ディジタル信号処理ライブラリー　6

ARMAシステムとディジタル信号処理

工学博士　谷　萩　隆　嗣　著

コ　ロ　ナ　社

刊行のことば

最近のディジタル技術は驚異的な発展を続けており，従来はアナログ処理が行われていたもの，あるいはディジタル処理が不可能であったものでも，つぎつぎとディジタル処理されるようになってきた。それに伴い，多くの分野で，いっそう高度なディジタル技術の確立が求められてきている。

先般行われた，電気/電子/情報/通信分野における大規模なアンケート調査によれば，多くの企業および研究機関が「ディジタル信号処理」を非常に重要視し，「必要性」ならびに「重要性」の項目でトップに挙げている。このことからも，「ディジタル信号処理」は，現在，社会的ニーズが最も高い学問分野の一つであると考えられる。

このような状況にかんがみ，「ディジタル信号処理」を広範な立場からできるだけ統一的にまとめて，この分野に興味を持っている多くの方々に役立てて頂くことを目的として，「ディジタル信号処理ライブラリー」を刊行する。

本ライブラリーは，以下の各巻で構成されている。

第 1 巻：ディジタル信号処理と基礎理論

第 2 巻：ディジタルフィルタと信号処理

第 3 巻：音声と画像のディジタル信号処理

第 4 巻：高速アルゴリズムと並列信号処理

第 5 巻：カルマンフィルタと適応信号処理

第 6 巻：ARMA システムとディジタル信号処理

第 7 巻：VLSI とディジタル信号処理

第 8 巻：情報通信とディジタル信号処理

第 9 巻：ニューラルネットワークとファジィ信号処理

第10巻：マルチメディアとディジタル信号処理

これらの各巻のうち，第1巻から第3巻までは，大学の学部3，4年生でも十分理解できるような内容の「基礎編」である。また，第4巻から第6巻までは，内容を少しグレードアップした「発展編」であり，大学院修士課程の学生程度の学力を持つ者をおもな対象とする。さらに，第7巻から第10巻までは，大学や企業の研究者を始めとする，広範な社会人をおもな対象とした「応用編」であり，ある程度の基礎知識があれば，十分読みこなせる内容となっている。

したがって，本ライブラリーについては，読者の興味およびレベルに応じて多様な読み方が可能である。例えば，まったくの初歩からディジタル信号処理を学びたい場合には，「基礎編」から読み始めることが望ましい。一方，ある程度の基礎知識があれば，いきなり「発展編」あるいは「応用編」を読んでも，十分に読みこなすことができる。また，「基礎編」から読み始める場合でも，「基礎編」，「発展編」，「応用編」の順に読み進めるだけではなく，「基礎編」，「応用編」，「発展編」の順とすることも可能であるので，読者の興味に応じて読み進めて頂きたい。

幸い，本ライブラリーについては，各方面の第一線で活躍中の多くの方々に執筆して頂くことができたので，読者の期待にこたえられる内容になっていると確信している。

「ディジタル信号処理」の分野は，理論および応用技術ともに急速な勢いで発展を続けているので，今後は，状況に応じて「ディジタル信号処理ライブラリー」に新しい分野を追加し，本ライブラリーを，内容的にもさらに充実したものにしてゆくことを予定している。

最後に，本ライブラリーの刊行にあたって多大の御尽力を頂いた，コロナ社の方々に深く感謝の意を表する。

1996年1月

企画・編集責任者　谷萩　隆嗣

ま　え　が　き

人間の音声波形や地震波あるいは建築物が揺れたときの波形など，われわれの身近なものの中で，出力信号しか直接には観測できないものが少なくない。このような場合には，あらかじめ線形モデルを仮定して，出力信号だけを利用して線形モデルの次数や係数を推定することが考えられる。このようなモデルの代表的な例として，AR モデル（自己回帰モデル：autoregressive model），MA モデル（移動平均モデル：moving average model）および ARMA モデル（自己回帰移動平均モデル：autoregressive moving average model）などがよく知られている。AR システムや MA システム，ARMA システムは，それぞれ AR モデル，MA モデル，ARMA モデルで表すことができる。

これらのモデルを仮定して線形モデルの係数すなわち未知パラメータの推定を行うときに生じる大きな問題は，入力が未知であることである。この場合，AR 部（伝達関数の分母）の推定は比較的容易であるが，MA 部（伝達関数の分子）の推定は非常に困難となる。しかし，線形システムの場合には，これらのモデルは対象としているシステムの本質的な部分を表していると考えられるので，モデルを正確に推定できれば未知入力のロバストな推定が可能となる。

しかし，伝達関数の分子多項式が不安定多項式の場合，すなわち伝達関数の零点が単位円の外に存在する非最小位相システムでは，逆システムが不安定となってしまうので，逆システムを利用して未知入力を推定することは不可能である。この場合には安定な近似逆システムを利用すれば未知入力を容易に推定することができる。しかも，近似逆システムの次数を高くすれば，任意の精度で未知入力を正確に推定することが可能となる。

本書では，統計的信号処理を利用して線形モデルを推定し，それを使用して未知入力を推定する方法を詳しく説明する。特に，非最小位相システムの場合

にも未知入力が推定できるようにするために種々の近似逆システムの設計方法を述べる。近似逆システムによる未知入力推定の具体的な応用例として，声帯音源波の推定方法およびその推定結果を示す。さらに，近似逆システムの応用例として，非最小位相システムの適応制御について詳しく説明する。

第1章では，統計的信号処理に必要な種々の数学的基礎事項を説明する。最初に確率論の基礎について説明し，つぎに確率過程の基本的性質，相関関数とスペクトルなどについて詳細に述べる。

第2章では，線形システムのスペクトル推定について考え，最初に線形システムの相関関数とスペクトルの概念を説明する。つぎにAR，MA，ARMAの各システムのスペクトル推定を行うために，それらに対応した線形モデルの導入とARモデルを推定するための代表的な高速アルゴリズムについて述べる。また，FFTによる相関関数とスペクトルの推定，最大エントロピー法（maximum entropy method）によるスペクトルの推定について説明する。

第3章では，ARMAシステムのパラメータと未知入力の推定問題について考え，格子形フィルタを利用したARMAシステムの推定，逆システムを利用した最小位相ARMAシステムの推定，および近似逆システムを利用した非最小位相ARMAシステムの推定などを詳しく述べる。特に，近似逆システムの応用例として，声帯音源波の推定結果を詳細に説明する。

第4章では，非最小位相システムの適応制御問題を考え，近似逆システムを利用して非最小位相ARMAXシステムのセルフチューニング制御を行う方法について詳しく述べる。さらに，観測雑音が無視できる場合の非最小位相システムに対するモデル規範形適応制御について説明する。

以上，本書で述べている種々の推定アルゴリズムおよび近似逆システムは，統計的信号処理を行う場合には非常に有用であり，しかも多種多様な問題への応用が可能であるので，本書を十分有効に活用して頂きたいと希望している。

2008年5月

谷　萩　隆　嗣

目　　　　次

1. 確率と確率過程

2. 線形システムのスペクトル推定

3. ARMA システムのパラメータと入力の推定

4. 非最小位相システムの適応制御

1. 確率と確率過程

ディジタル信号処理の対象となるシステムでは，種々の不規則信号や雑音が加わっている場合，パラメータが不規則的に変動する場合などが少なくない。このような場合には，確率論，確率過程論および統計学などの結果を踏まえた議論が必要となってくる。本章では，いくつかの基本的な事項について簡単に説明する。これらは，統計的信号処理のための基礎として非常に重要である。

1.1 確率空間と確率変数

1.1.1 確率測度と確率空間

不規則信号のように不確定性を持つ信号や雑音の標本値を ω で表したとき，標本値の集まりを**標本空間**（sample space）と呼ぶ。したがって，標本空間 Ω の要素が標本値 ω となる。また，Ω の部分集合を $E_1, E_2, \cdots$ としたとき，集合体 $\mathcal{B}$ はつぎの 3 条件

① $\Omega \in \mathcal{B}$ (1.1)

② $E \in \mathcal{B}$ ならば $E^c \in \mathcal{B}$ (1.2)

③ $E_n \in \mathcal{B}$ $(n=1,2,\cdots)$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{B}$ (1.3)

を満たしているとする。ただし，E^c は E の補集合を表しており，$E^c = \Omega - E$ である。

このとき $\mathcal{B}$ を **σ 集合体**（σ-field）という。特に，n 次元ユークリッド空間の開区間のすべてとそれらの補集合，積，和の演算によって生成された最小の

σ 集合体を**ボレル集合体**（Borel field）と呼んでいる。ボレル集合体の要素は**ボレル集合**（Borel set）である。以下，$\mathcal{B}$ はボレル集合体であるとする。

条件①～③から，つぎの性質

④　$\phi=\Omega^c\in\mathcal{B}$　(1.4)

⑤　$\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n{}^c\right]^c\in\mathcal{B}$　(1.5)

⑥　$E_i\in\mathcal{B},E_j\in\mathcal{B}$ ならば $E_i^c\cap E_j=E_j-E_i\in\mathcal{B}$　(1.6)

が導かれる。ただし，ϕ は空集合を表す。

$\mathcal{B}$ 上で定義された集合関数 P がつぎの公理を満たすとき，P を $\Omega(\mathcal{B})$ 上の**確率測度**（probability measure）あるいは**確率分布**（probability distribution）という[(1)～(6)†1]。

公理 1.1（確率測度）

（1）　$P(E)\geqq 0,\quad E\in\mathcal{B}$　(1.7)

（2）　$E_n\in\mathcal{B}$ $(n=1,2,\cdots)$ がたがいに排反ならば，すなわち ϕ を空集合として，$E_i\cap E_j=\phi(i\neq j)$ ならば

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(E_n)\tag{1.8}$$

（3）　$P(\Omega)=1$　(1.9)

公理 1.1 からつぎの性質が導かれる。

（a）　$E_i\subset E_j$ のとき $P(E_j)\geqq P(E_i)$　(1.10)

（b）　$E_i\in\mathcal{B}$ のとき $0\leqq P(E_i)\leqq 1$　(1.11)

実際，$E_i\subset E_j$ のとき，$E_j=E_i\cup(E_j-E_i)$，$E_i\cap(E_j-E_i)=\phi$ であるので $P(E_j)\geqq P(E_i)$ となり，$E_j=\Omega$ と置けば $0\leqq P(E_i)\leqq 1$ が成立する。

以上の定義を用いて $\Omega,\mathcal{B},P$ を一つの組にしたとき，$(\Omega,\mathcal{B},P)$ を**確率空間**（probability space），$\mathcal{B}$ の要素を**事象**（event）という。

$\{E_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ が排反事象列で，E がその和事象のときには，公理 1.1 から

---

†1　肩付き数字は，巻末の引用・参考文献の番号を表す。

$$0 \leqq P(E) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) \leqq 1 \tag{1.12}$$

となるが，これを確率の加法性という。

特に，$P(E)=1$ ならば，事象 E が確率 1 で起こるという。また，明らかに $P(\phi)=0$ であるが，$P(E_i)=0$ であっても $E_i=\phi$ であるとは限らない。

1.1.2 確率変数と確率ベクトル

Ω で定義された実数値関数 $X \in R^1 = (-\infty, \infty)$ が $\mathcal{B}$ 可測であるとき，すなわち R^1 の任意のボレル集合 D に対して，$X(\omega)$ による D の原像 $X^{-1}(D) = \{\omega \mid X(\omega) \in D\}$ が $\mathcal{B}$ に属するとき，$X(\omega)$ を**確率変数**（random variable）という。このようにして，R^1 の任意の開区間 $I=(a, b)$ に対して，$X(\omega) \in I$ となる確率が定義される。

同様にして，n 個の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ をまとめて n 次元列ベクトル（$n \times 1$ ベクトル）で表し，Ω から n 次元ユークリッド空間 R^n への写像 $\boldsymbol{X}$ を考えるとき，$\boldsymbol{X}$ が $\mathcal{B}$ 可測であれば，$\boldsymbol{X}(\omega)$ を**確率ベクトル**（random vector）と呼ぶ。われわれが通常扱う関数はすべて $\mathcal{B}$ 可測であると考えてさしつかえない。

$x \in R^1$ が任意の実数のとき，$f(x) \in R^1$ が連続関数であるとすれば，確率変数 $X(\omega)$ に対して $f(X(\omega))$ も確率変数となる。これは $\boldsymbol{X}(\omega)$ が確率ベクトルの場合にもまったく同様である。

注 1.1 以下においては，ω を省略して，確率変数を $X, Y, \cdots$，確率ベクトルを列ベクトル $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \cdots$ で表し，それらの標本値を $x, y, \cdots$ および $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \cdots$ で表すことにする。例えば，$\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{x}$ が $n \times 1$ ベクトルのとき，それらの k 番目の要素を X_k, x_k とすれば，$\boldsymbol{X} = [X_1, X_2, \cdots, X_n]^T$，$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$ と表される。ただし，T は転置を表す。

1.2 確率分布関数と確率密度関数

1.2.1 確率分布関数

任意の実数 x に対して

$$F(x)=P(X \leqq x) \tag{1.13}$$

と置くと，$F(x)$ は x の右連続な非減少関数で

$$\lim_{x\to\infty} F(x)=1 \tag{1.14 a}$$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=0 \tag{1.14 b}$$

が成り立つ。このとき，$F(x)$ は確率変数 X の**確率分布関数**（probability distribution function）と呼ばれている。$F(x)$ の不連続点はたかだか可算個であり，ほとんどいたるところで微分可能である。

$\boldsymbol{X}$ が $n\times 1$ ベクトルの場合には，まったく同様にして

$$F(\boldsymbol{x})=P(\boldsymbol{X} \leqq \boldsymbol{x})=P(X_1 \leqq x_1, X_2 \leqq x_2, \cdots, X_n \leqq x_n) \tag{1.15}$$

で確率分布関数 $F(\boldsymbol{x})$ が定義される。ここで $F(\boldsymbol{x})$ は確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の**結合確率分布関数**（joint probability distribution function）とも呼ばれている。

注 1.2　確率変数 X が離散的な実数値しかとらない離散的確率変数の場合には，$F(x)$ は階段関数となる。例えば，X の実現値が x_k $(k=1,2,\cdots,N)$ だけの場合には，$P(X=x_k)$ $(k=1,2,\cdots,N)$ によって確率分布が与えられる。

1.2.2 確率密度関数

X が連続的確率変数で

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(\xi)\,d\xi \tag{1.16 a}$$

$$p(x)=\frac{\partial F(x)}{\partial x} \geqq 0 \tag{1.16 b}$$

が存在すれば，$p(x)$ を X の**確率密度関数**（probability density function）と

いう。

また，$\boldsymbol{X}$ が連続的確率ベクトルの場合には

$$F(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{\boldsymbol{x}} p(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi} = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} p(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)\, d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n \tag{1.17 a}$$

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^n F(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} \geqq 0 \tag{1.17 b}$$

を満たす $p(\boldsymbol{x})$ が確率密度関数である。ここで $p(\boldsymbol{x})$ は確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の**結合確率密度関数**（joint probability density function）と呼ばれている。

注 1.3　A. N. Kolmogorov による測度論に基づいた確率論では，積分はすべてルベーグ（Lebesgue）積分であるが，実際にはリーマン（Riemann）積分とみなして議論しても，不都合を生じない場合が多い。

1.3　条件付き確率とベイズの法則

1.3.1　条件付き確率

確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ における二つの事象，$A \in \mathcal{B}, B \in \mathcal{B}$ を考え，$P(A) > 0$ とすれば

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{1.18}$$

が成立し，$P(B \mid A)$ は事象 A が生起したときの事象 B の**条件付き確率**（conditional probability）を表している。

式（1.18）で

$$P(A \cap B) = P(A) P(B) \tag{1.19}$$

が成り立てば，事象 A と B はたがいに**独立**（independent）であるという。したがって，A と B が独立であるとすれば

$$P(B \mid A) = P(B) \tag{1.20}$$

となる。

これを一般化して，有限事象列 $\{E_n\}(n=1,2,\cdots,N)$ に適用すれば，任意の $1\leqq k\leqq N$ と任意の $1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_k\leqq N$ に対して

$$P(E_{1i}\cap E_{2i}\cap\cdots\cap E_{ki})=\prod_{j=1}^{k}P(E_{ji}) \tag{1.21}$$

が成り立つとき，$E_1,E_2,\cdots,E_N$ はたがいに独立である。ただし，$E_{ji}(j=1,2,\cdots,k)$ は $m=i_j(j=1,2,\cdots,k)$ のときの E_m を表す。

1.3.2 ベイズの法則

式（1.18）で A と B の役割を交換すれば

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(A\,|\,B)P(B)}{P(A)} \tag{1.22}$$

が得られる。そこで，式（1.22）を一般化すれば，事象 $B_i\ (i=1,2,\cdots,N)$ がたがいに排反であり，$P(A)>0$，$B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_N=\Omega$ であるとき

$$P(B_i\,|\,A)=\frac{P(A\,|\,B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{N}P(A\,|\,B_j)P(B_j)},\quad i=1,2,\cdots,N \tag{1.23}$$

が成立する。式（1.22），（1.23）は**条件付き確率分布関数**を表している。

式（1.22），（1.23）の等式は**ベイズの法則**（Bayes' rule）あるいは**ベイズの定理**（Bayes' theorem）と呼ばれている。

つぎに，確率密度関数について考えるために，$\Delta x>0$ として $A=\{x<X\leqq x+\Delta x\}$，$B=\{Y\leqq y\}$ と置けば，X と Y が連続的確率変数のとき

$$P(Y\leqq y\,|\,x<X\leqq x+\Delta x)=\frac{P(x<X\leqq x+\Delta x,\,Y\leqq y)}{P(x<X\leqq x+\Delta x)} \tag{1.24}$$

と表されるので，$\Delta x\to 0$ とすれば

$$P(Y\leqq y\,|\,X=x)=\frac{1}{p(x)}\int_{-\infty}^{y}p(x,\eta)\,d\eta \tag{1.25}$$

が得られる。ただし，$p(x)>0$ とする。

このとき

$$p(y\,|\,x)=\frac{\partial}{\partial y}P(Y\leqq y\,|\,X=x)=\frac{p(x,y)}{p(x)} \tag{1.26}$$

索　　引

—— 著 者 略 歴 ——

1966 年　東京工業大学理工学部電子工学科卒業
1971 年　東京工業大学大学院理工学研究科
　　　　電子工学専攻（博士課程）修了，工学博士
1971 年　千葉大学講師
1974 年　千葉大学助教授
1984 年　千葉大学教授
2008 年　信号処理技術研究所所長
　　　　現在に至る

ARMA システムとディジタル信号処理

ARMA Systems and Digital Signal Processing

2008 年 7 月 23 日　初版第 1 刷発行

検印省略

著　者　谷　萩　隆　嗣
発 行 者　株式会社　コ ロ ナ 社
　　　　代 表 者　牛 来 辰 巳
印 刷 所　新日本印刷株式会社

112-0011　東京都文京区千石 4-46-10
発行所　株式会社　**コ ロ ナ 社**
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo　Japan
振替 00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)
ホームページ　http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978-4-339-01126-5　（中原）　（製本：染野製本所）
Printed in Japan