \end{aligned}$$

と記述できるので, その複素ポインティングベクトルは

$$\tilde{\mathbf{S}}_p = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^* = \frac{1}{2} (E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{a}_x) \times \left(\frac{E_0}{Z_w} e^{-\gamma z} \mathbf{a}_y \right)^* = \frac{|E_0|^2}{2Z_w^*} |e^{-\gamma z}|^2 \mathbf{a}_z$$

となる。ここで, $e^{-\gamma z} = e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$ より, $|e^{-\gamma z}|^2 = e^{-2\alpha z}$ となるから

$$\tilde{\mathbf{S}}_p = \frac{|E_0|^2}{2Z_w^*} e^{-2\alpha z} \mathbf{a}_z$$

を得る。このように, 損失媒質中では, 平面電磁波は伝搬方向に対して指数関数的に減衰する。

【 5 】 (1)

$$\begin{aligned} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \tilde{E}_x(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{d\tilde{E}_x(z)}{dz} \mathbf{a}_y = -jk_0 E_0 (e^{-jk_0 z} - \Gamma e^{jk_0 z}) \mathbf{a}_y \\ &= -j\omega\mu_0 \tilde{\mathbf{H}} = -j\omega\mu_0 H_0 (e^{-jk_0 z} - \Gamma e^{jk_0 z}) \mathbf{a}_y \end{aligned}$$

これから

$$k_0 E_0 = \omega\mu_0 H_0 \tag{P.10.5}$$

一方

$$\begin{aligned} \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & \tilde{H}_y(z) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{d\tilde{H}_y(z)}{dz} \mathbf{a}_x = jk_0 H_0 (e^{-jk_0 z} + \Gamma e^{jk_0 z}) \mathbf{a}_x \\ &= j\omega\varepsilon_0 \tilde{\mathbf{E}} = j\omega\varepsilon_0 E_0 (e^{-jk_0 z} + \Gamma e^{jk_0 z}) \mathbf{a}_x \end{aligned}$$

これから

$$k_0 H_0 = \omega\varepsilon_0 E_0 \tag{P.10.6}$$

式 (P.10.5) × 式 (P.10.6) より

$$k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

式 (P.10.5) / 式 (P.10.6) より

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^* \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} E_0 (e^{-jk_0 z} + \Gamma e^{jk_0 z}) \mathbf{a}_x \times H_0 (e^{jk_0 z} - \Gamma^* e^{-jk_0 z}) \mathbf{a}_y \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{E_0 H_0}{2} (1 - |\Gamma|^2 + \Gamma e^{j2k_0 z} - \Gamma^* e^{-j2k_0 z}) \mathbf{a}_z \right] = \frac{E_0 H_0 (1 - |\Gamma|^2)}{2} \mathbf{a}_z \end{aligned}$$