

本書は、土木・環境系で土木工学を学ぼうとしている学部学生を读者として想定した、力学の教科書である。力学といっても内容は多岐にわたるが、ここでは、学部1年生が半期で学習する物理学における力学の範囲を対象とした。土木工学を専門とする技術者において習得が必須と思われる構造力学では、力を受ける構造物の応答、とりわけ構造物を構成する部材に生じる力を、力のつり合いや変形を考えることによって求める。本書では、そのような専門的な力学を学ぶにあたって、準備しておくべき力学の基礎・エッセンスを、著者の能力の限り理解しやすいように整理した。

著者自身は、執筆時、在籍する東北大学で学部1年生の力学の講義を担当しているわけではなく、むしろ、土木工学の専門課程の入口にある2年生向けの空間創造の力学あるいは構造解析学と称する構造力学に関する講義を担当している。したがって、そのような立場から、構造力学を学ぶにあたって習得しておいてほしい内容を本書に含めた。構造力学ではおもに静力学を取り扱うため、そのための基礎としては、本書の1章、2章の一部、6章が対応する。1章では力学の最も基礎となる、力のつり合いと力のベクトルとしての表現について、2章では、変位などの運動の状態を表す方法と運動の法則について述べた。6章では、剛体の力のつり合いとモーメントについて述べた。また、地震応答解析を含む構造物の振動解析においては、動力学が必要となる。この基礎には、2章から5章が対応する。3章では運動を観測する観測者について、4章では仕事とエネルギーについて、5章では運動量とその保存則について、それぞれ述べた。一方で、一般教養の力学の内容として剛体の動力学も必要と考え、これを

7章および8章で説明した。7章では角運動量とその保存則について、8章では剛体の並進運動と回転運動について述べた。

力学の教科書は数多く存在し、かつ名著といわれる書籍(例えば参考文献 1), 2))もある中で、今回改めて自分が書くということについてつねに自問自答しつつ、時には楽しく時には苦しみながら本書を執筆した。また、現在担当している講義の講義ノートをもとにしたわけでもないので、新しい講義を担当することになったつもりで、受講者の反応をあれこれ想定しながら書いた。力学に登場する法則や公式を効率良く頭に入れることよりむしろ、説明不可能な基本法則以外は読者自身が基本法則から導けるようになること、そして、その誘導の過程から力学の考え方を体得できることを目標とし、それが本書の特徴となるように考えた。したがって、他の力学の教科書よりもかなり回りくどい記述になっている箇所が多々あると思う。また、本文に置くことをあきらめた、いくつかのさらに回りくどい説明は、演習問題や解答の中に含めた(例えば [1.3] や [4.5] など)。問題の解き方を単に身につけるだけでなく、考えさせる問題や証明問題などを通じて、視点を広げ、センスを身につけてほしいと考えている。したがって、演習問題もすべて目を通してほしい。

最後に、編集委員の早稲田大学教授 依田照彦先生、本書執筆の機会を与えてくださった中央大学教授 檜山和男先生、そしてコロナ社には、本書執筆に関してたいへんお世話になりました。ここに深く感謝いたします。

2012年7月

齊木 功

1 章 力のつり合いとベクトル

- 1.1 質点の力のつり合い 2
 - 1.1.1 力のつり合い 2
 - 1.1.2 力とベクトル 7
- 1.2 ベクトルの合成と分解 9
 - 1.2.1 ベクトルの合成 9
 - 1.2.2 ベクトルの分解 10
- 1.3 ベクトルと座標系 11
 - 1.3.1 ベクトルの成分と大きさ 11
 - 1.3.2 座 標 変 換 14
- 演 習 問 題 16

2 章 質点の運動と、運動の法則

- 2.1 運動の表現とベクトル 19
 - 2.1.1 運 動 の 表 現 19
 - 2.1.2 位置ベクトル・変位ベクトル・速度ベクトル・
加速度ベクトル 22
- 2.2 運 動 の 法 則 25
 - 2.2.1 慣 性 の 法 則 25
 - 2.2.2 運 動 方 程 式 25
 - 2.2.3 作用・反作用の法則 27

2.3	質点の運動	28
2.3.1	質点の運動	28
2.3.2	質点系の運動	36
	演習問題	42

3章 観測者と慣性力

3.1	慣性系	44
3.1.1	静止した質点の運動方程式	44
3.1.2	等速直線運動する質点の運動方程式	46
3.1.3	二つの慣性系から見た質点の運動方程式	47
3.2	加速する観測者から見た運動	50
3.3	回転する観測者から見た運動	52
	演習問題	60

4章 仕事とエネルギー

4.1	仕事	62
4.1.1	1次元問題における仕事	62
4.1.2	2次元もしくは3次元問題における仕事	63
4.2	エネルギー	64
4.2.1	運動エネルギー	64
4.2.2	ポテンシャル	68
4.3	エネルギー保存則	75
4.3.1	エネルギー保存則	75
4.3.2	エネルギー保存則と運動方程式	77
4.3.3	エネルギー保存則による振り子の解析	78
	演習問題	80

5章 運動量と運動量保存則

5.1	運動量と力積	83
5.1.1	運動量	83

5.1.2	力積	84
5.1.3	力と力積と仕事	86
5.2	運動量保存則と運動方程式	93
5.2.1	運動量保存則	93
5.2.2	運動量保存則と運動方程式の関係	96
演習問題		97

6章 剛体の力のつり合い

6.1	2次元の剛体のつり合い	100
6.1.1	剛体	100
6.1.2	力の作用点と作用線	100
6.1.3	力のつり合い	101
6.1.4	力のモーメント	102
6.1.5	力のモーメントと外積	105
6.1.6	モーメントのつり合い	107
6.1.7	剛体に作用する力の合力	110
6.1.8	偶力	114
6.2	3次元の剛体のつり合い	116
6.2.1	力のつり合い	116
6.2.2	モーメントとベクトル	116
6.2.3	モーメントのつり合い	118
6.3	安定と不安定	119
演習問題		120

7章 角運動量と角運動量保存則

7.1	角運動量と力積のモーメント	123
7.1.1	角運動量	123
7.1.2	力積のモーメント	124
7.1.3	角運動量の例	125

7.2	角運動量保存則と回転の運動方程式	128
7.2.1	角運動量保存則	128
7.2.2	角運動量保存則と回転の運動方程式の関係	130
7.2.3	角運動量保存則の例	131
	演習問題	135

8 章 剛体の運動

8.1	剛体の並進運動	138
8.2	剛体の平面内の回転運動	142
8.2.1	剛体の角運動量	142
8.2.2	力が作用していない剛体の回転運動	143
8.2.3	偶力のみ働く剛体の回転運動	145
8.2.4	剛体の回転運動	146
8.2.5	剛体の運動エネルギー	147
8.2.6	力のモーメントのなす仕事	150
8.2.7	慣性モーメント	151
8.3	剛体の回転運動	152
8.3.1	剛体の角運動量と慣性モーメントテンソル	152
8.3.2	剛体の回転の運動方程式	158
8.3.3	剛体の運動エネルギー	161
8.3.4	慣性モーメントテンソル	163
8.3.5	歳差運動	167
	演習問題	171

引用・参考文献	172
演習問題解答	173
索引	196

1 章

力のつり合いとベクトル

◆本章のテーマ

本章では、1点に作用する力のつり合いについて、および、力がベクトルであることについて学ぶ。力がつり合っているということは、質点に作用する力の総和がゼロになっていることであり、それは簡単な数式で表すことができる。力はベクトルとして表現できるため、それらの合成や分解、あるいは和や差は代数和として表すことが可能である。このために、多次元空間における力学問題を簡潔に記述することができる。

◆本章の構成（キーワード）

1.1 質点の力のつり合い

質点, 力, つり合い, カベクトル

1.2 ベクトルの合成と分解

ベクトルの合成, ベクトルの分解, 力の平行四辺形

1.3 ベクトルと座標系

ベクトルの成分, 座標系, 基底ベクトル, 座標変換

◆本章を学ぶと以下の内容をマスターできます

- ☞ 力のベクトルとしての表現
- ☞ 質点に作用する力のつり合い
- ☞ 力のつり合いをベクトルを用いた数式で記述する
- ☞ 複数のベクトルを一つに合成する
- ☞ 一つのベクトルを任意の数のベクトルに分解する
- ☞ ベクトルそのものとベクトルの成分の違い
- ☞ ベクトルの成分と、座標系と基底ベクトルの関係

1.1 質点の力のつり合い

質点 (mass point もしくは particle) とは、質量はあるが大きさのない物体のことである。もちろん、現実の世界には大きさのない物体など存在しないが、力学においては、物体の運動を考える上で、「大きさが無い」という特徴にはたいへん都合が良いことがある。

1.1.1 力のつり合い

ある静止した物体を動かすにはどうしたらよいだろうか。当然のことであるが、なんらかの力を加える必要がある。逆にいえば、力が作用していない物体は、静止し続ける^{†1}。例えば道端に落ちている石ころは、蹴飛ばしたりして力を加えない限り、動かずに静止している。では、石ころに力は作用していないのであろうか。答えは No である。地球上の物体には万有引力の法則から、地球との間の引力、すなわち重力が働いている。ではなぜ静止しているのかといえ、石ころは地面からも垂直抗力 (normal force もしくは normal reaction)^{†2} という力を受けていて、それが重力と「つり合っ」ており、結果的に力が作用していない状況と同じだからである。つまり、「力が作用していない物体は静止し続ける」は「作用している力がつり合っている物体は静止し続ける」と理解してもよいことになる。

いま、簡単のために、力が鉛直方向にのみ作用する状況を考えてみよう。重力を f_g 、垂直抗力を f_r と表すことにすると、力がつり合っているということは

$$f_g + f_r = 0 \quad (1.1)$$

が成立するということであり、この式はつり合い式 (equilibrium equation) といわれる。上式は、石ころに作用している力の合計がゼロという意味である。

^{†1} あとで説明する運動の法則から、力が作用していない物体の加速度はゼロということになり、必ずしも静止しているとは限らない。ここでは、話を簡単にするために、もともと静止している物体に話を限定している。

^{†2} この力は、石ころに作用する重力が地面を押す力に対して、地面が石ころを押し返す力である。reaction は反力と呼ばれ、したがって、垂直抗力は垂直反力とも呼ばれる。

石ころの質量 m と重力加速度 g がわかっており、すなわち、石ころに作用する重力が $f_g = mg$ であるとわかっているとすると、つり合い式 (1.1) から、 $f_r = -f_g = -mg$ がわかる。このように、力学において、つり合い式は物体に作用する力を明らかにする最も重要な関係の一つである。

さて、石ころを質点に読み替え、また、作用する力も二つとは限らないので、 n 個の力 f_1, f_2, \dots, f_n が作用している場合を考えよう。この場合、つり合い式は

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = 0 \quad \text{あるいは} \quad \sum_{i=1}^n f_i = 0 \quad (1.2)$$

と表される。

なお、力を f のような数学記号で表してしまうと、無機質な印象を受けるが、力はいくまでも力という物理的な次元を持っていることを忘れないようにしよう。また、力の次元を物理における基本的な次元である [質量], [長さ], [時間] で表現すると

$$(\text{力}) = \frac{[\text{質量}] \cdot [\text{長さ}]}{[\text{時間}]^2}$$

である。また、基本的な次元である質量、長さ、時間は、**国際単位系** (international system of units, SI) ではそれぞれ [kg] (キログラム), [m] (メートル), [s] (秒) を使うことになっているので、力の単位はそれらを用いた組立単位で $[\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2]$ となる。また、常用される組立単位については、固有の名称と記号も定められており、力の単位には [N] (ニュートン) を用いることもできる。

[1] **ばねで固定された質点** 図 1.1 (a) に示すばねに固定された質点の力のつり合いを考えてみよう。質点の質量を m とし、下向きの重力加速度 g が作用しているとする。ばね定数を k とし、ばねが自然長 (ばねに力が生じていないときの長さ) のときの質点の位置を原点とし、ばねが伸びる方向を正として質点の位置を y とする。ばねに生じる力 f_s は、**フックの法則** (Hooke's law) により、ばね定数 k とばねの伸び δ を用いて

$$f_s = k\delta \quad (1.3)$$

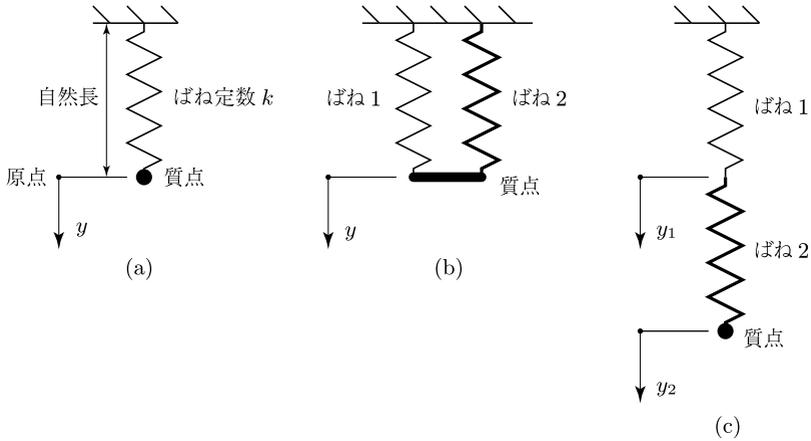


図 1.1 ばねに固定された質点

と表される。ここで、 f_s をばねに「作用する力」ではなく、ばねに「生じる力」と書いたのは、 f_s が外から作用する力ではなく、ばねの内部に生じる力†を意味するからである。例えば、 $\delta > 0$ 、すなわちばねが伸びた状態では、ばねの両端は $f_s (> 0)$ の力でたがいに引き寄せられる。 f_s が正となるこの状態を、ばねに引張の力が生じているという。逆に、 $\delta < 0$ 、すなわちばねが縮んだ状態では、ばねの両端はたがいに離される。このとき f_s は負であり、この状態をばねに圧縮の力が生じているという。

いま、ばねの上端は図 1.1 (a) のように固定されているので、ばねの伸び δ は質点の位置 y そのものになる。したがって、ばねに生じる力 f_s は

$$f_s = ky \quad (1.4)$$

である。ばねに生じる力が引張るとき質点はばねにより上向きに引っ張られること、および、質点は下向きの重力 mg を受けることを考慮すると、質点に作用する力がつり合う条件は、質点に作用する力を下向きを正とすると、その総和がゼロであることから

$$-f_s + mg = 0 \quad \Rightarrow \quad -ky + mg = 0 \quad (1.5)$$

† f_s は次章で説明する内力である。

となる。つり合い式に含まれる k, y, m, g の四つの物理量のうち三つがわかっているならば、つり合い式により他の一つを求めることができる。例えば、用いる材料のことがわかっているとき、すなわち k, m, g が既知のときに、質点の位置 y を予測する必要があるならば、つり合い式 (1.5) より

$$y = \frac{mg}{k} \quad (1.6)$$

として y を求めることができる。あるいは、質点の質量 m および重力加速度 g がわかっており、実験によって質点の位置 y を計測することができれば、ばね定数 k を

$$k = \frac{mg}{y} \quad (1.7)$$

として求めることができる。設計という観点からすると、「質点の位置 y はある値 y_0 以下」という条件からばね定数を決めなくてはならない場合があるが、このようなときは、式 (1.6) より

$$y = \frac{mg}{k} \leq y_0 \quad \Rightarrow \quad k \geq \frac{mg}{y_0} \quad (1.8)$$

となり、これより条件を満たすばね定数 k を決定することができる。

〔2〕 二つのばねで固定された質点 図 1.1 (b) に示す、自然長が等しい二つのばねに固定された質点の力のつり合いを考えてみよう。二つのばねが固定されていることを示すため、図では質点を横長に描いているが、実際は質点に大きさはなく、傾くこともない。したがって、二つのばねの伸び δ_1 および δ_2 は等しく、かつ先の例と同じで、質点の位置 y そのものになる。ばね 1, 2 のばね定数をそれぞれ k_1, k_2 とし、ばね 1, 2 に生じる力をそれぞれ f_{s1}, f_{s2} とすると

$$f_{s1} = k_1\delta_1 = k_1y, \quad f_{s2} = k_2\delta_2 = k_2y \quad (1.9)$$

であり、下向きの力を正[†]とした質点のつり合い式は

$$-f_{s1} - f_{s2} + mg = 0 \quad \Rightarrow \quad -k_1y - k_2y + mg = 0 \quad (1.10)$$

[†] 通常、力と位置の座標は、同じ向きを正にとる。これは、4章で説明する「仕事」が正となるために必要な約束事である。

となる。先ほどの例と同様に、 m, g, k_1, k_2 が既知であれば、上式より未知数 y を求めることができる。上式はさらに

$$-(k_1 + k_2)y + mg = 0 \quad (1.11)$$

と表すこともでき、一つのばねにより固定された質点のつり合い式 (1.5) と比較すると、ばね定数が $k_1 + k_2$ の一つのばねに固定された質点のつり合い式と形式的に一致する。つまり、図 1.1 (b) の質点は、ばね定数が $k_1 + k_2$ の一つのばねに固定されていると解釈することもできる。ここでの $k_e = k_1 + k_2$ のように、複数のばねを一つのばねに置き換えたときのばね定数のことを、合成ばね定数という。図 1.1 (b) は、ばねが並列に質点につながっていることから並列ばねと呼ばれ、並列ばねの合成ばね定数は、ばね定数の総和となる。

〔3〕 接続された二つのばねで固定された質点 先の〔2〕では二つのばねに直接接続された質点のつり合いを考えたが、ここでは、図 1.1 (c) に示すように二つのばねが直列に接続され、その先端に固定された質点の力のつり合いを考えてみよう。ばね 1 とばね 2 のばね定数を k_1, k_2 とする。それぞれのばねの伸びを観察するために、ばね 1 とばね 2 の接続点と質点の位置を、それぞればねが自然長にあるときを基準として y_1, y_2 とする。ばね 1 の上端は固定されているので、ばね 1 の伸び δ_1 は y_1 そのものとなり、ばね 1 に生じる力 f_{s1} は $f_{s1} = k\delta_1 = k_1 y_1$ となる。一方、ばね 2 は上端と下端の位置がそれぞれ変化することに注意すると、ばね 2 の伸び δ_2 は $y_2 - y_1$ となることがわかる。したがって、ばね 2 に生じる力 f_{s2} は $f_{s2} = k_2 \delta_2 = k_2 (y_2 - y_1)$ である。

ところで、質点に対する力のつり合いを考えると、質点に力を及ぼしているばねは先の例と異なり、ばね 2 だけである。したがって、質点のつり合い式は

$$-f_{s2} + mg = 0 \quad \Rightarrow \quad -k_2(y_2 - y_1) + mg = 0 \quad (1.12)$$

となる。これまでの例と同様に、ばね定数 k_1, k_2 と質量 m および重力加速度 g から、未知数であるばねの位置 y_2 を求めようとする、二つのばねの接続点の位置 y_1 も未知数なので、質点のつり合い式 (1.12) だけでは y_1 を決定できな

索引

【あ行】

安定つり合い stable equilibrium	119
位相 phase	32, 35
位置エネルギー potential energy	69
運動エネルギー kinetic energy	66
運動方程式 equation of motion	25
運動量 momentum	83
運動量保存則 law of conservation of momentum	93, 95
エネルギー保存則 law of conservation of energy	75
遠心力 centrifugal force	56
オイラーの運動方程式 Euler's equation of motion	161
重み付き平均 weighted average	38

【か】

外力 external force	36, 95
角運動量 angular momentum	124
角運動量保存則 law of conservation of angular momentum	128, 130
角加速度 angular acceleration	146
角振動数 angular frequency	34

角速度 angular velocity	31, 125
角速度ベクトル angular velocity vector	126
角変位 angular displacement	30, 125, 142
加速度 acceleration	20
換算質量 reduced mass	41
慣性系 inertial system	44
慣性乗積 product of inertia	156
慣性テンソル inertia tensor	154
慣性の法則 law of inertia	25
慣性モーメント moment of inertia	144, 156
慣性モーメントテンソル moment of inertia tensor	154, 155
慣性力 inertia force	51

【き〜く】

基底ベクトル basis vector	12
逆行列 inverse matrix	15
極座標 polar coordinate	31
偶力 couple	115, 118
クロネッカーのデルタ Kronecker's delta	14

【こ】

向心力 centripetal force	32
剛体 rigid body	100
合力 resultant force	9
国際単位系 international system of units, SI	3
固有値 eigenvalue	158
固有ベクトル eigenvector	158
コリオリの力 Coriolis force	57

【さ】

歳差運動 precession	168, 169
座標変換行列 transformation matrix	15
作用線 line of action	100
作用点 point of application	100
作用・反作用の法則 action-reaction law	27

【し】

仕事 work	62
質点 mass point, particle	2
質点系 system of particles	36
質量中心 center of mass	38, 139, 141

質量のモーメント
moment of mass

140, 146

周期

period 34

自由度

degree of freedom
21, 100, 118

主慣性モーメント

principal moment of
inertia 157

主軸

principal axis 158

初期条件

initial condition 30, 34

初期値問題

initial value problem 30

振動数

frequency 34

振幅

amplitude 32

【す～そ】

垂直抗力

normal force,
normal reaction 2

垂直反力

normal reaction 2

正規直交基底ベクトル

orthonormal basis vector
12

線形常微分方程式

linear ordinary differen-
tial equation 33

速度

velocity 19

【た行】

単位行列

identity matrix 15

単振動

simple harmonic motion
32, 34, 41

弾性エネルギー

elastic energy 71

力の平行四辺形

parallelogram of forces
10

力のモーメント

moment of force 102

力の3要素

three elements of force
100

中心力

central force 129

直交行列

orthogonal matrix 15

つり合い式

equilibrium equation 2, 8

転置行列

transposed matrix 15

【な行】

内積

inner product 13

内力

internal force 36, 95

ニュートンの第1法則

Newton's first law 25

ニュートンの第2法則

Newton's second law 25

ニュートンの第3法則

Newton's third law 28

ノルム

norm 12

【は行】

万有引力

universal gravitation 132

反力

reaction 2

不安定つり合い

unstable equilibrium 119

フックの法則

Hooke's law 3

ベクトルの合成

composition of vectors 9

変位

displacement 19

保存力

conservative force 69

ポテンシャル

potential 69

ポテンシャルエネルギー

potential energy 69

ホドグラフ

hodograph 24

【ま行】

無次元化

nondimensionalization
182

無次元量

dimensionless quantity
31

面積速度

areal velocity 131

【り】

力積

impulse 84, 85

—のモーメント

moment of impulse
125

—— 著者略歴 ——

1995年 東北大学工学部土木工学科卒業
1997年 東北大学大学院工学研究科博士前期課程修了（土木工学専攻）
1997年 東北大学大学院工学研究科博士後期課程中退（土木工学専攻）
1997年 東北大学助手
1998年 宇都宮大学助手
2001年 博士（工学）（東北大学）
2005年 東北大学助手
2007年 東北大学助教
2007年 東北大学准教授
現在に至る

土木・環境系の力学

Introduction to Mechanics of Civil and Environmental Engineering

© Isao Saiki 2012

2012年8月31日 初版第1刷発行

検印省略

著者 さい き いさお
齊 木 功
発行者 株式会社 コロナ社
代表者 牛来真也
印刷所 三美印刷株式会社

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844 ・ 電話 (03) 3941-3131 (代)

ホームページ <http://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-05601-3 （新宅） （製本：愛千製本所） G

Printed in Japan



本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられております。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めておりません。

落丁・乱丁本はお取替えいたします