

ま え が き

現在、弾性論ないしは弾性力学の著書は数多く見られるが、その多くが等方性弾性体を扱ったものであり、異方性弾性体を扱った著書はきわめて少ない。また、異方性を取り扱った著書であっても、直交異方性体だけに留まったものが多く、一般の異方性体の弾性論について詳しく言及した著書は僅少であると思われる。

異方性体の弾性論の著書では、レクニツキイ (S. G. Lekhnitskii)^{†1}とティン (T. C.-T. Ting)^{†2}の著書が有名である。ティンは、その著書の中で、異方性体の2次元弾性論はレクニツキイ流とストロー (A. N. Stroh) 流の大きく二つの方法に分けられると述べている。

本書は、おもにレクニツキイ流を踏襲しているが、4章で詳述するように、種-清水-平島の方法により、従来のレクニツキイの方法^{†3}より一般性のある優れた解法を提示し、いくつかの例題を取り上げて、その解法と特長を具体的に示している。

本書は、弾性係数マトリックスないしは弾性コンプライアンスが密な場合、すなわち、一般の異方性体に対する弾性論、その中でも特に面外せん断変形を詳しく取り上げた著書であり、わが国では類例を見ない著書になっているものと考えている。

2章では、モールの応力円およびひずみ円について類書より詳しい説明を加え、特に、他書ではほとんど取り上げられていない「極」を援用した解法について詳細な説明と例題を取り上げ、実用問題を図式的に解く際に役立ててもらえるよう配慮した。

†1 S. G. Lekhnitskii : Theory of elasticity of an anisotropic body, Mir Publishers (1981)

†2 T. C.-T. Ting : Anisotropic elasticity ; Theory and applications, Oxford University Press (1996)

†3 レクニツキイは2次元問題の定式化。

さて、最近では機械の性能向上を目的として、各種の繊維強化複合材料を初め、一方向凝固材や単結晶材料の高性能耐熱材料など、異方性の強い材料を積極的に機械部品に使用しようとする機会が多くなってきている。また、機械分野ばかりでなく、建築分野において強度材料としても使用されている木材、土木分野においてトンネルなどの建設でその変形挙動が解析対象となる岩盤、電気分野における圧電材料等々、広範な分野で異方性を有する材料の力学的解析が必要とされてきている。そこで本書では、まず4章までで異方性に着目した弾性論に関する基礎理論を著者らの解釈を交えてわかりやすく説明するよう努めた。それらの知識を基にして、5章では、機械はもとより、金属、土木、電気など、種々の分野での応用問題を取り上げ、広範な分野の技術者の役に立つよう配慮した。

本書を上梓するきっかけとなったのは、山梨大学名誉教授の故平島健一先生のご病気である。すでに5年前、先生は病の床に伏せられたが、それまでは精力的にご研究をなさられ、その合間の土日を使って先生の研究室の学生、OB および門外漢の私達を対象に、おもに外国の弾性論の教科書を使って輪講を開いてくださっていた。平島先生がご病床に伏せられているとき、どうしても復帰していただきたいとこれまでの輪講の成果の一部、とりわけ、先生のご専門の異方性弾性論の教科書を作成し、その経過を平島先生にご報告することにより、平島先生にそのお弟子さんたちの頑張っている姿をお見せし、生きる力をつけてもらおうと考えたことが本書上梓の端緒である。

あれから5年の歳月が流れ、平島先生はご家族のご看病の甲斐なく、誠に残念ながらお亡くなりになりましたが、このたびようやく本書の完成を見ることになりました。

筆者の一人である中曽根は、米国ノースウェスタン大学名誉教授の故村外志夫先生 (T. Mura ; 1925~2010) を介して平島先生と米国で知り合い、その後8年間ほど先生の輪講に参加させていただいた。その縁から今回、最年長者として本書作成のまとめ役をお引受けした次第である。

したがって、本書の作成にあたっては、章ないしは項ごとに執筆担当者を決めて、各章ないしは各項の草稿を作成し、すべての筆者が平島先生のご薫陶を

思い出しながら、たがいに同等な立場で誠心誠意議論を交わしつつ筆者全員の合意が得られるまで推敲を重ねた。このように本書の執筆には万全を期したつもりであるが、筆者らの力不足のために、誤謬や考え違い、記述の不備などがあるかもしれない。その場合は読者諸氏のご叱正やご指摘を賜り、本書をよりよいものとする事ができれば幸いである。

さて、本書は、以上のような経緯を経て上梓されたことから、まずは、筆者たちの共通の最も尊敬する師である村外志夫先生、平島健一先生に感謝申し上げるとともに進呈させていただきたいと思う。

また、2次元異方性問題の解法および等角写像に関してご教示を賜った株式会社ミラプロの清水秀樹博士、北九州工業高等専門学校准教授の種健先生、松江工業高等専門学校名誉教授の浜野浩幹先生、元群馬工業高等専門学校専攻科学生の野口敦史氏に衷心より感謝申し上げます。さらに、本書の作成に長い間協力をしてくださった筆者らの家族一同に対して心より感謝を申し上げます。

最後に、本書の原稿を長い間辛抱強く待って頂いたコロナ社の関係各位には心より御礼を申し上げます。

2014年2月

著者を代表して 中曾根 祐司

● 執筆分担一覧 ●

なかぞ ねゆうじ 中曾根祐司(東京理科大学,工学博士)	まえがき,1章,2.1節,2.3節, 5.1節,5.3節,5.4節
たなか すみお 田中 純夫(明治大学,博士(工学))	2.4.2項,2.6節,4章,付録A3
きむら きよかず 木村 清和(群馬工業高等専門学校,博士(工学))	2.4.1項,3.2節,5.2節
くろせ まさし 黒瀬 雅詞(群馬工業高等専門学校,博士(工学))	2.4.3項,3.1節
すずき たくお 鈴木 拓雄(東京都立産業技術高等専門学校,博士(工学))	5.5節
みやがわ むつみ 宮川 睦巳(東京都立産業技術高等専門学校,博士(工学))	2.4.3項,3.3.1項,付録A2
しむら じょう 志村 穰(東京工業高等専門学校,博士(工学))	2.2節,3.3.2項,付録A1
ささき とおる 佐々木 徹(長岡技術科学大学,博士(工学))	2.5節,5.5節

(所属は2014年1月現在)

目 次

1. 異方性弾性論とは

1.1 弾性論について	1
1.2 異方性とは	4
1.3 種々の異方性	5
1.4 弾性体モデルについて	6
1.5 計算の品質	7
引用・参考文献	8

2. 弾性体の基礎方程式

2.1 外力に抵抗する内力——応力——	10
2.2 変形の実扱い	16
2.2.1 変位ベクトルと変位勾配テンソル	16
2.2.2 ひずみテンソル	19
2.2.3 回転テンソル	24
2.2.4 変位勾配テンソルとひずみテンソルおよび回転テンソルの関係	26
2.3 つり合い方程式	27
2.4 主応力および主ひずみ	30
2.4.1 応力テンソルの座標変換と主応力	30
2.4.2 ひずみテンソルの座標変換と主ひずみ	41
2.4.3 モールの円	47
2.5 境界条件	69
2.6 ひずみの適合条件式	71
ま と め	73
引用・参考文献	74

3. 応力とひずみの関係

3.1 構成式 (弾性材料の応力とひずみの関係式).....	75
3.1.1 弾性係数テンソルの縮退.....	80
3.1.2 弾性ひずみエネルギーの性質による縮退.....	80
3.1.3 応力テンソルとひずみテンソルの対称性による縮退.....	81
3.2 弾性係数テンソルの座標変換.....	82
3.2.1 4階のテンソルとしての座標変換.....	82
3.2.2 フォークト表記を用いた場合の座標変換.....	83
3.3 代表的な異方性材料.....	85
3.3.1 結晶構造の対称性と弾性係数テンソルの異方性.....	86
3.3.2 実用材料の異方性.....	101
ま と め.....	108
引用・参考文献.....	109

4. 2次元弾性論の応力関数

4.1 2次元弾性論の問題.....	111
4.1.1 2次元弾性論の概要.....	111
4.1.2 面内問題と面外せん断問題.....	113
4.1.3 弾性コンプライアンスに関する仮定.....	117
4.2 2次元弾性論の基礎方程式.....	118
4.2.1 つり合い方程式.....	119
4.2.2 エアリーの応力関数とプラントル型応力関数.....	119
4.2.3 変位-ひずみ関係式.....	120
4.2.4 ひずみの適合条件式.....	120
4.2.5 境界条件.....	121
4.2.6 基礎方程式の解法.....	121
4.3 等方性材料の応力関数.....	123
4.3.1 面内問題.....	124
4.3.2 面外せん断問題.....	143
4.4 異方性材料の応力関数.....	150

4.4.1 面内問題	151
4.4.2 面外せん断問題	164
4.4.3 面外傾斜のある問題	170
ま と め	193
引用・参考文献	193

5. 種々の工学分野における解析事例

5.1 軸荷重および自重による異方性弾性体の棒の変形	195
5.2 異方性材料中のだ円孔による応力集中問題	199
5.2.1 等方性材料の場合	199
5.2.2 異方性材料の場合	210
5.3 異方性材料中のき裂による応力特異性の問題	221
5.3.1 等方性材料中の応力拡大係数	221
5.3.2 直異方性材料中の応力拡大係数	224
5.4 異方性弾性体中の直線転位	231
5.4.1 転位概説——結晶転位と連続体近似転位（等方性体の場合）——	231
5.4.2 異方性弾性体中の直線転位	235
5.5 圧電材料の力学への応用	247
5.5.1 圧電材料の力学と異方性材料の面内・面外連成問題とのアナロジー	247
5.5.2 圧電材料に対する応力、ひずみ、電気変位、および電界の表式	250
5.5.3 圧電材料中のだ円孔の応力集中問題	252
ま と め	257
引用・参考文献	259

付 録	261
-----	-----

A1 テンソルの概念	261
A2 回転対称性を有する結晶の弾性係数テンソル	264
A3 2次元弾性論に現れる線形同次偏微分方程式の解法	277

索 引	284
-----	-----

1.

異方性弾性論とは

1.1 弾性論について

物質に外力を加える（負荷する）と、物質は外力の大きさに応じて変形する。この物質から外力を減じる（除荷する）と、物質の変形は除荷する外力の大きさに応じて小さくなる。この除荷の際、外力を負荷した経路（負荷した外力の大きさと変形の大きさの関係を表す曲線）とまったく同じ経路をたどって物質の変形が小さくなり、外力を完全に取り去ったとき、物質の変形がなくなり、物質が完全に原形に戻ることがある。物質の持つこのような性質を**弾性**といい、弾性を有する物質を**弾性体**と呼ぶ。また、外力を受けた弾性体の変形について論じる学問を**弾性論**ないしは**弾性学**と呼ぶ。

この弾性に関しては、外力の大きさと変形の大きさの関係は必ずしも線形である必要はないが、両者の関係が線形の場合、すなわち、フックの法則または一般化フック則（3.1節）が成り立つ場合を特に**線形弾性**と呼び、両者の関係が非線形の場合を**非線形弾性**と呼ぶ。ただし、弾性状態が維持されるのは、一般に、変形が0.1%以下の小さい領域に限られる場合が多い。

ポアソン（S. D. Poisson; 1781~1840）、ナヴィエ（C. L. M. H. Navier; 1785~1836）らによるコーシー（A. L. Cauchy; 1789~1857）以前の弾性論では、弾性体内の分子間力を考えてつり合い方程式など、弾性論の基礎的な方程式が導かれた。ちなみに、ナヴィエが考えた弾性係数はただ一つであった。分子動力学を知る現代のわれわれにとっては、ナヴィエらの弾性論はきわめて先駆的であるかのような錯覚を覚えるが、当時は、質量を持つが、大きさのな

2 1. 異方性弾性論とは

い点（質点）の力学を対象にしていたニュートン力学の範囲内で弾性論を構成しようとしていたことを考え合わせれば、ナビエらのアプローチはむしろ古典力学的だったと考えられる^{1),2)†}。

これに対して、コーシーは分子間力の代わりにひずみと応力というそれまでにはない新しい考え方を導入して、現在の弾性論の基本的な理論のほとんどを見いだした²⁾。コーシーは、2.1 節で述べるように、外力に対する反力（後述するように単なる「力」ではない）として生じる弾性体内の内力、すなわち、応力は弾性体内に設定した任意の面への圧力で表されると仮定した。ただし、この場合の圧力は、静水圧とは異なり、面に垂直な成分だけではなく、面に平行な方向にも抵抗力を持つと考えた。面は自身への法線（3次元の場合、3個の座標で表される）で決定され、その面に働く力（応力）はたがいに独立な3個の成分を指定すれば定まるので、ある面に働く力である応力は合計9個の成分を持つことになる。ただし、面に平行な応力（せん断応力）成分については、モーメントのつり合いによる対称性があるので6個の成分のうち3個だけが独立となるため、結局、応力は6個の成分を持つことになる。コーシーはこの応力という新しい量をテンション（張力）にちなんで**テンソル**（tensor）と名付けた³⁾。コーシーは、また、方向によって異なる弾性変形挙動を示す異方性体について考察しており、最も一般的な異方性弾性体に対して弾性係数は21個あることを見いだした。しかし、同時に、そのうち6個は初期応力に関係するもので、真の弾性係数は15個であると誤った考えを示した²⁾。

異方性弾性体の弾性係数の個数については3章で詳しく論じるが、上述のように、弾性論誕生の当初からすでに異方性体の弾性論が議論されていたことがわかる。しかし、最も一般的な異方性弾性体を扱うためには最大で21個の弾性係数の値を知らなければならない。これだけ多くの弾性係数を実験的に決定するのは非常に手間がかかるし難しい。また、5.1 節で例示するように、21個の弾性係数を有する一般の異方性弾性体で作られた棒では、その長手方向に引張荷重をかけてもせん断変形が生じ、棒が曲がってしまう場合がある。このよ

† 肩付き数字は、章末の引用・参考文献の番号を表す。

うに、一般の異方性弾性体では、ある面に垂直な方向の変形（垂直ひずみ）とその面に平行な方向のせん断変形（せん断ひずみ）が相互に影響し合うことによって複雑な変形挙動をとる。このため、異方性弾性体を機械や構造物の部材として考えると、予期しなかった変形や極端な場合には破壊が生じるため、機械・構造物の設計が困難となることが容易に予想される。実際、繊維で強化したプラスチック（FRP; fiber reinforced plastics）では、繊維方向とそれに垂直な方向で変形挙動が異なるため、板状のFRPの繊維方向を変化させて、擬似的に等方的な変形となるように層状に積み重ねるなどの工夫をして使うことが多い⁴⁾。また、ガスタービンや飛行機のジェットエンジンに使用されるブレードでは、高温に耐えられる材料として一方向凝固合金や単結晶材料などが使用される場合がある。これらの材料は長手方向とその直角方向の変形挙動が異なる異方性を示すが、タービンブレードでは、長手方向に作用する遠心力が主要な力となるため、異方性は大きな問題とはならず、むしろより高温で使用できる材料が選択されることになる。

他方、機械や構造物の部材に使用されている金属材料は、数十 μm 程度の寸法の非常に多くの結晶で構成されている場合が多く、個々の結晶はその構造に特有な異方性を示す（3.3.1 項参照）。しかし、通常使用される大きさの部材として考えると、その部材は非常に多くの結晶の集合体となるため、個々の結晶の個性である異方性が相殺されて、全体として平均的な変形挙動をとるようになるため、どの方向にも同じような変形をし、引張ないしは圧縮変形とせん断変形の相互作用のない等方性体としての変形挙動を示すようになる。このような場合、すなわち、均質で等方的な部材の弾性論では、3.3 節で説明するように、考慮すべき弾性係数は2個だけ（多くの場合、ヤング率とポアソン比が採用される）となり、弾性計算がしやすく、したがって設計も容易となる。

ただし、均質・等方性体の弾性論についても解ける問題は限られている。現在の弾性論では、有限な大きさの2次元および3次元物体に対する理論解は限られた場合についてのみ求められているのが現状⁵⁾である。

ストロー（A. N. Stroh）流の異方性弾性論を拡張して3次元弾性問題を扱うことも可能であるが⁶⁾、本書の範囲を越えると考えられるため、本書では、

おもに、2次元問題を扱うことにする。

1.2 異方性とは

弾性的性質に関する異方性とは、弾性係数などで代表される弾性的性質に方向依存性があり、例えば、ある方向に引張った場合とそれとは異なる方向に引張った場合では伸び方が異なる性質をいう。異方性と似た用語で非均質性という用語がよく用いられるが、この非均質性とは、弾性的性質が材料の各部分で異なることをいう。例えば、繊維強化プラスチックでは、母材とその中に埋め込まれた繊維とでは弾性的性質がまったく異なるが、このような材料は非均質性を持つという。

ちなみに、最近、均質化法⁷⁾という、非均質性を持つ材料（非均質材料、非均質体と呼ばれる）を均質体とみなし、その変形挙動を巨視的的平均値として求める数値解析法が盛んになってきたが、この方法で求められる巨視的な弾性係数である均質化弾性係数は、異方性を示すものとなる場合が多い。

さて、ティン (T. C.-T. Ting) は、その著書⁶⁾で、異方性弾性体の2次元変形解析のほうが等方性弾性体の解析よりも単純であると主張している。その理由は、等方性弾性体は異方性弾性体の特別な場合であり、数学的にいえば「縮退された」材料で、「縮退された問題」は一般的に解くのに手間がかかるからであると述べている。その具体例として、 $y(x)$ に関する定数係数3階線形同次常微分方程式の解を挙げて説明している。すなわち、 $y(x)$ がすべて独立な解 $e^{k_i x}$ ($i=1, 2, 3$)を有する場合、一般解 $y(x)$ は

$$y(x) = \sum_{i=1}^3 c_i e^{k_i x} \quad (1.1)$$

で表される。ただし、 c_i 、 k_i は境界条件などで決定される定数である。

他方、「縮退された問題」、すなわち、例えば $k_2 = k_1 \neq k_3$ の場合、別途、定数変化法などの特別な工夫をして、次式右辺に示すような三つの独立な解を求めなければならない⁸⁾。

$$y(x) = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x} + c_3 e^{k_3 x} \quad (1.2)$$

式 (1.2) で表される「縮退された問題」の解は、式 (1.1) の解のように簡

潔に書き表すことはできない。4.4節および付録 A3で詳しく説明するが、上記と同様な違いが異方性弾性論と等方性弾性論の相違として現れる。すなわち、等方性弾性論は異方性弾性論の特別な場合として導かれるのではなく、異方性弾性論からは導くことのできない、まったく別の問題として考えなければならない。

ただし、解が簡潔に書けるからといって異方性弾性論問題が簡単に解けるということではない。解がわかっている場合には、一般的に、異方性弾性体のほうが等方性弾性体よりも解は単純な形をしているため求めやすいということだけであり、ティンは、異方性弾性体中の任意の形をした孔の応力集中問題を解くのは等方性弾性体の場合よりはるかに難しいという例を挙げている⁶⁾。

1.3 種々の異方性

異方性を有する代表的な材料を例示する。

- ・金属材料：ウイスキー、単結晶、一方向凝固材、圧延材、押出材、ODS (oxide dispersion strengthened) 合金、ナノクリスタル
 - ・有機材料：繊維強化プラスチック (FRP; fiber reinforced plastics)
 - ・生体材料：筋肉、皮膚、^{まさ} 桎目板、竹、木材、デルタ合板
 - ・無機材料：雲母板、重ねガラス、ガラス繊維強化樹脂、紙、コンクリート
- また、一般の結晶体については、その対称性に応じて表 1.1 のような 8 種類

表 1.1 異方性体の種類とそれに応じた独立な弾性係数の個数

異方性体	対称要素 (回転軸)	弾性係数
① 三斜晶 (triclinic materials)	回転軸なし	21 個
② 単斜晶 (monoclinic materials)	一つの 2 回回転軸	13 個
③ 直交異方性 (orthotropic materials)	三つの座標面が対称	9 個
④ 三方晶 (trigonal materials)	一つの 3 回回転軸	6 個または 7 個
⑤ 正方晶 (tetragonal materials)	一つの 4 回回転軸	6 個または 7 個
⑥ 横等方性 (transversely isotropic materials)	一つの 6 回回転軸	5 個
⑦ 立方晶 (cubic materials)	四つの 3 回回転軸	3 個
⑧ 等方性 (isotropic materials)	すべての回転軸に対して対称	2 個

の異方性体があり、その材料が有する独立な弾性係数の数も異なる（代表的な異方性弾性体については3.3節、また、回転対称性によって判別できる独立な弾性係数の数は3.3節および付録A2で詳しく説明する）。

等方性弾性体では独立な弾性係数は2個であるから、例えば、ヤング率（縦弾性係数）とポアソン比またはヤング率と横弾性係数等、任意の二つの弾性係数の組合せを用いれば、負荷荷重に対する部材の弾性変形挙動を計算することができる。あらかじめ部材の引張試験やデータベース検索などによって部材のヤング率やポアソン比を求めておけば、その部材を用いた強度設計が比較的容易にできる。

これに対して、直交異方性的弾性特性を示す繊維強化複合材料製平板では、その材料を用いた部材の弾性設計を行う場合、長手方向とそれと直角方向のヤング率とポアソン比の合計4個の弾性係数をあらかじめ知っておかなければならない。極端な場合、例えば、三斜晶の単結晶材料のように、最も一般的な異方性弾性体では、21個の異なる弾性係数の値を知らなければならず、実用上はこれらの弾性係数すべてを決定することは容易ではない。また、21個の弾性係数に律せられるこれらの材料の変形挙動は複雑なものとなるので、これらの材料を用いた機械や構造物の設計は事実上困難となる。その場合には、例えば、代表的な直交異方性材料である繊維強化複合材料で作られた板材を使用する場合のように、異方性を有する材料を積層するなど、方位（優先的な変形をする方向）の異なる材料を組み合わせ、その組合せ材全体の巨視的変形挙動が等方的になるよう工夫して実用に供することがある⁷⁾。

1.4 弾性体モデルについて

現在の科学・技術では、自然物をありのまま取り扱うことはできないので、実物を単純化し、「解析」しやすいようにしている。例えば、ニュートン力学において、地球と月の間に働く万有引力を求める場合、地球や月を、質量を持つが大きさのない質点として扱うといったように、地球と月そのものを扱うのではなく、2点間に働く引力を求めやすいように、実寸法としては巨大な地球

や月でも大きさのない点として扱う場合もある。また、現在の科学・技術では、因子間の相互作用はないか、あっても無視できるほど小さいと考える傾向も強く、第1次近似的な単純なモデルで理論を展開するが多い。

本書で扱う線形弾性体モデルもその例にもれず、多くの場合、因子間の相互作用は無視できるほど小さいとみなして、重ね合わせの原理が成り立つと仮定する。また、現象は準静的とし、動的問題を除いて、時間依存性なしと考えるのが一般的である。しかも、ひずみは $\varepsilon < 0.1\%$ 程度の微小変形を仮定していて、現実を考えればその適用範囲は狭い。そのうえ、境界条件なども単純化されているため実用に供することができないと考えられがちだが、得られる結果は非常に有用で、多くの場合実用に十分に耐え得る結果となっている。

現在よく使われている弾性論で扱える問題にはこのように制限が多く、解析対象も単純な形状の2次元物体に限定されることが多い。一方、近年の有限要素法（FEM）などの数値解析法の発展・普及に伴い、数値解析法による複雑な形状の3次元物体の弾性解析が盛んに行われるようになってきているが、この結果の妥当性を検証するには、弾性論を修得し、弾性体の変形挙動の基礎的理解をしておくことがますます重要となっている。また、数値解析法で得られる結果は計算した場合にしか適用できない、いわば局所的な情報しか得られないが、弾性論の結果は式として得られる場合が多いため、解析結果に与える因子の影響の見通しがよく、問題全体を俯瞰的に見渡せる大域的な情報が得られることが多い。

1.5 計算の品質

最近では、企業の生産現場においても、機械・構造物の強度設計には有限要素法などのCAE（computer-aided engineering；コンピュータの助けを借りた工学解析）ツールの活用が盛んになってきており、いわゆる“design by rule”（規則に準拠して行う設計）から“design by analysis”（解析に基づいて行う設計）への移行が盛んである。これまでの経験第一主義から、設計する製品に発生する応力や変形は、実物の形状を高い精度で近似したモデルを使っ

て計算できるようになったといえる。ただし、その反面、有限要素法などによって得られた計算結果を盲目的に信用する技術者が多く見られるため、計算結果と実験や現実との照合が不可欠であるという注意が喚起されている。実際、最近になって、日本でも計算の品質が議論され始めてきている⁹⁾。また、米国機械学会 (ASME; American Society of Mechanical Engineers) では、計算の品質を確保するため、**計算の検証と妥当性** (V&V; verification and validation) に関するガイドラインが定められている¹⁰⁾。

従来、製品の品質を保証するための努力は大いに払われているが、その製品を製造するための計算の妥当性 (品質) は十分に検討されていないのが現状という認識があるわけである。実際、計算モデルは製品の CAD 図面から忠実度高く作製されるが、外力の負荷条件、変位拘束の状態などの境界条件に無頓着な場合が多いように思われる。しかし、境界条件が計算結果に大きな影響を与える場合もあり、現実を反映した境界条件を付与するには、計算と実験の照合ばかりではなく、弾性論や材料力学に関する基礎的な知識が必要とされる。

したがって、コンピュータの向上により有限要素法でこれまで以上に精密な計算を行える状況にある現在、有限要素法の使用法を知っていれば弾性論や材料力学を知らなくてもよいという風潮もあるようである。しかし、設計計算の品質を高めるためにはこれまで以上に弾性論や材料力学の理解度を深め、計算モデルや境界条件およびその結果得られる計算結果の妥当性を判断できる能力を養う必要がある。

引用・参考文献

- 1) 最上武雄 監訳, 川口昌宏 訳, S. P. ティモシェンコ: 材料力学史, pp. 96~101, 鹿島研究所出版会 (1974). (S. P. Timoshenko: History of Strength of Materials, pp. 104~111, Dover Publications (1983))
- 2) A. E. H. Love: A treatise on the mathematical theory of elasticity, 4th ed., pp. 6~11, Dover Publications (1944)
- 3) 一松 信: 大数学者の数学/コーシー 近代解析学への道, pp. 183~186, 現代数学社 (2009)
- 4) 例えば, S. W. Tsai: Composite design, 4th ed., pp. 7-7~7-8, Think Composites Publishers (1988)

- 5) 例えば, 宮本 博: 3次元弾性論, 裳華房 (1967)
- 6) T. C.-T. Ting: Anisotropic elasticity — Theory and applications —, pp. i~iii, 520~536, Oxford University Press (1996)
- 7) 例えば, 日本計算工学会 編, 寺田賢二郎, 菊池 昇: 均質化法入門 (計算力学レクチャーシリーズ 1), 丸善 (2003)
- 8) 例えば, 大谷俊介: 速修 物理数学の応用技法, pp. 62~63, プレアデス出版 (2012)
- 9) 例えば, 日本機械学会 2011 年度本年次大会ワークショップ W0101: シミュレーションの品質保証と標準化に向けた取り組み, 機構論, No. 10-1, pp. 93~102 (2010)
- 10) ASME V&V 10-2006: Guide for verification and validation in computational solid mechanics (2006)

索引

【あ】		回転操作	87	交代テンソル	25
圧電材料	247	回転対称性	86	合力	130
圧電定数	248	回転テンソル	24	国際表記	88
アトレッド	126	回転の逆対称性	25	コーシーの関係	70
アフィン変換	210	解の唯一性	71	コーシーの積分定理	229
		回反操作	88	コーシーの ひずみテンソル	20
【い】		【き】		固有値	36
一般化された 平面ひずみ状態	171	幾何学的境界条件	69	固有ベクトル	36
一般化フック則	78	擬標	18, 263	固有方程式	278
異方性材料	78	逆対称テンソル	25	固有和	39
——の応力関数	150	鏡映操作	87	コロソフ-ムスケリシビリ 表示	132, 136
異方性主軸	85	鏡映対称性	87	混合境界値問題	70
		境界値問題	70	混合転位	233
		鏡像原理	207		
【え】		行列式	36		
エアリーの応力関数	119	極異方性材料	103	【さ】	
【お】		【く】		座標変換テンソル	32
応力	12	グリーン-ラグランジェの ひずみテンソル	22	座標変換マトリックス	32
——の主軸	36	ゲルサの複素応力関数	128	三斜晶系	94
——の主値	36	クロスエラスティシティ 効果	79	サン-ブナンの方程式	72
——の主方向	36			三方晶系	97
応力拡大係数	221, 223	【け】		【し】	
応力関数	123	計算の検証と妥当性	8	支配方程式	30
応力集中	199	計算の品質	7	指標	18
応力成分	28	結晶系	88	指標表示	14
応力テンソル	12	【こ】		斜方晶系	96
——の座標変換式	32	工学せん断ひずみ	21	重調和関数	125
——の対称性	14	交差すべり	233	重調和方程式	281
——の不変量	39	格子欠陥	231	自由標	18, 263
応力特異性	221	構成式	75	主応力	36
		剛性率	77	縮退された弾性 コンプライアンス	172
【か】				主せん断応力	37
解析接続	207			主せん断ひずみ	45
回転成分	25				

主ひずみ 44
 純せん断 54

【す】

垂直応力 12
 垂直ひずみ 20
 スカラ 261
 ストロー流 3, 112

【せ】

静水圧応力 40
 正則関数 280
 正方晶系 96
 跡 39
 線形弾性 1
 線形同次偏微分方程式 277
 せん断応力 12
 ——の対称性 14
 せん断弾性係数 77
 せん断ひずみ 20
 ——の対称性 21

【そ】

相対変位ベクトル 18
 総和規約 12, 263

【た】

第1種の相互影響係数 197
 対称操作 87
 対称テンソル 21
 体積ひずみ 46
 体積膨張 46
 第2種の相互影響係数 197
 縦弾性係数 76
 単斜晶系 95
 弾性 1
 弾性学 1
 弾性係数テンソル 78
 弾性係数の縮退 80
 弾性係数の変換 82
 弾性コンプライアンスマトリックス 79
 弾性スティッフネステンソル 78

弾性主軸 85
 弾性体 1
 弾性ひずみエネルギー 80
 弾性論 1

【ち】

力の合モーメント 132
 直交異方性材料 85, 101
 直交曲線座標 200
 直方晶系 96
 調和方程式 283

【つ】

つり合い方程式 27, 30

【て】

デカルト分解 26
 適合条件式 72
 転位 231
 電界 248
 電気変位 247
 点群 88
 テンソル 2, 261

【と】

等角写像 200
 等方性材料 100, 104
 ——の応力関数 123
 特性根 278
 特性方程式 36, 278

【な】

ナブラ 126

【の】

ノイマンの原理 87

【は】

バーガースベクトル 233
 刃状転位 232
 ハミルトンの演算子 125
 反転操作 87
 反転対称性 87

【ひ】

微小変形の仮定 22
 ひずみ成分 20
 ひずみテンソル 20
 ——の座標変換式 41
 ——の成分 41
 ——の対称性 21
 ——の不変量 45
 ひずみの主軸 44
 ひずみの主方向 44
 ひずみの適合条件式 71
 ひずみ-変位関係式 20
 非線形弾性 1
 微分規約 263
 表面力 27

【ふ】

V&V 8
 フォークト表記 23
 複素関数法 277
 複素共役 278
 フックの法則 76
 物質客観性の原理 83
 物体力 27
 プラントル型応力関数 119
 プレメリの式 227

【へ】

平均応力 40
 平衡方程式 30
 並進操作 87
 並進対称性 86
 平面応力問題 116
 平面の極 56
 平面ひずみ問題 116
 ベクトル 261
 ベルトラミー-ミッチェルの適合条件式 125
 ヘルマン-モーガン表記 88
 変位勾配テンソル 18
 変位成分 17
 変位ベクトル 16
 偏微分演算子 277

【ほ】		【も】		【ら】	
ポアソン数	76	モールの円	47	らせん転位	232
ポアソン比	76	モールの応力円	47	ラプラシアン	126
方向角	19	モールのひずみ円	61	ラプラス演算子	126
方向余弦	19			ラーメの定数	77, 101
法線の極	50	【や】		【り】	
ボルテラの転位	234	ヤング率	76	力学的境界条件	69
				立方晶系	99
【む】		【ゆ】		【れ】	
ムスケリシビリの		誘電率	248	レクニツキイ流	112
応力関数	221			連続体近似転位	233
【め】		【よ】		【ろ】	
面外傾斜	170	横弾性係数	77	六方晶系	99
面外せん断問題	115	横等方性材料	102		
面内問題	115				

— 編著者略歴 —

1974年 東京工業高等専門学校機械工学科卒業
1977年 東北大学工学部機械工学第二学科卒業
1982年 東京大学大学院工学系研究科博士課程修了（機械工学専攻）
工学博士
1982年 科学技術庁金属材料技術研究所勤務
1994年 東京理科大学助教授
1998年 東京理科大学教授
現在に至る

異方性材料の弾性論

Theory of Elasticity of Anisotropic Materials

© Yuji Nakasone 2014

2014年4月25日 初版第1刷発行



検印省略

編著者 なか そ ね ゆう じ
中 曾 根 祐 司
発行者 株式会社 コロナ社
代表者 牛来真也
印刷所 新日本印刷株式会社

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844・電話 (03)3941-3131(代)

ホームページ <http://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-04633-5

(新井)

(製本：牧製本印刷)

Printed in Japan



本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられております。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めておりません。

落丁・乱丁本はお取替えいたします