

デジタル信号処理ライブラリー 6

---

# ARMAシステムと デジタル信号処理

工学博士 谷 萩 隆 嗣 著

コ ロ ナ 社

## 刊行のことば

最近のデジタル技術は驚異的な発展を続けており、従来はアナログ処理が行われていたもの、あるいはデジタル処理が不可能であったものでも、つぎつぎとデジタル処理されるようになってきた。それに伴い、多くの分野で、いっそう高度なデジタル技術の確立が求められてきている。

先般行われた、電気/電子/情報/通信分野における大規模なアンケート調査によれば、多くの企業および研究機関が「デジタル信号処理」を非常に重要視し、「必要性」ならびに「重要性」の項目でトップに挙げている。このことから、「デジタル信号処理」は、現在、社会的ニーズが最も高い学問分野の一つであると考えられる。

このような状況にかんがみ、「デジタル信号処理」を広範な立場からできるだけ統一的にまとめて、この分野に興味を持っている多くの方々に役立てて頂くことを目的として、「デジタル信号処理ライブラリー」を刊行する。

本ライブラリーは、以下の各巻で構成されている。

- 第1巻：デジタル信号処理と基礎理論
- 第2巻：デジタルフィルタと信号処理
- 第3巻：音声と画像のデジタル信号処理
- 第4巻：高速アルゴリズムと並列信号処理
- 第5巻：カルマンフィルタと適応信号処理
- 第6巻：ARMA システムとデジタル信号処理
- 第7巻：VLSI とデジタル信号処理
- 第8巻：情報通信とデジタル信号処理
- 第9巻：ニューラルネットワークとファジィ信号処理
- 第10巻：マルチメディアとデジタル信号処理

これらの各巻のうち、第1巻から第3巻までは、大学の学部3、4年生でも十分理解できるような内容の「基礎編」である。また、第4巻から第6巻までは、内容を少しグレードアップした「発展編」であり、大学院修士課程の学生程度の学力を持つ者をおもな対象とする。さらに、第7巻から第10巻までは、大学や企業の研究者を始めとする、広範な社会人をおもな対象とした「応用編」であり、ある程度の基礎知識があれば、十分読みこなせる内容となっている。

したがって、本ライブラリーについては、読者の興味およびレベルに応じて多様な読み方が可能である。例えば、まったくの初歩からデジタル信号処理を学びたい場合には、「基礎編」から読み始めることが望ましい。一方、ある程度の基礎知識があれば、いきなり「発展編」あるいは「応用編」を読んでも、十分に読みこなすことができる。また、「基礎編」から読み始める場合でも、「基礎編」、「発展編」、「応用編」の順に読み進めるだけでなく、「基礎編」、「応用編」、「発展編」の順とすることも可能であるので、読者の興味に応じて読み進めて頂きたい。

幸い、本ライブラリーについては、各方面の第一線で活躍中の多くの方々に執筆して頂くことができたので、読者の期待にこたえられる内容になっていると確信している。

「デジタル信号処理」の分野は、理論および応用技術ともに急速な勢いで発展を続けているので、今後は、状況に応じて「デジタル信号処理ライブラリー」に新しい分野を追加し、本ライブラリーを、内容的にもさらに充実したものにしてゆくことを予定している。

最後に、本ライブラリーの刊行にあたって多大の御尽力を頂いた、コロナ社の方々に深く感謝の意を表する。

1996年1月

企画・編集責任者 谷萩 隆嗣

## まえがき

人間の音声波形や地震波あるいは建築物が揺れたときの波形など、われわれの身近なものの中で、出力信号しか直接には観測できないものが少なくない。このような場合には、あらかじめ線形モデルを仮定して、出力信号だけを利用して線形モデルの次数や係数を推定することが考えられる。このようなモデルの代表的な例として、AR モデル（自己回帰モデル：autoregressive model）、MA モデル（移動平均モデル：moving average model）および ARMA モデル（自己回帰移動平均モデル：autoregressive moving average model）などがよく知られている。AR システムや MA システム、ARMA システムは、それぞれ AR モデル、MA モデル、ARMA モデルで表すことができる。

これらのモデルを仮定して線形モデルの係数すなわち未知パラメータの推定を行うときに生じる大きな問題は、入力が未知であることである。この場合、AR 部（伝達関数の分母）の推定は比較的容易であるが、MA 部（伝達関数の分子）の推定は非常に困難となる。しかし、線形システムの場合には、これらのモデルは対象としているシステムの本質的な部分を表していると考えられるので、モデルを正確に推定できれば未知入力のロバストな推定が可能となる。

しかし、伝達関数の分子多項式が不安定多項式の場合、すなわち伝達関数の零点が単位円の外に存在する非最小位相システムでは、逆システムが不安定になってしまうので、逆システムを利用して未知入力を推定することは不可能である。この場合には安定な近似逆システムを利用すれば未知入力を容易に推定することができる。しかも、近似逆システムの次数を高くすれば、任意の精度で未知入力を正確に推定することが可能となる。

本書では、統計的信号処理を利用して線形モデルを推定し、それを使用して未知入力を推定する方法を詳しく説明する。特に、非最小位相システムの場合

にも未知入力が推定できるようにするために種々の近似逆システムの設計方法を述べる。近似逆システムによる未知入力推定の具体的な応用例として、声帯音源波の推定方法およびその推定結果を示す。さらに、近似逆システムの応用例として、非最小位相システムの適応制御について詳しく説明する。

第1章では、統計的信号処理に必要な種々の数学的基礎事項を説明する。最初に確率論の基礎について説明し、つぎに確率過程の基本的性質、相関関数とスペクトルなどについて詳細に述べる。

第2章では、線形システムのスペクトル推定について考え、最初に線形システムの相関関数とスペクトルの概念を説明する。つぎにAR, MA, ARMAの各システムのスペクトル推定を行うために、それらに対応した線形モデルの導入とARモデルを推定するための代表的な高速アルゴリズムについて述べる。また、FFTによる相関関数とスペクトルの推定、最大エントロピー法(maximum entropy method)によるスペクトルの推定について説明する。

第3章では、ARMAシステムのパラメータと未知入力の推定問題について考え、格子形フィルタを利用したARMAシステムの推定、逆システムを利用した最小位相ARMAシステムの推定、および近似逆システムを利用した非最小位相ARMAシステムの推定などを詳しく述べる。特に、近似逆システムの応用例として、声帯音源波の推定結果を詳細に説明する。

第4章では、非最小位相システムの適応制御問題を考え、近似逆システムを利用して非最小位相ARMAXシステムのセルフチューニング制御を行う方法について詳しく述べる。さらに、観測雑音が無視できる場合の非最小位相システムに対するモデル規範形適応制御について説明する。

以上、本書で述べている種々の推定アルゴリズムおよび近似逆システムは、統計的信号処理を行う場合には非常に有用であり、しかも多種多様な問題への応用が可能であるので、本書を十分有効に活用して頂きたいと希望している。

2008年5月

谷 萩 隆 嗣

# 目次

## Ⅰ. 確率と確率過程

1.1 確率空間と確率変数	1
1.1.1 確率測度と確率空間	1
1.1.2 確率変数と確率ベクトル	3
1.2 確率分布関数と確率密度関数	4
1.2.1 確率分布関数	4
1.2.2 確率密度関数	4
1.3 条件付き確率とベイズの法則	5
1.3.1 条件付き確率	5
1.3.2 ベイズの法則	6
1.4 期待値と共分散	7
1.5 独立と無相関	8
1.6 特性関数とキュムラント	9
1.6.1 特性関数	9
1.6.2 モーメント母関数	10
1.6.3 キュムラント	11
1.7 ガウス分布とその性質	12
1.7.1 ガウス分布の定義	12
1.7.2 ガウス分布の性質	13
1.8 いくつかの確率分布	17
1.9 確率変数の収束	18

1.9.1	平均収束	18
1.9.2	概収束	19
1.9.3	確率収束	19
1.9.4	法則収束	21
1.10	大数の法則と中心極限定理	21
1.10.1	大数の法則	21
1.10.2	中心極限定理	22
1.11	確率過程の基本的性質	22
1.11.1	確率過程の定義	22
1.11.2	独立と無相関	23
1.11.3	期待値と共分散	24
1.11.4	定常過程と非定常過程	24
1.11.5	エルゴード過程	25
1.12	相関関数とスペクトル	26
1.12.1	自己相関関数と相互相関関数	26
1.12.2	エネルギースペクトルとパワースペクトル	28
1.12.3	離散時間システムの相関関数とパワースペクトルの関係	29

## 2. 線形システムのスペクトル推定

2.1	線形システムの相関関数とスペクトル	34
2.1.1	線形離散時間システムの相関関数	34
2.1.2	線形離散時間システムのスペクトル	35
2.1.3	線形連続時間システムの相関関数	37
2.1.4	線形連続時間システムのスペクトル	38
2.2	ARMAシステムのスペクトル推定	39
2.2.1	線形モデルによるスペクトル推定	39
2.2.2	ARモデル	40
2.2.3	MAモデル	42
2.2.4	ARMAモデル	45

2.2.5	AR モデルによる MA システムの近似	48
2.2.6	AR モデルによる ARMA システムの近似	50
2.2.7	レビンソン・ダービンアルゴリズム	53
2.2.8	スプリットレビンソンアルゴリズム	57
2.3	FFT による相関関数とスペクトルの推定	70
2.3.1	相関関数とスペクトルの推定	70
2.3.2	FFT によるスペクトルの推定手順	75
2.3.3	コヒーレンスの推定	77
2.4	最大エントロピー法によるスペクトルの推定	78
2.4.1	情報エントロピーと最大エントロピー法	78
2.4.2	エントロピー密度 $h$ の最大化	81
2.4.3	エントロピー $H$ の最大化	83
2.4.4	最大エントロピー法による推定アルゴリズム	87

## 3. ARMA システムのパラメータと入力の推定

3.1	格子形フィルタを利用した ARMA システムの推定	91
3.1.1	観測雑音がない場合の ARMA システムの推定	91
3.1.2	観測雑音がある場合の ARMA システムの推定 (1)	97
3.1.3	観測雑音がある場合の ARMA システムの推定 (2)	106
3.2	逆システムを利用した ARMA システムの推定	109
3.2.1	観測雑音がある場合の AR システムの推定	109
3.2.2	観測雑音がある場合の ARMA システムの推定 (1)	116
3.2.3	観測雑音がある場合の ARMA システムの推定 (2)	120
3.3	近似逆システムを利用した非最小位相 ARMA システムの推定	125
3.3.1	逆システムと近似逆システム	125
3.3.2	除算法を利用した近似逆システムの設計	128
3.3.3	最小 2 乗法を利用した近似逆システムの設計	133
3.3.4	全域通過フィルタを利用した近似逆システムの設計	137

3.3.5 非最小位相 MA システムのパラメータと入力の推定 .....	143
3.3.6 非最小位相 ARMA モデルによる声帯音源波の推定 .....	153

## 4. 非最小位相システムの適応制御

4.1 非最小位相システムのセルフチューニング制御 .....	164
4.1.1 最小位相システムの最適制御 .....	166
4.1.2 非最小位相システムの最適制御 .....	171
4.1.3 プラントのパラメータ推定 .....	175
4.1.4 セルフチューニング制御 .....	180
4.1.5 推定値の利用と制御入力の計算 .....	191
4.1.6 近似逆システムを利用した制御システムの安定性 .....	195
4.2 非最小位相システムのモデル規範形適応制御 .....	197
4.2.1 最小位相システムの最適制御 .....	198
4.2.2 非最小位相システムの最適制御 .....	200
4.2.3 プラントのパラメータ推定 .....	203
4.2.4 モデル規範形適応制御 .....	206
4.2.5 外乱が存在する場合のモデル規範形適応制御 .....	211
引用・参考文献 .....	216
索 引 .....	221

# 1. 確率と確率過程

デジタル信号処理の対象となるシステムでは、種々の不規則信号や雑音を加わっている場合、パラメータが不規則的に変動する場合などが少なくない。このような場合には、確率論、確率過程論および統計学などの結果を踏まえた議論が必要となってくる。本章では、いくつかの基本的な事項について簡単に説明する。これらは、統計的信号処理のための基礎として非常に重要である。

## 1.1 確率空間と確率変数

### 1.1.1 確率測度と確率空間

不規則信号のように不確定性を持つ信号や雑音の標本値を  $\omega$  で表したとき、標本値の集まりを**標本空間** (sample space) と呼ぶ。したがって、標本空間  $\Omega$  の要素が標本値  $\omega$  となる。また、 $\Omega$  の部分集合を  $E_1, E_2, \dots$  としたとき、集合体  $\mathcal{B}$  はつぎの3条件

$$\textcircled{1} \quad \Omega \in \mathcal{B} \quad (1.1)$$

$$\textcircled{2} \quad E \in \mathcal{B} \text{ ならば } E^c \in \mathcal{B} \quad (1.2)$$

$$\textcircled{3} \quad E_n \in \mathcal{B} \ (n=1, 2, \dots) \text{ ならば } \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{B} \quad (1.3)$$

を満たしているとする。ただし、 $E^c$  は  $E$  の補集合を表しており、 $E^c = \Omega - E$  である。

このとき  $\mathcal{B}$  を  **$\sigma$  集合体** ( $\sigma$ -field) という。特に、 $n$  次元ユークリッド空間の開区間のすべてとそれらの補集合、積、和の演算によって生成された最小の

## 2 1. 確率と確率過程

$\sigma$  集合体を**ボレル集合体** (Borel field) と呼んでいる。ボレル集合体の要素は**ボレル集合** (Borel set) である。以下、 $\mathcal{B}$  はボレル集合体であるとする。

条件①～③から、つぎの性質

$$\textcircled{4} \quad \phi = \Omega^c \in \mathcal{B} \quad (1.4)$$

$$\textcircled{5} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \left[ \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c \right]^c \in \mathcal{B} \quad (1.5)$$

$$\textcircled{6} \quad E_i \in \mathcal{B}, E_j \in \mathcal{B} \text{ ならば } E_i^c \cap E_j = E_j - E_i \in \mathcal{B} \quad (1.6)$$

が導かれる。ただし、 $\phi$  は空集合を表す。

$\mathcal{B}$  上で定義された集合関数  $P$  がつぎの公理を満たすとき、 $P$  を  $\Omega(\mathcal{B})$  上の**確率測度** (probability measure) あるいは**確率分布** (probability distribution) という<sup>(1)~(6)†1</sup>。

### 公理 1.1 (確率測度)

$$(1) \quad P(E) \geq 0, \quad E \in \mathcal{B} \quad (1.7)$$

(2)  $E_n \in \mathcal{B}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) がたがいに排反ならば、すなわち  $\phi$  を空集合として、 $E_i \cap E_j = \phi$  ( $i \neq j$ ) ならば

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) \quad (1.8)$$

$$(3) \quad P(\Omega) = 1 \quad (1.9)$$

公理 1.1 からつぎの性質が導かれる。

$$(a) \quad E_i \subset E_j \text{ のとき } P(E_j) \geq P(E_i) \quad (1.10)$$

$$(b) \quad E_i \in \mathcal{B} \text{ のとき } 0 \leq P(E_i) \leq 1 \quad (1.11)$$

実際、 $E_i \subset E_j$  のとき、 $E_j = E_i \cup (E_j - E_i)$ 、 $E_i \cap (E_j - E_i) = \phi$  であるので  $P(E_j) \geq P(E_i)$  となり、 $E_j = \Omega$  と置けば  $0 \leq P(E_i) \leq 1$  が成立する。

以上の定義を用いて  $\Omega, \mathcal{B}, P$  を一つの組にしたとき、 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$  を**確率空間** (probability space)、 $\mathcal{B}$  の要素を**事象** (event) という。

$\{E_n\}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) が排反事象列で、 $E$  がその和事象のときには、公理 1.1 から

†1 肩付き数字は、巻末の引用・参考文献の番号を表す。

$$0 \leq P(E) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) \leq 1 \quad (1.12)$$

となるが、これを確率の加法性という。

特に、 $P(E)=1$ ならば、事象  $E$  が確率 1 で起こるといふ。また、明らかに  $P(\phi)=0$  であるが、 $P(E_i)=0$  であっても  $E_i=\phi$  であるとは限らない。

### 1.1.2 確率変数と確率ベクトル

$\Omega$  で定義された実数値関数  $X \in R^1 = (-\infty, \infty)$  が  $\mathcal{B}$  可測であるとき、すなわち  $R^1$  の任意のボレル集合  $D$  に対して、 $X(\omega)$  による  $D$  の原像  $X^{-1}(D) = \{\omega \mid X(\omega) \in D\}$  が  $\mathcal{B}$  に属するとき、 $X(\omega)$  を**確率変数** (random variable) という。このようにして、 $R^1$  の任意の開区間  $I = (a, b)$  に対して、 $X(\omega) \in I$  となる確率が定義される。

同様に、 $n$  個の確率変数  $X_1, X_2, \dots, X_n$  をまとめて  $n$  次元列ベクトル ( $n \times 1$  ベクトル) で表し、 $\Omega$  から  $n$  次元ユークリッド空間  $R^n$  への写像  $\mathbf{X}$  を考えるとき、 $\mathbf{X}$  が  $\mathcal{B}$  可測であれば、 $\mathbf{X}(\omega)$  を**確率ベクトル** (random vector) と呼ぶ。われわれが通常扱う関数はすべて  $\mathcal{B}$  可測であると考えてさしつかえない。

$x \in R^1$  が任意の実数のとき、 $f(x) \in R^1$  が連続関数であるとすれば、確率変数  $X(\omega)$  に対して  $f(X(\omega))$  も確率変数となる。これは  $\mathbf{X}(\omega)$  が確率ベクトルの場合にもまったく同様である。

**注 1.1** 以下においては、 $\omega$  を省略して、確率変数を  $X, Y, \dots$ 、確率ベクトルを列ベクトル  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \dots$  で表し、それらの標本値を  $x, y, \dots$  および  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots$  で表すことにする。例えば、 $\mathbf{X}$  と  $\mathbf{x}$  が  $n \times 1$  ベクトルのとき、それらの  $k$  番目の要素を  $X_k, x_k$  とすれば、 $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$ 、 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  と表される。ただし、 $T$  は転置を表す。

## 1.2 確率分布関数と確率密度関数

## 1.2.1 確率分布関数

任意の実数  $x$  に対して

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (1.13)$$

と置くと、 $F(x)$  は  $x$  の右連続な非減少関数で

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1 \quad (1.14 \text{ a})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad (1.14 \text{ b})$$

が成り立つ。このとき、 $F(x)$  は確率変数  $X$  の確率分布関数 (probability distribution function) と呼ばれている。 $F(x)$  の不連続点はたかだか可算個であり、ほとんどいたるところで微分可能である。

$\mathbf{X}$  が  $n \times 1$  ベクトルの場合には、まったく同様にして

$$F(\mathbf{x}) = P(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) \quad (1.15)$$

で確率分布関数  $F(\mathbf{x})$  が定義される。ここで  $F(\mathbf{x})$  は確率変数  $X_1, X_2, \dots, X_n$  の結合確率分布関数 (joint probability distribution function) とも呼ばれている。

**注 1.2** 確率変数  $X$  が離散的な実数値しかとらない離散的確率変数の場合には、 $F(x)$  は階段関数となる。例えば、 $X$  の実現値が  $x_k$  ( $k=1, 2, \dots, N$ ) だけの場合には、 $P(X=x_k)$  ( $k=1, 2, \dots, N$ ) によって確率分布が与えられる。

## 1.2.2 確率密度関数

$X$  が連続的確率変数で

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(\xi) d\xi \quad (1.16 \text{ a})$$

$$p(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} \geq 0 \quad (1.16 \text{ b})$$

が存在すれば、 $p(x)$  を  $X$  の確率密度関数 (probability density function) と

いう。

また、 $\mathbf{X}$  が連続的確率ベクトルの場合には

$$F(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\mathbf{x}} p(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n \quad (1.17 \text{ a})$$

$$p(\mathbf{x}) = \frac{\partial^n F(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} \geq 0 \quad (1.17 \text{ b})$$

を満たす  $p(\mathbf{x})$  が確率密度関数である。ここで  $p(\mathbf{x})$  は確率変数  $X_1, X_2, \dots, X_n$  の結合確率密度関数 (joint probability density function) と呼ばれている。

**注 1.3** A. N. Kolmogorov による測度論に基づいた確率論では、積分はすべてルベーグ (Lebesgue) 積分であるが、実際にはリーマン (Riemann) 積分とみなして議論しても、不都合を生じない場合が多い。

## 1.3 条件付き確率とベイズの法則

### 1.3.1 条件付き確率

確率空間  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$  における二つの事象,  $A \in \mathcal{B}, B \in \mathcal{B}$  を考え,  $P(A) > 0$  とすれば

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (1.18)$$

が成立し,  $P(B | A)$  は事象  $A$  が生じたときの事象  $B$  の条件付き確率 (conditional probability) を表している。

式 (1.18) で

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (1.19)$$

が成り立てば, 事象  $A$  と  $B$  はたがいに独立 (independent) であるという。したがって,  $A$  と  $B$  が独立であるとすれば

$$P(B | A) = P(B) \quad (1.20)$$

となる。

## 6 1. 確率と確率過程

これを一般化して、有限事象列  $\{E_n\} (n=1, 2, \dots, N)$  に適用すれば、任意の  $1 \leq k \leq N$  と任意の  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N$  に対して

$$P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_k}) = \prod_{j=1}^k P(E_{j i_j}) \quad (1.21)$$

が成り立つとき、 $E_1, E_2, \dots, E_N$  はたがいに独立である。ただし、 $E_{j i_j} (j=1, 2, \dots, k)$  は  $m=i_j (j=1, 2, \dots, k)$  のときの  $E_m$  を表す。

### 1.3.2 ベイズの法則

式 (1.18) で  $A$  と  $B$  の役割を交換すれば

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \quad (1.22)$$

が得られる。そこで、式 (1.22) を一般化すれば、事象  $B_i (i=1, 2, \dots, N)$  がたがいに排反であり、 $P(A) > 0$ 、 $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_N = \Omega$  であるとき

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^N P(A|B_j)P(B_j)}, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (1.23)$$

が成立する。式 (1.22)、(1.23) は条件付き確率分布関数を表している。

式 (1.22)、(1.23) の等式はベイズの法則 (Bayes' rule) あるいはベイズの定理 (Bayes' theorem) と呼ばれている。

つぎに、確率密度関数について考えるために、 $\Delta x > 0$  として  $A = \{x < X \leq x + \Delta x\}$ 、 $B = \{Y \leq y\}$  と置けば、 $X$  と  $Y$  が連続的確率変数のとき

$$P(Y \leq y | x < X \leq x + \Delta x) = \frac{P(x < X \leq x + \Delta x, Y \leq y)}{P(x < X \leq x + \Delta x)} \quad (1.24)$$

と表されるので、 $\Delta x \rightarrow 0$  とすれば

$$P(Y \leq y | X = x) = \frac{1}{p(x)} \int_{-\infty}^y p(x, \eta) d\eta \quad (1.25)$$

が得られる。ただし、 $p(x) > 0$  とする。

このとき

$$p(y|x) = \frac{\partial}{\partial y} P(Y \leq y | X = x) = \frac{p(x, y)}{p(x)} \quad (1.26)$$

# 索

# 引

**【あ】**  
安定 48, 125, 126, 128, 132, 193, 196  
安定多項式 92, 125, 130, 137, 166, 171, 172, 178, 187, 193, 194, 198, 199, 200, 201, 211  
**【い】**  
異常データ 76  
位相特性 47, 114, 138  
一様分布 17  
移動平均過程 42  
移動平均モデル 42  
因果的 125, 126, 128  
インパルス応答 34, 37, 46, 50, 52, 140  
インパルス応答モデル 40, 43, 50  
インパルス列 147, 155  
**【う】**  
ウィーナー・ヒンチンの  
公式 30, 32, 33  
後向き予測誤差 93, 98  
**【え】**  
エネルギースペクトル 28, 29  
エネルギースペクトル  
密度関数 28  
エリアシング 76  
エルゴード過程 26  
エルゴード性 26, 32, 35, 70, 78  
エルゴード的 26, 27

エントロピー 78, 83  
エントロピー密度 79, 81

## 【お】

オーバーフィッティング  
格子形フィルタ 101, 103, 107  
オフライン 96  
音声信号 153  
音声信号処理 147, 157  
音声生成過程 153  
音声生成モデル 153  
オンライン 96

## 【か】

外因性の変数 166  
概収束 19, 21  
外乱 211, 212, 213, 214  
外乱除去フィルタ 211, 212  
ガウス過程 25  
ガウス性 33  
ガウス分布 12, 14, 15, 16, 17, 79, 86  
確定システム 193, 197  
確定的外乱 211, 212  
確定的信号 29, 33  
確率 3  
——の加法性 3  
確率1 3  
——で収束 19  
確率過程 22, 23, 24, 25, 35, 39  
確率極限 20  
確率空間 2, 18, 19, 22  
確率システム 17, 187, 193, 194

確率収束 19, 20, 21  
確率測度 2  
確率的信号 29, 31, 33  
確率分布 2, 12, 17  
確率分布関数 4, 8, 13, 19  
確率ベクトル 3, 8, 20  
確率ベクトル列 20  
確率変数 3, 4, 18, 19  
確率変数列 18, 19  
確率密度関数 4, 5, 6, 13, 17, 24, 25, 78  
加減算回数 67, 68, 69  
過渡応答 208, 209, 211  
過渡状態 211  
カルマンフィルタ 106, 127, 147, 153, 156, 175  
カルマンフィルタ  
アルゴリズム 206  
観測雑音 35, 36, 37, 39, 71, 91, 97, 107, 109, 114, 116, 118, 127, 146, 169  
——の分散 107, 113, 115, 116, 120, 121, 122, 123, 124  
——の分散の推定 116  
観測信号 91, 100, 109

## 【き】

擬似逆行列 151  
基準入力 198  
期待値 7, 24  
規範モデル 197, 198, 203, 208, 209  
逆システム 43, 47, 48, 110, 125, 127, 187  
キムラント 17, 18, 143, 151, 153

強定常過程 24  
 共分散 7  
 共分散関数 26  
 共分散行列 7, 13, 24, 25, 27  
 極 52, 103, 107, 140, 163  
 極と零点の消去 168  
 極と零点の推定 103, 105, 124  
 極零配置 163  
 近似逆システム 128, 137, 155, 165, 178, 187, 198  
 近似誤差 52, 53, 127, 129, 133, 135, 136, 139, 171, 178, 193, 201, 203  
 近似精度 53, 134, 136, 137, 195

## 【く】

空集合 2  
 駆動入力信号 153, 154, 159  
 ——の推定 154  
 クロスパワースペクトル 30, 36, 38, 72  
 クロスパワースペクトル密度 30  
 クロスパワースペクトル密度関数 30, 36  
 クロネッカーのデルタ関数 33

## 【け】

結合ガウス分布 14, 25  
 結合確率分布関数 4, 5, 78, 86

## 【こ】

格子アルゴリズム 94, 122  
 格子形構造 98

格子形白色化フィルタ 93, 95  
 格子形フィルタ 90, 93, 95, 96, 98, 101, 102, 103, 106, 123  
 高次キュムラント 143  
 高次ユール・ウォーカー方程式 109, 157  
 合成積則 74  
 高速カルマンフィルタアルゴリズム 176, 181, 194  
 高速フーリエ変換 70  
 誤差関数 112, 122  
 コヒーレンス 30, 77, 78  
 個別エルゴード定理 26

## 【き】

再帰アルゴリズム 106  
 再帰形システム 46  
 再帰推定アルゴリズム 112, 114, 124, 125  
 最小位相 ARMA システム 91, 116, 120  
 最小位相システム 43, 44, 46, 50, 97, 165, 170, 198, 199, 211, 213  
 最小位相推移回路 47, 48  
 最小位相推移システム 48  
 最小2乗解 51, 52, 134, 136, 140, 149  
 最小2乗回帰 93  
 最小2乗回帰係数 94  
 最小2乗法 48, 133, 140, 179, 209, 210  
 最大位相システム 43, 44, 46  
 最大位相推移回路 47, 48  
 最大位相推移システム 48  
 最大エントロピー法 78  
 最大対数尤度 86  
 再着色 77

最適制御 165, 170, 172, 180, 198, 202, 203  
 最適な遅れ 134, 137, 139  
 最適な制御入力 166, 168, 170, 172, 174, 175, 180  
 再トレーニング 180, 187  
 雑音 1, 164, 197  
 雑音系列 77  
 雑音源 32  
 サンプリング 75, 165  
 サンプリング定理 75

## 【し】

時間平均 25, 27, 32, 35  
 時系列 23  
 自己回帰移動平均過程 45  
 自己回帰移動平均モデル 45  
 自己回帰過程 40  
 自己回帰モデル 40  
 自己最適化制御 165  
 自己相関関数 26, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 37, 40, 47, 48, 70, 71, 73, 74, 80, 85, 92, 109, 144, 146, 157  
 自己相関行列 27, 79, 83  
 事象 2, 3, 5  
 地震波 78  
 次数の推定 144  
 指数分布 17  
 システムの安定性 50, 164, 197  
 実音声 161  
 実加減算回数 73, 74  
 実乗除算回数 73, 74  
 実数値 FFT 74  
 弱定常過程 24, 25  
 集合関数 2  
 集合体 1  
 集合平均 25, 27, 32, 35

修正ユール・ウォーカー  
 方程式 92  
 収束性 197, 204  
 収束速度 157  
 周波数伝達関数 36, 38, 39, 40  
 出力信号系列 34, 37  
 条件付き確率 5  
 条件付き確率分布関数 6  
 条件付き確率密度関数 7  
 条件付き期待値 8  
 乗除算回数 67, 68, 69  
 状態変数フィルタ 212  
 商多項式 130  
 情報エントロピー 78  
 剰余多項式 129, 130  
 初期値 55, 57, 63, 64, 67, 68, 88, 112, 113, 153, 200, 208, 209, 211  
 初期トレーニング 180, 181, 187, 208  
 除算法 128, 173, 179, 202, 209  
 信号 1  
 信号系列 72, 77  
 信号源 77  
 振幅誤差 137  
 振幅特性 47, 138

**【す】**

推定精度 146, 156  
 推定値の収束性 164  
 推定の間引き 191  
 ステップ幅 112, 114, 123  
 スプリットレビンソン  
 アルゴリズム 57  
 スペクトル解析 78  
 スペクトル推定 39, 48, 75, 78  
 スペクトル窓 76  
 スルツキーの定理 19, 20

**【せ】**

正規化した剰余多項式 131  
 正規分布 12  
 正規方程式 41  
 制御入力 166, 171, 172, 179, 191, 192, 193, 195, 198, 203, 211, 212  
 声帯音源 153  
 声帯音源波 155, 157, 158, 161, 163  
 —の推定アルゴリズム 155  
 声帯音源モデル 158  
 声道の特性 153  
 声道モデル 157  
 セルフチューニング制御 164, 165, 180  
 セルフチューニング制御システム 164  
 全域通過フィルタ 137, 140  
 漸近安定 49  
 線形モデル 39, 40  
 線形予測 42  
 線形離散時間システム 34, 35, 48, 164, 165, 197  
 線形離散時間モデル 39  
 線形連続時間システム 37, 165

**【そ】**

騒音制御 78  
 相関関数 70  
 相関係数 27  
 相関則 72  
 相互共分散関数 26  
 相互共分散行列 27  
 相互相関関数 26, 35, 37, 70, 73, 74  
 相互相関行列 27

**【た】**

対称 61  
 対称形スプリットレビンソンアルゴリズム 64, 65, 68, 69  
 対称テブリッツ行列 56, 79, 134, 140  
 大数の強法則 21  
 大数の弱法則 21  
 大数の法則 21  
 対数尤度関数 86  
 多項式外乱 211  
 畳込み 74  
 単位遅延演算子 82

**【ち】**

中心極限定理 22

**【つ】**

追従誤差 180  
 追従性 176

**【て】**

低次ユール・ウォーカー  
 方程式 110  
 定常 26, 27  
 定常応答 174, 187  
 定常過程 24, 35  
 定常状態 200, 208, 212, 214  
 ディラックのデルタ関数 33  
 停留条件 81  
 適応制御 165, 198  
 適応制御方式 164, 197  
 データ窓 75  
 テブリッツ行列 41  
 電気回路 47  
 伝達関数 41, 43, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 120, 125, 132

## 【と】

統計的に独立 33  
 同定誤差 204, 205  
 同定モデル 204  
 特性関数 9, 10, 13, 14, 15  
 独立 5, 8, 16, 23, 95, 113  
 独立かつ同一分布過程 33  
 独立な確率変数列 21, 22  
 トランスバーサルフィルタ 88  
 トレンド 76

## 【に】

入力信号 91, 109  
 入力信号系列 34, 37  
 入力推定 127

## 【の】

ノッチフィルタ 76

## 【は】

バイアス 101, 181, 191, 192, 193  
 排反事象列 2  
 白色ガウス雑音 91, 97  
 白色ガウス雑音過程 33  
 白色ガウス雑音系列 107, 122  
 白色雑音 32, 33, 39, 40, 109, 166, 169  
 白色雑音系列 33  
 パーセバルの等式 28, 29  
 ハミング窓 76  
 パラメータ推定 48, 93, 101, 151, 165, 175, 178, 180, 191, 213  
 パラメータ推定アルゴリズム 156  
 パラメータ推定値 150, 151, 152, 153, 157,

179, 180, 181, 187, 194, 197, 204, 206, 208, 209, 210, 214

パラメータ調整則 205  
 パラメータベクトル 151  
 パラメータ変動 176, 180, 187, 191, 194, 206, 209  
 パワースペクトル 29, 30, 35, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 46, 47, 71, 72, 79, 80, 83, 114, 116  
 パワースペクトル密度 29  
 パワースペクトル密度関数 28, 32, 35

パワー調整 75  
 反射係数 54, 95, 96, 97, 98, 100, 102, 106, 107, 123, 125  
 反対称 61  
 反対称形スプリット

レビンソンアルゴリズム 64, 67, 68, 69

反復形最小2乗回帰 93  
 反復推定 122  
 反復推定アルゴリズム 111, 114, 122, 123, 124

## 【ひ】

鼻音 157  
 非ガウス性 33  
 非ガウス性白色雑音 144  
 非再帰形システム 46  
 非最小位相 ARMA モデル 153, 157  
 非最小位相 FIR システム 140  
 非最小位相 MA システム 143, 144, 145, 151  
 非最小位相システム 43, 46, 127, 155, 156, 165, 172, 178, 181, 187, 197, 200, 202,

209, 210, 212, 214

—の制御問題 164  
 非最小位相推移回路 47, 48

非最小位相推移システム 48

非最小位相離散時間システム 165

非線形最適化アルゴリズム 152, 153

非線形最適化問題 152

非線形代数方程式 43, 93

非定常過程 24

評価関数 51, 52, 83, 88, 134, 135, 140, 166, 167, 168, 172, 174, 175

標準ガウス分布 22

標準偏差 7

標本空間 1

標本値 1

ピリオドグラム 72

## 【ふ】

不安定 43, 47, 48, 126, 171, 181, 200

不安定多項式 125, 130, 136, 138, 178, 179, 191, 193, 194

フィードバック制御 194, 199

フィードフォワード制御 194

不規則外乱 164, 197

不規則信号 1

複素加減算回数 74

複素乗算回数 74

物理的に実現可能 43, 126

部分集合 1

プラント 164, 165, 166, 168, 171, 176, 180,

194, 195, 197, 198,

199, 206, 211

—の次数 208

プリホワイトニング 77  
 分散 7, 12, 17  
 分子多項式 47, 48, 50, 52, 138, 165,  
 分母多項式 46, 48, 52, 138, 165

【へ】

平滑化 77, 163  
 平均エルゴード定理 26  
 平均収束 19  
 平均値 12, 17  
 平均値ベクトル 7, 13, 24, 25  
 ベイズの定理 6, 7  
 ベイズの法則 6, 7, 16  
 並列形カルマンフィルタ 106, 127  
 変分法 81

【ほ】

ポアソン確率変数 18  
 ポアソン分布 18  
 忘却係数 176, 204  
 放射特性 153  
 法則収束 21, 22  
 方程式誤差 48  
 補集合 1, 20  
 ボレル集合 2, 3  
 ボレル集合体 2

【ま】

前処理 77  
 前向き予測誤差 93, 95, 96, 98  
 窓関数 76

【み】

未知入力 127, 156  
 —の推定 156  
 未知パラメータ 87, 164, 165, 180, 197, 198, 212  
 —の推定 205

【む】

無声音 147  
 無相関 9, 16, 24, 33  
 無相関かつ同一分布過程 33

【も】

目標値 167, 169, 170, 174, 181, 193  
 モデル規範形適応制御 197, 198, 207, 208, 209, 210, 214  
 モデル規範形適応制御システム 197  
 モーメント母関数 10, 11, 17

【や】

約数多項式 130

【ゆ】

有限事象列 6  
 有色雑音 32, 40  
 有声音 147  
 ユークリッド空間 1  
 ユール・ウォーカー方程式 40, 83, 85, 109

【よ】

予測誤差 42, 88, 96  
 予測誤差フィルタ 83, 87, 88, 90

【ら】

ラグランジュ乗数 81

【り】

リアルタイム処理 96, 136  
 離散時間確率過程 23  
 離散時間システム 32, 33, 197  
 離散時間フーリエ変換 28

離散的確率ベクトル 8  
 離散的確率変数 4, 18  
 離散フーリエ逆変換 73  
 離散フーリエ変換 71  
 リーマン積分 5  
 リャプノフ関数 205  
 リャプノフの安定理論 205

【る】

ルベーク積分 5

【れ】

零点 43, 44, 45, 46, 48, 103, 107, 125, 128, 132, 135, 136, 140, 163, 171, 172, 175, 178, 181, 208  
 —の推定 103  
 レイリー分布 18  
 レギュレータ 171  
 レビンソンアルゴリズム 53, 57, 134, 140  
 レビンソン・ダービンアルゴリズム 41, 53, 54, 69, 87  
 連続時間確率過程 23  
 連続時間システム 32, 33, 197  
 連続スペクトル 30  
 連続的確率ベクトル 5, 7, 9  
 連続的確率変数 4, 6, 12

【ろ】

ロバスト 39

【数字・ギリシャ】

0次ホールド 165  
 0次ホールド回路 165  
 2次モーメント 25  
 3次キュムラント 144, 145, 146, 147, 157

## 【A】

AIC 85, 86, 90  
 APF 法 140, 142  
 ARMAX モデル 166  
 ARMA 過程 45, 159  
 ARMA システム 45, 46, 93, 101, 103, 107, 107, 116, 117, 118, 125, 132, 154  
 ARMA パラメータ 97, 120, 121  
 ARMA モデル 45, 46, 50, 154  
 AR 過程 40  
 AR 次数 161  
 AR システム 40, 46, 85, 109, 110, 113, 114, 122  
 AR パラメータ 92, 94, 101, 103, 110  
 AR 部 157, 166  
 AR モデル 40, 42, 46, 49, 50, 69, 73, 83, 85, 116, 118

## 【B】

Burg アルゴリズム 83, 87, 95, 100  
 可測 3

## 【C】

Cooley-Tukey  
 アルゴリズム 73

## 【D】

DFT 71, 77

## 【F】

FFT 70, 71, 72, 74, 75, 77  
 FIR 近似逆システム 140, 142, 175  
 FIR システム 34, 46, 127  
 FIR デジタルフィルタ 153  
 Fletcher-Powell 法 152

## 【H】

HOC 143  
 HOYW 法 114  
 HOYW 方程式 109, 114

## 【I】

IDFT 73  
 i. i. d. 過程 33  
 IIR 近似逆システム 140, 142  
 IIR システム 34, 46, 127  
 IIR デジタルフィルタ 153

## 【K】

$k$  次キウムラント 11, 12  
 $k$  次モーメント 10, 13

## 【L】

LF 93, 103  
 LOYW 方程式 110, 114  
 LSA 法 140, 142  
 $L$  遅れ FIR 近似逆システム 128, 129,

130, 134, 171, 195, 201, 202, 210  
 $L$  遅れ IIR 近似逆システム 130, 132  
 $L$  遅れ逆システム 126  
 $L$  遅れ近似逆システム 126, 127, 133, 135, 139, 140, 151, 155, 175, 195

## 【M】

MA 過程 42  
 MA 次数 101, 161  
 MA システム 42, 46, 49, 93, 110, 125, 150  
 MA パラメータ 94, 96, 103  
 MA 部 157, 166  
 MA モデル 42, 45, 46, 50  
 MEM 78, 80, 83, 85  
 MRAC 197  
 MRACS 197  
 MYW 方程式 92, 95

## 【O】

OLF 101, 103, 105

## 【P】

$p$  次平均収束 18

## 【S】

SN 比 101, 107, 114, 117, 123, 146

— 著者略歴 —

1966年 東京工業大学理工学部電子工学科卒業  
1971年 東京工業大学大学院理工学研究科  
電子工学専攻（博士課程）修了，工学博士  
1971年 千葉大学講師  
1974年 千葉大学助教授  
1984年 千葉大学教授  
2008年 信号処理技術研究所所長  
現在に至る

**ARMA システムとデジタル信号処理**

ARMA Systems and Digital Signal Processing © Takashi Yahagi 2008

2008年7月23日 初版第1刷発行

検印省略

著者 や 谷 萩 隆 嗣  
発行者 株式会社 コロナ社  
代表者 牛来辰巳  
印刷所 新日本印刷株式会社

112-0011 東京都文京区千石4-46-10

**発行所 株式会社 コロナ社**

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844・電話 (03) 3941-3131 (代)

ホームページ <http://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-01126-5 (中原) (製本：染野製本所)

Printed in Japan



無断複写・転載を禁ずる

落丁・乱丁本はお取替えいたします