まえがき

本書は，土木・環境系で土木工学を学ぼうとしている学部学生を読者として想定した，力学の教科書である。力学といっても内容は多岐にわたるが，ここでは，学部 1 年生が半期で学習する物理学における力学の範囲を対象とした。土木工学を専門とする技術者において習得が必須と思われる構造力学では，力を受ける構造物の応答，とりわけ構造物を構成する部材に生じる力を，力のつり合いや変形を考えることによって求める。本書では，そのような専門的な力学を学ぶにあたって，準備しておくべき力学の基礎・エッセンスを，著者の能力の限り理解しやすいように整理した。

著者自身は，執筆時，在籍する東北大学で学部 1 年生の力学の講義を担当しているわけではなく，むしろ，土木工学の専門課程の入口にある 2 年生向けの空間創造の力学あるいは構造解析学と称する構造力学に関する講義を担当している。したがって，そのような立場から，構造力学を学ぶにあたって習得しておいてほしい内容を本書に含めた。構造力学ではおもに静力学を取り扱うため，そのための基礎としては，本書の 1 章，2 章の一部，6 章が対応する。1 章では力学の最も基礎となる，力のつり合いと力のベクトルとしての表現について，2 章では，変位などの運動の状態を表す方法と運動の法則について述べた。6 章では，剛体の力のつり合いとモーメントについて述べた。また，地震応答解析を含む構造物の振動解析においては，動力学が必要となる。この基礎には，2 章から 5 章が対応する。3 章では運動を観測する観測者について，4 章では仕事とエネルギーについて，5 章では運動量とその保存則について，それぞれ述べた。一方で，一般教養の力学の内容として剛体の動力学も必要と考え，これを

7 章および 8 章で説明した。7 章では角運動量とその保存則について，8 章では剛体の並進運動と回転運動について述べた。

力学の教科書は数多く存在し，かつ名著といわれる書籍（例えば参考文献 1), 2)）もある中で，今回改めて自分が書くということについてつねに自問自答しつつ，時には楽しく時には苦しみながら本書を執筆した。また，現在担当している講義の講義ノートをもとにしたわけでもないので，新しい講義を担当することになったつもりで，受講者の反応をあれこれ想定しながら書いた。力学に登場する法則や公式を効率良く頭に入れることよりむしろ，説明不可能な基本法則以外は読者自身が基本法則から導けるようになること，そして，その誘導の過程から力学の考え方を体得できることを目標とし，それが本書の特徴となるように考えた。したがって，他の力学の教科書よりもかなり回りくどい記述になっている箇所が多々あると思う。また，本文に置くことをあきらめた，いくつかのさらに回りくどい説明は，演習問題や解答の中に含めた（例えば〔1.3〕や〔4.5〕など）。問題の解き方を単に身につけるだけでなく，考えさせる問題や証明問題などを通じて，視点を広げ，センスを身につけてほしいと考えている。したがって，演習問題もすべて目を通してほしい。

最後に，編集委員の早稲田大学教授 依田照彦先生，本書執筆の機会を与えてくださった中央大学教授 樫山和男先生，そしてコロナ社には，本書執筆に関してたいへんお世話になりました。ここに深く感謝いたします。

2012 年 7 月

斉木　功

目　次

6 章　剛体の力のつり合い

7 章　角運動量と角運動量保存則

8 章　剛 体 の 運 動

1章 力のつり合いとベクトル

◆本章のテーマ

本章では，1 点に作用する力のつり合いについて，および，力がベクトルであることについて学ぶ。力がつり合っているということは，質点に作用する力の総和がゼロになっていることであり，それは簡単な数式で表すことができる。力はベクトルとして表現できるため，それらの合成や分解，あるいは和や差は代数和として表すことが可能である。このために，多次元空間における力学問題を簡潔に記述することができる。

◆本章の構成（キーワード）

1.1　質点の力のつり合い
　　質点，力，つり合い，力ベクトル
1.2　ベクトルの合成と分解
　　ベクトルの合成，ベクトルの分解，力の平行四辺形
1.3　ベクトルと座標系
　　ベクトルの成分，座標系，基底ベクトル，座標変換

◆本章を学ぶと以下の内容をマスターできます

☞ 力のベクトルとしての表現
☞ 質点に作用する力のつり合い
☞ 力のつり合いをベクトルを用いた数式で記述する
☞ 複数のベクトルを一つに合成する
☞ 一つのベクトルを任意の数のベクトルに分解する
☞ ベクトルそのものとベクトルの成分の違い
☞ ベクトルの成分と，座標系と基底ベクトルの関係

1.1 質点の力のつり合い

質点（mass point もしくは particle）とは，質量はあるが大きさのない物体のことである。もちろん，現実の世界には大きさのない物体など存在しないが，力学においては，物体の運動を考える上で，「大きさがない」という特徴にはたいへん都合が良いことがある。

1.1.1 力のつり合い

ある静止した物体を動かすにはどうしたらよいだろうか。当然のことであるが，なんらかの力を加える必要がある。逆にいえば，力が作用していない物体は，静止し続ける[†1]。例えば道端に落ちている石ころは，蹴飛ばしたりして力を加えない限り，動かずに静止している。では，石ころに力は作用していないのであろうか。答えは No である。地球上の物体には万有引力の法則から，地球との間の引力，すなわち重力が働いている。ではなぜ静止しているのかといえば，石ころは地面からも**垂直抗力**（normal force もしくは normal reaction）[†2]という力を受けていて，それが重力と「つり合って」おり，結果的に力が作用していない状況と同じだからである。つまり，「力が作用していない物体は静止し続ける」は「作用している力がつり合っている物体は静止し続ける」と理解してもよいことになる。

いま，簡単のために，力が鉛直方向にのみ作用する状況を考えてみよう。重力を f_{g}，垂直抗力を f_{r} と表すことにすると，力がつり合っているということは

$$f_{\mathrm{g}} + f_{\mathrm{r}} = 0 \tag{1.1}$$

が成立するということであり，この式は**つり合い式**（equilibrium equation）といわれる。上式は，石ころに作用している力の合計がゼロという意味である。

[†1] あとで説明する運動の法則から，力が作用していない物体の加速度はゼロということになり，必ずしも静止しているとは限らない。ここでは，話を簡単にするために，もともと静止している物体に話を限定している。

[†2] この力は，石ころに作用する重力が地面を押す力に対して，地面が石ころを押し返す力である。reaction は**反力**と呼ばれ，したがって，垂直抗力は**垂直反力**とも呼ばれる。

石ころの質量 m と重力加速度 g がわかっており，すなわち，石ころに作用する重力が $f_{\mathrm{g}} = mg$ であるとわかっているとすると，つり合い式 (1.1) から，$f_{\mathrm{r}} = -f_{\mathrm{g}} = -mg$ がわかる。このように，力学において，つり合い式は物体に作用する力を明らかにする最も重要な関係の一つである。

さて，石ころを質点に読み替え，また，作用する力も二つとは限らないので，n 個の力 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ が作用している場合を考えよう。この場合，つり合い式は

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n = 0 \quad \text{あるいは} \quad \sum_{i=1}^{n} f_i = 0 \tag{1.2}$$

と表される。

なお，力を f のような数学記号で表してしまうと，無機質な印象を受けるが，力はあくまでも力という物理的な次元を持っていることを忘れないようにしよう。また，力の次元を物理における基本的な次元である［質量］，［長さ］，［時間］で表現すると

$$（\text{力}）= \frac{［\text{質量}］\cdot［\text{長さ}］}{［\text{時間}］^2}$$

である。また, 基本的な次元である質量, 長さ, 時間は, **国際単位系**（international system of units, SI）ではそれぞれ〔kg〕(キログラム), 〔m〕(メートル), 〔s〕(秒) を使うことになっているので, 力の単位はそれらを用いた組立単位で〔$\mathrm{kg \cdot m/s^2}$〕となる。また，常用される組立単位については，固有の名称と記号も定められており，力の単位には〔N〕（ニュートン）を用いることもできる。

〔1〕 ばねで固定された質点　　**図 1.1** (a) に示すばねに固定された質点の力のつり合いを考えてみよう。質点の質量を m とし，下向きの重力加速度 g が作用しているとする。ばね定数を k とし，ばねが自然長（ばねに力が生じていないときの長さ）のときの質点の位置を原点とし，ばねが伸びる方向を正として質点の位置を y とする。ばねに生じる力 f_{s} は，**フックの法則**（Hooke's law）により，ばね定数 k とばねの伸び δ を用いて

$$f_{\mathrm{s}} = k\delta \tag{1.3}$$

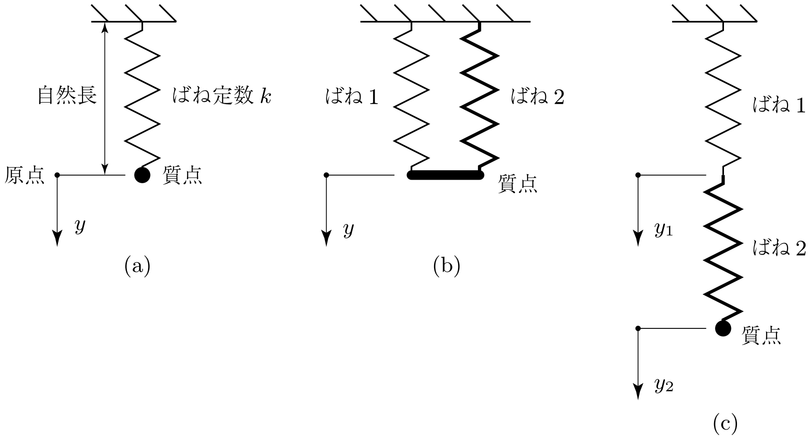

図 1.1 ばねに固定された質点

と表される。ここで，f_{s} をばねに「作用する力」ではなく，ばねに「生じる力」と書いたのは，f_{s} が外から作用する力ではなく，ばねの内部に生じる力†を意味するからである。例えば，$\delta > 0$，すなわちばねが伸びた状態では，ばねの両端は f_{s}（> 0）の力でたがいに引き寄せられる。f_{s} が正となるこの状態を，ばねに引張の力が生じているという。逆に，$\delta < 0$，すなわちばねが縮んだ状態では，ばねの両端はたがいに離される。このとき f_{s} は負であり，この状態をばねに圧縮の力が生じているという。

いま，ばねの上端は図 1.1 (a) のように固定されているので，ばねの伸び δ は質点の位置 y そのものになる。したがって，ばねに生じる力 f_{s} は

$$f_{\mathrm{s}} = ky \tag{1.4}$$

である。ばねに生じる力が引張のとき質点はばねにより上向きに引っ張られること，および，質点は下向きの重力 mg を受けることを考慮すると，質点に作用する力がつり合う条件は，質点に作用する力を下向きを正とすると，その総和がゼロであることから

$$-f_{\mathrm{s}} + mg = 0 \quad \Rightarrow \quad -ky + mg = 0 \tag{1.5}$$

† f_{s} は次章で説明する内力である。

となる。つり合い式に含まれる k, y, m, g の四つの物理量のうち三つがわかっていれば，つり合い式により他の一つを求めることができる。例えば，用いる材料のことがわかっているとき，すなわち k, m, g が既知のときに，質点の位置 y を予測する必要があれば，つり合い式 (1.5) より

$$y = \frac{mg}{k} \tag{1.6}$$

として y を求めることができる。あるいは，質点の質量 m および重力加速度 g がわかっており，実験によって質点の位置 y を計測することができれば，ばね定数 k を

$$k = \frac{mg}{y} \tag{1.7}$$

として求めることができる。設計という観点からすると，「質点の位置 y はある値 y_0 以下」という条件からばね定数を決めなくてはならない場合があるが，このようなときは，式 (1.6) より

$$y = \frac{mg}{k} \leqq y_0 \quad \Rightarrow \quad k \geqq \frac{mg}{y_0} \tag{1.8}$$

となり，これより条件を満たすばね定数 k を決定することができる。

〔**2**〕 **二つのばねで固定された質点**　図 1.1 (b) に示す，自然長が等しい二つのばねに固定された質点の力のつり合いを考えてみよう。二つのばねが固定されていることを示すため，図では質点を横長に描いているが，実際は質点に大きさはなく，傾くこともない。したがって，二つのばねの伸び δ_1 および δ_2 は等しく，かつ先の例と同じで，質点の位置 y そのものになる。ばね 1, 2 のばね定数をそれぞれ k_1, k_2 とし，ばね 1, 2 に生じる力をそれぞれ $f_{\mathrm{s1}}, f_{\mathrm{s2}}$ とすると

$$f_{\mathrm{s1}} = k_1\delta_1 = k_1 y, \quad f_{\mathrm{s2}} = k_2\delta_2 = k_2 y \tag{1.9}$$

であり，下向きの力を正[†]とした質点のつり合い式は

$$-f_{\mathrm{s1}} - f_{\mathrm{s2}} + mg = 0 \quad \Rightarrow \quad -k_1 y - k_2 y + mg = 0 \tag{1.10}$$

† 通常，力と位置の座標は，同じ向きを正にとる。これは，4 章で説明する「仕事」が正となるために必要な約束事である。

となる。先ほどの例と同様に，m, g, k_1, k_2 が既知であれば，上式より未知数 y を求めることができる。上式はさらに

$$-(k_1 + k_2)y + mg = 0 \tag{1.11}$$

と表すこともでき，一つのばねにより固定された質点のつり合い式 (1.5) と比較すると，ばね定数が $k_1 + k_2$ の一つのばねに固定された質点のつり合い式と形式的に一致する。つまり，図 1.1 (b) の質点は，ばね定数が $k_1 + k_2$ の一つのばねに固定されていると解釈することもできる。ここでの $k_\mathrm{e} = k_1 + k_2$ のように，複数のばねを一つのばねに置き換えたときのばね定数のことを，合成ばね定数という。図 1.1 (b) は，ばねが並列に質点につながっていることから並列ばねと呼ばれ，並列ばねの合成ばね定数は，ばね定数の総和となる。

〔**3**〕 **接続された二つのばねで固定された質点**　先の〔2〕では二つのばねに直接接続された質点のつり合いを考えたが，ここでは，図 1.1 (c) に示すように二つのばねが直列に接続され，その先端に固定された質点の力のつり合いを考えてみよう。ばね 1 とばね 2 のばね定数を k_1, k_2 とする。それぞれのばねの伸びを観察するために，ばね 1 とばね 2 の接続点と質点の位置を，それぞればねが自然長にあるときを基準として y_1, y_2 とする。ばね 1 の上端は固定されているので，ばね 1 の伸び δ_1 は y_1 そのものとなり，ばね 1 に生じる力 $f_{\mathrm{s}1}$ は $f_{\mathrm{s}1} = k\delta_1 = k_1 y_1$ となる。一方，ばね 2 は上端と下端の位置がそれぞれ変化することに注意すると，ばね 2 の伸び δ_2 は $y_2 - y_1$ となることがわかる。したがって，ばね 2 に生じる力 $f_{\mathrm{s}2}$ は $f_{\mathrm{s}2} = k_2\delta_2 = k_2(y_2 - y_1)$ である。

ところで，質点に対する力のつり合いを考えると，質点に力を及ぼしているばねは先の例と異なり，ばね 2 だけである。したがって，質点のつり合い式は

$$-f_{\mathrm{s}2} + mg = 0 \quad \Rightarrow \quad -k_2(y_2 - y_1) + mg = 0 \tag{1.12}$$

となる。これまでの例と同様に，ばね定数 k_1, k_2 と質量 m および重力加速度 g から，未知数であるばねの位置 y_2 を求めようとすると，二つのばねの接続点の位置 y_1 も未知数なので，質点のつり合い式 (1.12) だけでは y_1 を決定できな

索　　引

【す〜そ】

【た行】

【な行】

【は行】

【ま行】

【り】

—— 著 者 略 歴 ——

1995 年 東北大学工学部土木工学科卒業
1997 年 東北大学大学院工学研究科博士前期課程修了（土木工学専攻）
1997 年 東北大学大学院工学研究科博士後期課程中退（土木工学専攻）
1997 年 東北大学助手
1998 年 宇都宮大学助手
2001 年 博士（工学）（東北大学）
2005 年 東北大学助手
2007 年 東北大学助教
2007 年 東北大学准教授
現在に至る

土木・環境系の力学
Introduction to Mechanics of Civil and Environmental Engineering

2012 年 8 月 31 日　初版第 1 刷発行

検印省略

さい　き　いさお
著　者　斉　木　功
発 行 者　株式会社　コロナ社
代 表 者　牛来真也
印 刷 所　三美印刷株式会社

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発行所　株式会社　コロナ社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–05601–3　（新宅）　（製本：愛千製本所）G
Printed in Japan

落丁・乱丁本はお取替えいたします