

モデリングとシミュレーション

—Octave による算法—

博士(工学) 平嶋 洋一 著

コロナ社

ま え が き

計算機上で仮想的に「もの」を動かして、現実の振舞いを知ることができれば、その手法はさまざまな局面で役に立つ。計算機は繰り返し作業を高速に実行することに特長があるシステムなので、これを生かす形で「もの」を動かすアルゴリズムを設計すれば、有効な計算機シミュレーションを実行することができる。

一方、「もの」を動かすアルゴリズムを与えるのはモデルである。モデルはさまざまな分野で「もの」の振舞いを抽出・模倣することを目的としているので特に計算機上で動かすことを意識した構造を持っているとは限らない。このため、モデリングとシミュレーションの手法を習得しようとする際には、「もの」が属する分野の知識、「もの」の動きを抽出する手法に加えて、計算機上で「もの」の動きを再現する手法を学ばなければならず、初学者にとってはかなり負荷のかかる作業を伴っていた。

ところが最近、計算機上で「もの」を動かす際に、設計者の負担を軽減する使い勝手の良いツールが複数開発され、手軽に高速な計算機を利用できる環境と相まって、計算機シミュレーションが初学者に対して学習の補助になり得る状況が生まれてきた。

本書は興味の対象である分野の知識を積み上げていく際に、計算機シミュレーションを活用することによって、理解を助けることを意図している。対象分野として、微分方程式で対象の振舞いを記述する連続システム、および振舞いに不確実な要素を含む離散システムを設定し、「試しに動かしてみる」環境を提供しようとするものである。本書執筆に関しては、株式会社イノコネの黒田規義氏との議論から企画のアイデアが立ち上がった。その後、相当に長い時間を費やして、原稿作成を開始したものの、タイトなスケジュールの中で作業は進ま

ず、遅れに遅れてようやく完成に至った経緯がある。その間、コロナ社の皆さんには大変お世話になった。

最後に、家族の時間の中から多くを提供してくれた妻と子供たちに感謝したい。

2015年11月

著 者

目 次

1. はじめに

1.1 モデリングとシミュレーション	1
1.2 モデリングの概要	2
1.3 モデルの分類	3
1.4 シミュレーション	4
1.5 近似モデルの役割	5

2. Octaveの基礎

2.1 Octave とは	6
2.1.1 利用環境	6
2.1.2 Octave のインストール	7
2.2 Octave の利用法	9
2.2.1 定数	9
2.2.2 複数行にわたる記述	10
2.2.3 スカラの演算	10
2.2.4 変数と代入	11
2.2.5 比較	12
2.2.6 行列 (ベクトル)	13
2.2.7 データの生成と管理	15
2.2.8 関数	20

2.2.9	グラフの描画	27
2.2.10	論 理 式	32
2.2.11	if 文	33
2.2.12	switch 文	34
2.2.13	for 文	36
2.2.14	while 文	37
2.2.15	消 去	38

3. 連続システムのモデリングとシミュレーション

3.1	モデリング	39
3.1.1	数学モデル	39
3.1.2	モデルの記述	40
3.2	モデルの振舞い	42
3.2.1	変数分離形	42
3.2.2	定数変化法	44
3.2.3	m 階微分方程式 ($m \geq 2$)	49
3.2.4	ラプラス変換	58
3.2.5	伝達関数と安定性	68
3.3	シミュレーション	75
3.3.1	マス・ばね・ダンパシステムのモデリングとシミュレーション	75
3.3.2	RC 回路のモデリングとシミュレーション	90
3.3.3	RLC 回路のモデリングとシミュレーション	99
3.4	シミュレーションの方法 (微分方程式の数値解法)	107
3.4.1	オイラー法	108
3.4.2	ルンゲ・クッタ法	111
	章 末 問 題	116

4. 離散システムのモデリングとシミュレーション

4.1	離散システム	121
4.2	確率モデル	121
4.3	待ち行列によるシステム解析	123
4.3.1	待ち行列モデル	123
4.3.2	待ち行列の形態	126
4.3.3	ケンドール記号	127
4.3.4	システム解析	128
4.3.5	定常状態	135
4.4	確率分布	137
4.5	未知の確率分布に対するモデリング	146
4.6	シミュレーション	150
4.6.1	モンテカルロ法	150
4.6.2	標本平均	155
4.6.3	$M/M/1/\infty$ の実現	157
4.6.4	$M/M/2/\infty$ の実現	163
	章末問題	167
	付録	170
A.1	固有値と固有ベクトル	170
A.2	行列の対角化	175
	引用・参考文献	182
	章末問題解答	183
	索引	187

1 | はじめに

1.1 モデリングとシミュレーション

モデリングとシミュレーションの考え方はさまざまな分野に応用可能であり、その方法は最近の計算機の発達とともに急速に身近になりつつある。本書では、現実世界の事象を計算機上で模倣する仕組みをモデルと捉え、モデルを計算機上で動かす手段として計算機シミュレーションの方法や手順を紹介していく。

広い意味でのシミュレーションという言葉は模擬実験を指し、我々が興味を持っている対象に働きかけ、それによって生じる変化を観測する行為を指す。つまり、興味の対象が働きかけに対して変化を生じることを前提として、「試しに動かしてみる」のである。そして、その後の変化の内容と働きかけとの因果関係を知ろうとする。この際、働きかけを行う対象は実物のこともあれば、実物の振舞いを模倣した「モデル」のこともある。

実物を「試しに動かす」ことが困難な場合にはモデルの利用を検討することになる。例えば実物を動かすことが危険を伴う場合や変化の観測に長い時間を必要とする場合などがこれにあたる。あるいは教育現場などで、実物を動かす前にその振舞いを観察・学習しておくことができれば便利である。ほかにもモデルが必要とされる場面は多数存在し、各場面で要求される内容に応じて、目的を達成するためのモデルが設計され、利用されてきた。

これらのうち、微分方程式で「変化」を記述する数学モデルや不確実性を含む振舞いに対し、その「傾向」を多数のデータから知ろうとする確率モデルな

どは計算機シミュレーションに適した形をしていたり，計算機シミュレーションに適した形で近似を行う方法が知られていた。ところが，こういった手法は計算量や繰返し回数が膨大であったり，扱う必要があるデータがあまりにも大きかったりしたために，手軽に利用できる場面が限られていた。近年はパーソナルコンピュータの高速化と低価格化によって，急速に事情が変わりつつある。一度に扱えるデータ量が大幅に増加していることに加え，ある程度の計算量や繰返し回数を，実用的時間内で実行するための計算機環境が，低コストで手に入るようになってきている。こうした事情を背景にして本書では，作成，実行ともに短時間でできる計算機シミュレーションを例示しながら解説を行う。

1.2 モデリングの概要

本書で扱うモデリングの対象は，入力に応じて，出力が変化するシステムである。我々が興味のあるシステムについて，現実のシステムの振舞いを模倣し，目的を達成するのに適したデータが得られるように設計するのがモデル，設計することがモデリングである。

目的は解析であったり制御であったり，教育や学習を含めてさまざまであり，目的とシステムの組合せに対応するために複数の種類のモデルが存在する。

モデリングの目標は，少なくとも必要最小限，興味の対象の動きを再現することである。簡潔なモデルから最小限の情報を抽出し，目標を達成することが必要な場合も多くある。

用語について以下にまとめておく。

モデル 実物を用いて，または計算機上で，シミュレーション（模擬実験）を行う際，対象の挙動を再現する システム のこと

システム 働きかけ によって 結果 が変化する もの
(入力) (出力) 興味の対象

モデリング モデルを作ること

モデリングの目的 興味の対象の動きを再現し、必要な情報を得ること

具体例：解析，制御，学習，教育など

目標 少なくとも必要最小限は、興味の対象の動きを再現すること

簡潔なモデルが必要な場合もある

1.3 モデルの分類

興味の対象であるシステムとモデリングの目的との組合せに応じて、モデルには多数の種類が存在するが、直接実験に利用するか否かで分類できる。実験モデルには、システムの実物を動かす実物モデルのほか、拡大または縮小したシステムを利用するスケールモデル、類似したシステムへの置換えを行う類推モデルがあり、いずれも実空間でシステムを動かす。

非実験モデルは連続システムモデルと離散システムモデルに大別でき、連続システムでは実験で用いるシステム（モデルを含む）の動きに基づく微分方程式で表されるモデルを用いる。また、離散システムモデルには、離散変化モデル、連続変化近似モデルがある。

本書では非実験モデルのうち連続システムモデルと離散変化モデル（確率モデル）を扱う。モデルの分類について以下にまとめておく。

実験モデル 実際の環境に近いモデルを実空間で動かす。

実物モデル 実物を動かす。

スケールモデル 縮小/拡大した実験装置を用いる。

類推モデル システムの置換えを行う。例：機械システム \Leftrightarrow ばね・ダンパシステム，電気システム \Leftrightarrow *RLC* 回路システムなど

非実験モデル 数学モデル

連続システムモデル 微分方程式を解く。

解析的手法として、変数分離形、同次方程式、非同次方程式の解法、階数降下法などがある。

数値的解法として、ルンゲ・クッタ法、ウィルソン法などがある。

離散システムモデル

離散変化モデル

連続変化近似モデル

1.4 シミュレーション

シミュレーションは対象システムの振舞い（動き）を知る一手段であり、例えば、実物モデルを「試しに」動かしてみる**実環境シミュレーション**、スケールモデルや類推モデルを用いた実験による物理シミュレーション、計算機上で数学モデルの計算を行う**計算機シミュレーション**などがある。いくつかのシミュレーションについて、特徴をまとめておく。

実環境シミュレーション 対象の正確な挙動が得られるが、リスク・コストが大きい対象に対して反復実施するには不向きである。

物理シミュレーション スケールモデル、類推モデルを用いた実験を含み、実システムによる実験からデータを得ることが困難な場合や、リスク・コストが大きい場合などに有効である。

計算機シミュレーション 数学モデルなどを用い、計算機上で行うシミュレーションであり、以下の利点を持つ。

- 設定の変更が容易
- 実時間に比べ、短時間で結果が確認可能
- 繰返しが容易
- 実験装置の作成が不要

1.5 近似モデルの役割

対象システムの挙動を詳細、正確に再現したモデルを**詳細モデル**と呼ぶ。モデリングの目的は、興味の対象であるシステムの動きを再現することであるから、詳細モデルがモデリングの目標であるともいえるが、シミュレーションを含めたモデリングの目的が何らかの問題解決である場合も多い。実システムが持つすべての情報が問題解決に必要なとは限らないので、詳細モデルから不要な情報を取り除いた近似モデルを利用することも考えられる。

特に、計算機シミュレーションでは、問題解決と無関係な要素に計算資源を消費するのは好ましくない。このため、問題解決のための必要最小限の情報を与える**近似モデル**を得ることが重要になる。具体的には、以下の点を明らかにすることにより簡素化を行う。

- シミュレーションの目的
- モデルの重要な挙動
- 挙動を決める重要な要素（パラメータ）
- 挙動に対して、必要な詳細度・精度

ひずんだサイコロ	151	母分散	156		
非同次方程式	44	母平均	156		
標本点	155				【よ】
標本平均	156				予定到着
——の分散	156				125
		【ま】			【ら】
		待ち行列	123		ラプラス変換
		——の基本形	128		58
		——の形態	126		乱数
		——の構成要素	123		147
【ふ】		待ち行列システム	123		ランダム到着
不確実性	121	待ち行列理論	123		125
物理シミュレーション	4	待ち時間制限	126		【り】
物理モデリング	39	待ち数制限	126		離散システムモデル
分布関数	147, 149				3
					離散変化モデル
					4
		【む】			リトルの公式
		無作為選択	127		128
【へ】					量子化
平均サービス時間	125				146
平均到着間隔	124	【も】			量子化間隔
平均到着率	124	モデリング	2		146
平衡状態	136	モデル	2		量子区間
ベルヌイ到着	125	モンテカルロ法	150		146
変数分離形	42				【る】
					類推モデル
					3
		【ゆ】			ルーレット選択
		優先選択	127		147
【ほ】					【れ】
ポアソン到着	124				連続システムモデル
ポアソン分布	124				3
妨害	126				連続変化近似モデル
					4

【A】		【I】		【S】	
axis	31	if	33	subplot	30
【B】		【L】		【Z】	
bar	31	linspace	22	zeros	21
【D】		【O】		~~~~~	
dir	24	Octave	7	【記号】	
【E】		Octave プロンプト	8	,	14
eig	174	ones	21	.	11
【F】		【P】		./	14
for	36	plot	27	;	18
				&	32
				&&	32

— 著者略歴 —

1991年 岡山大学工学部情報工学科卒業
1993年 京都大学大学院工学研究科修士課程修了（応用システム科学専攻）
1996年 京都大学大学院工学研究科博士課程修了（応用システム科学専攻）
博士（工学）
1997年 岡山大学助手
2006年 岡山大学講師
2007年 大阪工業大学准教授
現在に至る

モデリングとシミュレーション

— Octaveによる算法 —

Modeling and Simulation

— Arithmetic Using Octave —

© Yoichi Hirashima 2016

2016年1月12日 初版第1刷発行

★

検印省略

著者 ひら しま よう いち
平 嶋 洋 一
発行者 株式会社 コロナ社
代表者 牛来真也
印刷所 三美印刷株式会社

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844・電話 (03) 3941-3131 (代)

ホームページ <http://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-02499-9 (横尾) (製本: 愛千製本所)

Printed in Japan



本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられております。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めておりません。

落丁・乱丁本はお取替えいたします