

ま え が き

数理計画法は、数学的手法に基づいて、与えられた制約条件の下で、目的関数を最大化（または最小化）するものである。数理計画法は、ノードとリンクから構成される通信ネットワークにおける設計・制御の問題に適用できる。例えば、通信ネットワークとリンクの容量が制約条件として与えられた場合、ある発ノードから着ノードへ転送可能なトラフィック流量を最大化するような経路を決定する問題がある。また、リンクのコスト（費用）とある発ノードから着ノードへのトラフィック需要が与えられた場合、最も安い費用でトラフィックを流す経路を決定する問題がある。これらの問題に対する数理計画法は、通信ネットワークだけでなく、日常生活においても、電車や道路のルート検索で使われている。

大学での講義用を含め、数理計画法やその通信ネットワークへの応用例について、工学部専門課程の学生に対応した良い入門書が多く出版されている。これら出版された本の多くは、与えられた問題を理論的に解くことができるように数学的手法を解説したものである。また、通信ネットワークに関する本では、通信ネットワークにおける設計・制御の問題を、数理計画法により解くことができる形に定式化し、ネットワークへの適用例を示してきた。

実際の通信ネットワークを設計・制御する実践の状況においては、通信ネットワークの技術者は、通信ネットワークの問題を、数理計画法が適用できる問題に定式化し、公開・市販されている数理計画ソフトウェアを使用して、その問題をコンピュータを用いて解く場合がほとんどである。筆者は、通信ネットワークの設計・制御に向けて、理論と実践のギャップを埋められるよう数理計画法を活用するやり方を解説するテキストを提供したいという観点から、本書を執筆することにした。

本書では、通信ネットワークへの適用に向けて、数理計画解法ソフトウェアを用いて、実践的に、数理計画法とその活用法を解説する。線形計画問題の解法ツールとして、フリーソフトウェアである GLPK (GNU Linear Programming Kit) を使用する。通信ネットワークにおける数理計画問題に対して、GLPK 向けに書かれたプログラム、GLPK による解法例を示すことにより、読者の理解を深める。さらに、数理計画問題による解法アプローチのほかに、それぞれの問題に対する代表的かつ実用的な解法例もできる限り紹介する。

本書はおもに、通信・ネットワーク工学を学ぶ専門課程の大学生・大学院生や通信ネットワーク技術に携わる技術者を対象としている。筆者は、教鞭をとっている大学で、通信ネットワークに関して、大学生・大学院生を対象とした講義・演習、および研究を行っている。本書は、大学の講義内容を拡充し、先端的研究の内容も反映して、執筆したものである。

1章～3章では、通信ネットワークに関する問題を扱うために、準備として、通信ネットワークの諸問題、線形計画法、線形計画法を解くソフトウェアツールを扱う。1章では、最短経路問題をはじめとする通信ネットワークに関する数理計画問題について述べる。2章では、数理計画法の基本である線形計画法について、具体的な例を挙げながら説明する。3章では、線形計画法を解くソフトウェアツール、GLPK について解説する。4章では、おもに線形計画法が適用できる、基本的な通信ネットワークに関する問題（最短経路問題、最大流問題、最小費用流問題）について述べる。各種問題に対し、定式化、GLPK による解法、関連アルゴリズムについて説明する。4章までは、本書で述べた例題に対して実際にソフトウェアを動作させて問題を解くと、通信ネットワーク技術に関する理解が深まるはずであり、大学生が十分に理解できるように執筆している。5章と6章では、発展的な問題について述べており、大学院生向けの内容や先端的な研究内容を含んでいる。5章では、発展的な通信ネットワークに関する問題（独立経路探索問題、波長割当て問題など）について述べる。6章では、いくつかのトラフィック需要モデルに対して、ネットワークの混雑を最小化する問題を扱う。7章では、IP (Internet Protocol) ネットワークにおける

経路選択問題を扱う。

本書で例示したプログラムは、コロナ社の Web ページ(<http://www.coronasha.co.jp>) の本書の書籍紹介ページを開き、「本書で例示しているプログラム」から取得可能である。

最後に、本書を執筆するにあたり、具体例や例題の作成にご協力いただいた電気通信大学の Nattapong Kitsuwon 博士に深く感謝する。講義・演習や研究活動を通じて、教材として用いた本書の草稿に対して、学生諸君から多くのフィードバックやコメントをもらった。ここに感謝の意を表したい。本書を出版するにあたり、多大なご協力をいただいたコロナ社の関係各位に厚く御礼申し上げます。

2012 年 1 月

電気通信大学 大木 英司

目 次

1. 通信ネットワークと数理計画問題

1.1 最短経路問題	2
1.2 最大流問題	2
1.3 最小費用流問題	4

2. 数理計画法の基本

2.1 最適化問題	6
2.2 線形計画問題	8
2.3 シンプレックス法	17
2.4 双対問題	21
2.5 整数線形計画問題	25
章末問題	27

3. GLPK

3.1 GLPKの入手とインストールの確認	29
3.2 GLPKの使用例	30
章末問題	33

4. 基本的な通信ネットワーク問題

4.1 最短経路問題	35
4.1.1 線形計画問題	35
4.1.2 ダイクストラ法	46
4.1.3 ベルマン・フォード法	50
4.2 最大流問題	53
4.2.1 線形計画問題	53
4.2.2 フロー増加法	60
4.2.3 最大流量と最小カット	62
4.3 最小費用流問題	64
4.3.1 線形計画問題	64
4.3.2 負閉路消去法	71
4.4 最短経路問題, 最大流問題, 最小費用流問題の関係	74
章末問題	75

5. 発展的な通信ネットワーク問題

5.1 独立経路探索問題	77
5.1.1 整数線形計画問題	77
5.1.2 独立最短経路ペア法	81
5.1.3 Suurballe 法	83
5.2 共有リスクリンク群を考慮した独立経路探索問題	85
5.2.1 整数線形計画問題	85
5.2.2 共有リスクリンク群重み付け独立経路探索法	92
5.3 光パスネットワークにおける波長割当て問題	95

5.3.1	光パスネットワーク	95
5.3.2	波長割当て問題	96
5.3.3	グラフ彩色化問題	98
5.3.4	整数線形計画問題	99
5.3.5	高ノード次数優先法	101
章 末 問 題		103

6. トラヒック需要モデルと経路選択問題

6.1	パイプモデル	104
6.2	ホースモデル	106
6.3	HSDT モデル	112
6.4	HLT モデル	117

7. IP ネットワークにおける経路選択問題

7.1	ルーティングプロトコル	122
7.2	リンクの重みと経路選択	124
7.2.1	混合整数計画問題	126
7.2.2	タブー探索法	128
7.3	ネットワーク故障を考慮した予防的リンク重み決定法	132
7.3.1	リンク重み決定方式	132
7.3.2	PSO のモデル	133
7.3.3	PSO-L	134
7.3.4	PSO-W	138

付	録	144
A.1	式 (6.7 a)~(6.7 c) の導出	144
A.2	式 (6.12 a)~(6.12 c) の導出	145
A.3	式 (6.16 a)~(6.16 d) の導出	147
引用・参考文献		149
章末問題解答		153
索	引	161

1

通信ネットワークと数理計画問題

通信ネットワークは、ノードとリンクから構成される。図 1.1 に通信ネットワークモデルの一例を示す。ノード 1 からノード 6 まで 6 個のノードがあり、ノード間に矢印が描かれている。例えば、ノード 1 からノード 2 に向かって接続されている矢印を、ノード 1 からノード 2 に向かうリンクと呼ぶ。その矢印の方向に、通信するもの（トラヒックと呼ぶ）がリンク上に流れることが許される。図 1.1 のように、矢印のあるリンクで表記されたネットワークを有向グラフと呼ぶ。リンクごとに付与されている数字は、距離を示す。なお、リンクに矢印がない場合は、リンク上でどちらの方向にもトラヒックを流すことができることを意味する。リンクの方向を考慮しないネットワークを無向グラフと呼ぶ。

本章では、最短経路問題をはじめとする通信ネットワークに関する数理計画問題を紹介する。

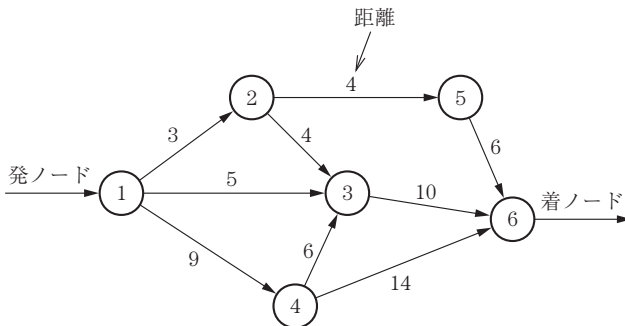


図 1.1 リンクの距離を考慮した通信ネットワークモデルの一例

1.1 最短経路問題

図 1.1 のネットワークにおいて、ノード 1 からノード 6 まで、トラヒックを流すための最短経路を求めることを考える。ノード 1 を発ノード、ノード 6 を着ノードと呼ぶ。ネットワークとリンクごとの距離が与えられて、発ノードから着ノードまでの最短経路を求める問題を、最短経路問題と呼ぶ。最短経路問題を解いた結果、解である最短経路を図 1.2 に示す。最短経路は $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6$ であり、経路長は $3 + 4 + 6 = 13$ である。

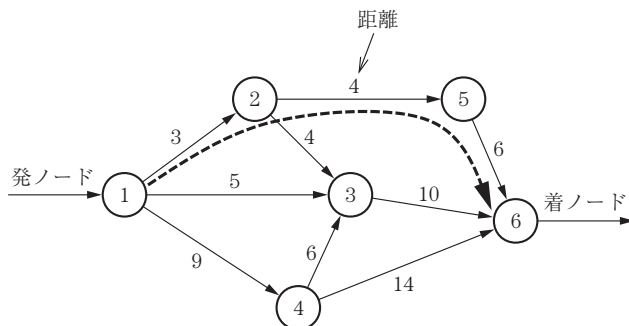


図 1.2 最短経路

1.2 最大流問題

図 1.3 に、リンク容量を考慮したネットワークを示す。各リンクに付与されている数字は、リンク容量を示す。リンク上を流れるトラヒック量はリンク容量を超えてはならない、という制約条件を考慮する。リンク容量の制約条件の下で、ノード 1 からノード 6 まで流すことが可能なトラヒック量 v を最大化する経路と流量を求める問題を、最大流問題と呼ぶ。図 1.4 に、最大流問題の解を示す。最大流量は、 $v = 195$ である。経路と各経路に流すトラヒック量は、経路 1 ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6$) にトラヒック量 $v_1 = 15$ 、経路 2 ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 6$) にトラヒック量

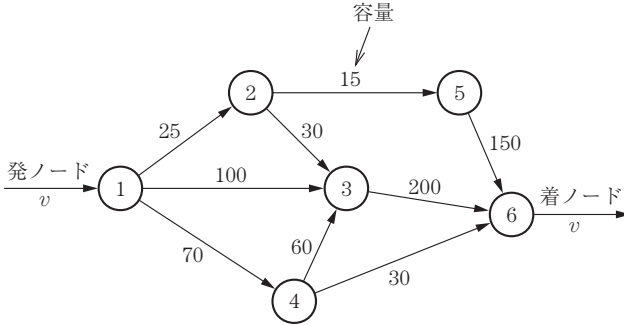


図 1.3 リンクの容量を考慮したネットワーク

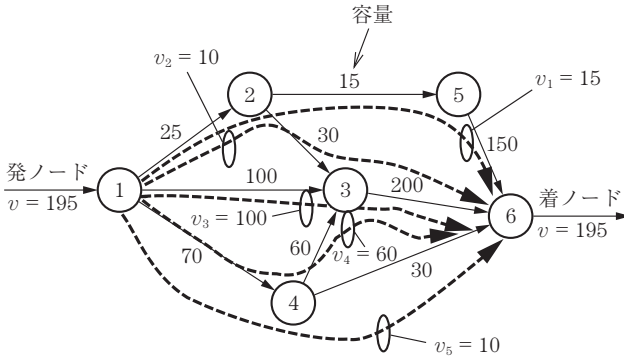


図 1.4 最大流経路

$v_2 = 10$, 経路 3 ($1 \rightarrow 3 \rightarrow 6$) にトラヒック量 $v_3 = 100$, 経路 4 ($1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 6$) にトラヒック量 $v_4 = 60$, 経路 5 ($1 \rightarrow 4 \rightarrow 6$) にトラヒック量 $v_5 = 10$ である。ここで, $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 15 + 10 + 100 + 60 + 10 = 195$ である。図 1.4 において, 各リンク上を流れるトラヒック量を調べると, リンク容量を超えていないことがわかる。例えば, リンク (1, 2) (ノード 1 からノード 2 のリンク) では, リンク上を流れるトラヒック量は, $v_1 + v_2 = 25 \leq 25$ (リンク (1, 2) の容量) である。また, リンク (3, 6) では, リンク上を流れるトラヒック量は, $v_2 + v_3 + v_4 = 10 + 100 + 60 = 170 \leq 200$ (リンク (3, 6) の容量) である。

1.3 最小費用流問題

図 1.5 に、リンクの距離と容量を考慮したネットワークモデルを示す。各リンクに付与されている二つの数字は、リンクの距離と容量を示す。リンク上を流れるトラヒック量はリンク容量を超えてはならない、という制約条件を考慮する。リンク容量の制約条件の下で、ノード 1 からノード 6 まで流すトラヒック量 $v = 180$ が与えられたとき、最小の費用でトラヒックを流す経路と流量を求める問題を、最小費用流問題と呼ぶ。最小費用流問題では、各リンクで要する費用は、(リンクの距離 \times 当該リンク上を通過するトラヒック量) で定義され、すべてのリンクで要する費用の合計が最小となるように経路と流量を求める。

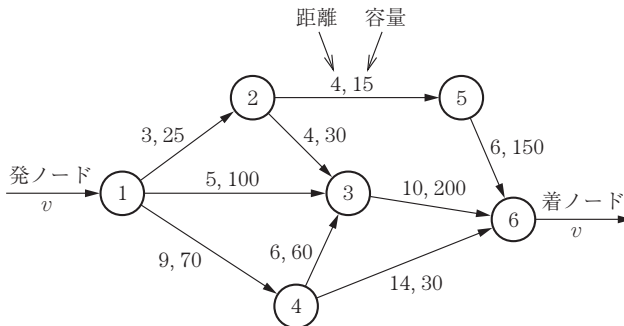


図 1.5 リンクの距離と容量を考慮したネットワーク

図 1.6 に、最小費用流問題の解を示す。経路と各経路に流すトラヒック量は、経路 1 ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6$) にトラヒック量 $v_1 = 15$ ，経路 2 ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 6$) にトラヒック量 $v_2 = 10$ ，経路 3 ($1 \rightarrow 3 \rightarrow 6$) にトラヒック量 $v_3 = 100$ ，経路 4 ($1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 6$) にトラヒック量 $v_4 = 25$ ，および経路 5 ($1 \rightarrow 4 \rightarrow 6$) にトラヒック量 $v_5 = 30$ である。ここで、 $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 15 + 10 + 100 + 25 + 30 = 180$ である。最小費用は、3180 である。図 1.6 に

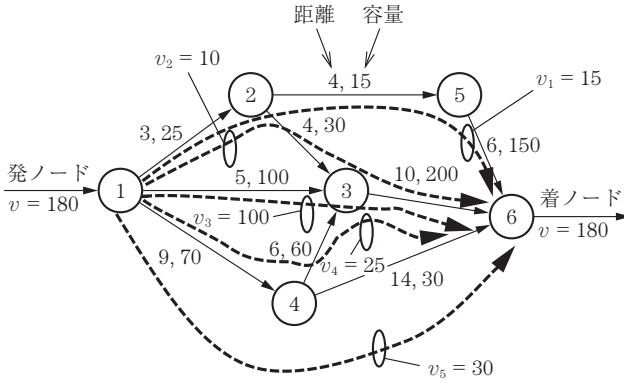


図 1.6 最小費用経路

において、各リンク上を流れるトラフィック量を調べると、リンク容量を超えていないことがわかる。

2

数理計画法の基本

最適化問題とは、与えられた制約条件の下で、実行可能なすべての解の中から、目的関数を最小化または最大化する解（最適解という）を求めることである。最小化の例では、地点 A から地点 B に移動するとき、最も移動時間が短い経路を求める、という最適化問題がある。最大化の例では、生産工場において、倉庫にある材料を用いて、利益が最大となるように製品を生産する、という最適化問題がある。数理計画法は、数学的手法に基づき、数理モデルで表された最適化問題に対して最適解を求める方法である。

本章では、数理計画法の基本である線形計画法 (linear programming) について、具体的な例を挙げながら説明する。

2.1 最適化問題

地点 A にいるビジネスマンが、地点 B での会議に出席するために、移動手段として、飛行機、または列車を用いて、以下の条件で最も安く地点 A から地点 B に移動する手段を考える。

- 条件 1：片道の運賃は、150 ドルを超えてはならない。
- 条件 2：地点 B に午前 11:10 までに到着する。
- 条件 3：地点 A を午前 8:00 以降に出発する。

ビジネスマンは、表 2.1 に示す飛行機と列車の時刻表を調べる。8 通りの選択肢があり、その中から、条件を満足する最も安い移動手段を選択する。すべての選択肢は運賃が 150 ドル以下であるので、条件 1 を満足している。条件 2

索引

【お】
 オブリビアスルーチング 107

【か】
 下 界 14
 カットの容量 63

【き】
 境 界 8, 9
 共有リスクリンク群 85, 86

【く】
 グラフ彩色化問題 98

【け】
 決定変数 7
 限定的な候補 133

【こ】
 高ノード次数優先法 101
 広範囲な候補 133
 混合整数計画問題 126
 混合整数線形計画問題 25

【さ】
 最小カット 63
 最小費用流問題 4
 最大流問題 2
 最大流量 63
 最短経路問題 2
 最適解 6, 17
 最適化問題 6

【し】
 実行可能領域 14
 出力ファイル 30
 主問題 23
 上 界 14
 シンプレックス法 17

【す】
 数理計画問題 1

【せ】
 正準形 10, 11
 整数線形計画問題 25
 制約条件 7
 線 形 9
 線形計画問題 8

【そ】
 双対定理 23
 双対変数 23
 双対問題 21, 23

【た】
 ダイクストラ法 46
 タブー探索法 128
 多面集合 15
 端 点 14

【ち】
 超平面 15

【つ】
 通信ネットワーク 1

【と】
 独立経路探索問題 77
 独立最短経路ベア法 82
 トラヒック需要 104

【に】
 入力ファイル 41

【ね】
 ネットワーク混雑率 105

【は】
 パイプモデル 104
 波長分割多重方式 95
 波長割当て問題 96

【ひ】
 光クロスコネクト 95
 光パスネットワーク 95
 非線形計画問題 9
 標準形 13

【ふ】
 負閉路消去法 71
 フロー増加法 60

【へ】
 ベルマン・フォード法 50

【ほ】
 ホースモデル 107

【も】		【よ】	【る】
目的関数	7	余裕変数	12
モデルファイル	30		ルーティングプロトコル 122
◇			
【C】		IP ネットワーク	95
canonical form	10	IP パケット	122
【D】		IP ルータ	95
Dantzig	17	IS-IS	123
dual problem	23	【L】	
dual theorem	23	largest degree first 法	101
dual variable	23	LDF 法	101
【G】		limited candidate	133
GLPK	29	linear programming	
GNU Linear Programming Kit	29	problem	8
【H】		【M】	
HLT モデル	117	mixed integer linear	
Hose Model with Bounds of Source-Destination Traffic Demands	112	programming problem	25
Hose Model with Link-Traffic Bounds	117	【N】	
HSDT モデル	112	n 次元	15
【I】		【O】	
integer linear programming problem	25	oblivious routing	107
Intermediate System to Intermediate System	123	Open Shortest Path First	123
Internet Protocol	122	OSPF	123
IP	122	【P】	
		Preventive Start-Time Optimization	132
		primal problem	23
		PSO	132
		PSO-L	133
		PSO-W	133
		【R】	
		RIP	123
		RO	132
		Routing Information Protocol	123
		Run-Time Optimization	132
		【S】	
		shared risk link group	86
		simplex method	17
		slack variable	12
		SO	132
		SRLG	86
		standard form	13
		Start-Time Optimization	132
		Suurballe 法	83
		【W】	
		wavelength division multiplexing 方式	95
		WDM 方式	95
		Weighted SRLG 法	92
		wide-range candidate	133
		WSRLG 法	92

— 著者略歴 —

1991年 慶應義塾大学理工学部計測工学科卒業
1993年 慶應義塾大学大学院修士課程修了（計測工学専攻）
1993年 日本電信電話株式会社入社
1999年 博士（工学）（慶應義塾大学）
2000年
～01年 米国 Polytechnic 大学客員研究員
2008年 電気通信大学准教授
現在に至る

通信ネットワークのための数理計画法

Mathematical Programming for Communication Network

© Eiji Oki 2012

2012年3月15日 初版第1刷発行

★

検印省略

著者 おおきえいじ
大木英司
発行者 株式会社 コロナ社
代表者 牛来真也
印刷所 三美印刷株式会社

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)

ホームページ <http://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-00828-9（大井）（製本：愛千製本所）

Printed in Japan



本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めておりません。

落丁・乱丁本はお取替えいたします