数学ラーニング・アシスタント

常微分方程式の相談室

理学博士　小林 幸夫【著】

コ ロ ナ 社

はしがき

唐突ですが，直線とは何でしょうか？　このように問いかけられて，即答できない学生の方々を見受けることがあります.「直」という漢字は「まっすぐ」という意味を表します．直線という熟語を，文字どおりに解釈すると「まっすぐな線」です．では,「まっすぐ」とは，どういう状態を指すのでしょうか？「まっすぐ」というのは，あいまいな表現であり,「曲がっていない」と言い換えても,「曲がる」とはどういう意味かという問いに行き当たります.

微分方程式の教材なのに，どうしてこのような問いから始まるのかと思ったかもしれません．この例で伝えたい内容は，主に三つあります.

(i)　数学という学問では，語学と同じように，**数学に特有のことばづかい (数学語)** が必要です．数学地方の方言ではなく，数学の世界では数学語を標準語と考えなければいけません．日常生活とちがい，あいまいな表現を使うと，まちがった結論，矛盾した結果に到達する場合があります．数学の表現に慣れないと，難解に感じます．しかし，じっくり読み取ると，あいまいさのない見事な表現であることが実感できるはずです.「二つの線分のなす角が $179.9°$ である」といえば，二つの線分が大体重なっていても，完全に重なっているわけではないという意味がはっきりします.

(ii)　**数学の出発点は，用語の定義**です．数学の演習問題が解けるのに，用語の定義を正確にいえないという取り組み方は，明らかに本末転倒です．解き方を覚えているから正解に達するのでしょうが，問題の意味を正しく理解しているとはいえません．大学の数学では，定義を軽視しないで，定義から出発して地道に理解を深める姿勢が大事です.

(iii)　定義・定理を，単語・文のまま頭に刷り込むのではなく，頭の中で**具体的なイメージを思い描くトレーニング**が重要です．ただし，数学のすべての概念に対して，具体的なイメージを描こうとすると，まちがったこじつけに陥るおそれがあります．しかし，中学・高校・大学初年次の水準の数学では，計算の仕方は知っているのに，何を計算しているのか，なぜこのように計算するのかがわかっていないということでは困ります．ことばだけに留まってイメージを描けない状態では，ほんとうにわかっているとはいえません．教育心理学では，このような状態を「バーバリズム (唯言語主義)」といいます．カレーとケーキとのどちらも食べた経験のない人が「カレーは辛い」「ケーキは甘い」という文を暗記しているのと同じです.

この 3 番目の内容こそ，微分方程式の導入部です．はじめの「直線とは何か」という問題に戻って,「まっすぐ」「曲がっている」の意味を考えてみましょう.「直線，放物線，円を描け」という問題が出たら，正しく描くことができるでしょう．それにもかかわらず,「直線，放物線，円とは何か」という問題には即答できないとすると,「わかっていない」のに「できた」ということにならないでしょうか？　学校教育では,「わかる」だけでなく「できる」ようにならないといけないという注意があります．ここで取り上げている問題の場合は，まったく逆の実態です．ことばが頭に入って，決まった方法のとおりに「できた」だけで,「わかった」つもりになってはいけません．直線，放物線，円を描く場面を思い出してみます．ふつうは意識しませんが，曲線の場合，鉛筆の芯を進める方向を少しずつ変えながら描いています．数学のことばでいうと，曲線は「位置ごとに接線の方向の異なる図形」です．芯を進める方向が接線の傾きです．直線を描く場合は，傾きを変えないで芯を進めます．高校数学で関数のグラフをつくったときも，同じ発想だったことに気づきますか？　接線の傾きを式で表し，傾きの正負で関数値の増減を調べたのは，この発想を正確に活かすためです．円を描くとき，このような計算を省いても，頭の中で接線の傾きの見当をつけながら芯を進めているはずです.

数学の世界は，日常とは別の世界というわけではありません．生活の中で，メモ用紙に /, レ，？ のような線を書くことがあります．このようなとき，数学の理屈を意識しながら芯を進めているわけではありません．傾きの程度を考えて，これらの線を書く人はいないでしょう．しかし，数学では，曲線の意味を定義し，定義のとおり正確に曲線を描く方法を発展させました．**微分方程式を解くときのイメージとして，接線の傾きを手がかりにして曲線を描く作業**を思い浮かべてみましょう．各点で接線の傾きを表す数学語が**微分**であり，芯の進んだ軌跡を表す数学語が**積分**です．簡単にいうと，**微分方程式の世界は，線の引き方に正確な理屈を与えるという発想**から出発します．驚くことに，この発想は「年代によって人口がどのように推移するか」「投げたボールの位置は時間とともにどのように変化するか」という問題に応用できます．本書を通じて，このような問題をくわしく探究していきます．

$\boxed{\text{本書のテーマ}}$　**局所的振舞から 大域（たいいき） 的振舞を探る**

局所的振舞とは ⋯ 各点の接線の傾きによって，$\overbrace{\text{各点の近く}}^{\text{局所}}$ でグラフが $\overbrace{\text{右上がりか右下がりか}}^{\text{振舞}}$ がわかる

⇓ つなぎ合わせ

大域的振舞とは ⋯ $\underbrace{\text{グラフ全体}}_{\text{大域}}$ が $\underbrace{\text{どんな形か}}_{\text{振舞}}$ を知る

「振舞」: 変化するようす

式は数学の文法で書き表した文だから，局所的振舞を**式に翻訳**して微分方程式を解き，解を表す**式を読解**して大域的振舞を知る．

感謝のことば

著者自身が LaTeX で作成した原稿，手書きの拙い図・イラストは，見にくいと感じる方もいらっしゃると思いますが，趣旨を理解してくださると幸いです．

本書を出版していただく際に，LaTeX の作業に膨大な時間がかかったため，予定よりも大幅に遅れましたが，コロナ社の皆様が励ましてくださり，大変お世話になりました．厚く御礼申し上げます．

2018 年 11 月

小林 幸夫

目　　次

ラーニング・アシスタント

昨今，ラーニング・アシスタント制度を導入している大学が増えています．ラーニング・アシスタントとは，講義担当者の授業運営を補助したり，受講者の学習を支援したりする学生スタッフです．しかし，学生スタッフの方々が対応できる時間帯には限度があります．本書は，微分方程式のラーニング・アシスタントとして，いつでも訪問できる相談室です．

本書の特色

1. 小学算数，中学数学，高校数学からなめらかにつながるように交通整理する

学問は，過去にまとめあげた知識の蓄積の上に成り立っています．個人の幼児期から青年期までの成長過程は，人類が数学を発展させてきた歴史の圧縮版とみなせます．試行錯誤も含め，数学が発展した過程を追体験するという取り組みも大事です．太古の昔，人類は，知識の蓄積が乏しく，時代とともに誤概念を修正しながら，正しい体系を築いてきました．個人も，誕生の時点では知識がなく，成長に伴って，計算を正しく実行したり，図形を錯覚しないで判断したりするようになります．本書では，小学算数以来なじんできた「四則演算」「直線・曲線・長さ・面積」を出発点として，積分・微分まで概念を拡張する必然性を実感します．たとえば，関数のテイラー展開の予備知識を仮定しないで，中学・高校数学の「多項式の展開」「因数分解」「2 次方程式の重解」の根本を見直して，微分の概念に進めます．

参考 林周二：『研究者という職業』(東京図書，2004)
今日一般に科学と総称しているものは，過去から今日までの科学者と称される人びとの積年の思考の積み重ねにより，長い歳月をかけ，累積的に組み上げられてきた各種の客観知の巨大な体系である．

2. 背景，着眼点，解法，モデルを系統的に理解する

どんな問題でも，どうしてその問題を考えるのかという由来があります．問題の背後にある事情がわかると，解決の糸口を見つけやすくなります．問題の解決のためには「どんな微分方程式を立てるのか」「その微分方程式をどのようにして解くのか」を理解しなければなりません．問題のモデル (数学記号・数式で書き表したシステムを数理モデルという) が自然科学 (理学・工学・医学など)・社会科学 (経済学・経営学・地理学など) の現実の世界に見つかるかどうかを探るという視点も重要です．モデルは，問題の背景と密接に結びついています．背景，着眼点，解法，モデルのように展開すると，序論，方法，結果，考察の順に進む論文の書き方とも合います．

3. 計算練習，概念に関する問題のほかに，線型代数との結びつきに着目して理解を深める

小学校で九九を暗誦した頃を思い出してみましょう．理屈を知るまえに，九九を覚えていると，算数の応用問題に進みやすくなります．高学年に進んで学力が高くなるにつれて，九九の意味もわかったはずです．大学数学でも，計算の練習は基本です．計算力が向上すると，概念の意味がわかってくる場合があります.「はしがき」で注意したとおり，大学の数学では，計算だけでなく，概念の意味も重要です．各章末で,「計算練習」から「探究演習」に進みます．問題によっては，代数のように見えても，幾何の姿が潜んでいます．幾何のように見えても，代数と関連の深い場合もあります．1 問を深く掘り下げると，多くの問題を解いたときよりも，数学の見方が広がります．Descartes (デ

数 学 の 書 式

1. ワープロでレポート・論文などを書くときの文字の使い方

イタリック体 (斜体) とローマン体 (立体) との区別

● イタリック体 (斜体)

① 数を表すアルファベット

例　$3x + 4y = -1 \quad y = e^x$

② 量を表すアルファベット

例　$A = \pi r^2$

● ローマン体 (立体)

① 特別な記号

例　$\log x$, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$

$logx$, $sin\theta$, $cos\theta$, $tan\theta$ と書かない.

$tan\theta$ と書くと，$t \times a \times n \times \theta$ の意味になる.

例　単位量を表す記号

$l = 4\,\mathrm{km}$, $m = 2\,\mathrm{g}$, $t = 9\,\mathrm{min}$

長さ l, 質量 m, 時間 t は斜体で書くが，km, g, min は立体で書く.

② ローマ数字

i, ii, iii, iv, v, ..., I, II, III, IV, V, ...

A：area (面積)
π：円周率は数だから斜体で表す.
r：radius (半径)

微分記号 d
● 数学では斜体で表す.
● 物理では立体で表す場合もある.

量を表す記号
l ：length (長さ)
m：mass (質量)
t ：time (時間)
単位量を表す記号
min：minute (分)

◀ (x, y) の括弧は立体で書く. $\mathit{(x, y)}$ と書かない.

ボールド体 (太文字) とイタリック体 (斜体) との区別

● ボールド体 (太文字)

数の組 (**数ベクトル**という) を表すとき

例　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a} = (5, -2)$

● イタリック体 (斜体)

ふつうの数 (**スカラー**という) を表すとき

例　$c = 7$ の左辺 c　　(x, y) の成分 x, y

ベクトルとスカラーとを区別するために，字体を使い分ける.

アルファベットの選び方

① **未知数，変数**：アルファベットの終わりのほうの文字

s, t, u, v, w, x, y, z

例　方程式：$4x = 5$ (x は未知数)　関数値：$y = 6x + 5$ (x, y は変数)

通常，整数は i, j, k, l, m, n (番号を表す添字は整数) で表す. プログラミング言語では，暗黙の型宣言によって，変数の型の規則が決まっている.
● 変数名の頭文字が　i, j, k, l, m, n のどれか：整数型変数
● 上記の文字以外 (頭文字が $a-h$, $o-z$)：実数型

第0部　積分・微分への案内

第0講　プロローグ — 微分方程式とは何か

第 0 講の問題点
① 高校数学と大学数学との間のギャップを埋めること．
計算して解を求めるだけでなく，概念の意味を探究する姿勢が肝要である．
② 「微分」「微分係数」「微分する」という用語のちがいを理解すること．
高校数学の範囲でも，これらの表現を使うが，dx, dy を座標として扱わない．
③ 「積分」を足し算の拡張として理解すること．
④ 「微分方程式を解く」とは「局所的振舞から大域的振舞を見つける」という意味を理解すること．
【キーワード】 積分，微分，微分係数，関数，導関数，接線

1 個 100 円の缶コーヒーを扱っている自動販売機がある．100 円を入れると 1 個出る．200 円を入れると 2 個出る．金額を入力, 商品を出力という．機械の内部のしくみを知らなくても，ボタンを押すと金額に応じた個数の商品が出る．

「機械は金額に商品を対応させるはたらきをする」という．**入力と出力との対応の規則**を「**関数**」とよぶ．この自動販売機の規則は「入れた金額を単価で割ると個数が求まる」といい表せる．機械は，規則どおりの操作を実行し，正しい個数の缶コーヒーを出す．

個数のようにトビトビ (離散) の例だけでなく，時間のようにトビトビでない (連続) 例もある．時計の長針は，15 min で 90° 回転し，30 min では 180° 回転する．時間が入力で，回転角が出力である．入力と出力との対応の規則は「時間に 1 min 当りの角度を掛けると回転角が求まる」といい表せる．時計のしくみを知らなくても,「入力を 2 倍，3 倍，. . . にすると，出力も 2 倍，3 倍，. . . になる」という規則をいえる．

時計の例で，対応の規則は「**正比例**関数」で表せる．よこ軸に時間，たて軸に回転角を選ぶと，時間と回転角との対応は，**原点を通る直線のグラフ**で表せる．確認しなくても，ある時刻から何分経つと何度だけ回るかがわかる．入力と出力との対応の規則がわかると「入力の値がいくらのとき出力の値がいくらか」を予測することができる.「グラフは原点を通る直線で表せる」という正比例関数の特徴が**予測**の鍵を握っている．第 0 講では，曲線のグラフに発展させて「曲線上の各点で接線は正比例関数のグラフとみなせる」という発想を理解する．

相談室

P　数学の書式を振り返ったところで，微分方程式の本題に進みましょう．これからの話に必要な基礎事項は，いうまでもなく積分・微分です．

S　高校数学の教科書を復習しようと思います.「微分係数」と「導関数」とは，意味がどうちがうのかはっきりわかりませんでした．でも，x^2 を x で微分すると $2x$ になるというような規則を覚えましたから，このような規則を使う計算はできる自信があります.「原始関数」「不定積分」「定積分」という用語もあったような気がしますが，区別を聞かれても説明できません．高校のときは，用語の意味を深く考えずに，計算練習ばかりした記憶があります．

P 「はしがき」で注意したとおり，用語の定義を理解し，イメージも描けるように

用語を理解せよ
関数は「整数」「実数」などとちがい，数の分類を指す用語ではない (0.3 節).

◀ 単価とは 1 個当りの価格．ここでは，釣銭を考えない．

書式に注意せよ
字体
min：minute 分
単位はローマン体 (立体) で表す．p.1.

入力は**独立変数**の値，出力は**従属変数**の値である．
時間が勝手に (**独立**に) 経過すると，時計のしくみにしたがって (**従属**して) 角度が変わる．

Stop!
「指数の 2 が係数になり，指数が 1 だけ小さくなる」という暗記は，九九の暗誦に似ている．肩 (指数) の荷 (2) が下り (係数になる) ても安心してはいけない．計算に慣れるためには，この暗記も必要である．しかし，この章で，2 次多項式の展開を思い描いて，$2x$ になる理由をなっとくすることが大事である (例題 0.2).

しましょう．高校数学から進んで，新しい気持ちで取り組む姿勢が大事です．

S たしかに，意味を知らずに，計算だけができても仕方ありませんね．

0.1 なぜ接線を考えるのか

はじめに，厳密さに拘らないで，積分・微分の概念から始める．セロテープを取り付けたリール (丸い部分) を思い浮かべてみよう．

テープがたわまないように，テープを強く引っ張りながら，じわじわとリールからテープを剥がす (図 **0.1**)．テープとリールとの接点からテープの先端までが接線 (正確には線分) である．テープが剥がれるにつれて，テープとリールとの接点は少しずつ変わる．接点が変わると，テープ (接線) の方向も変わる．

イメージを描け

「はしがき」の解説のように，紙テープ以外の例もある．鉛筆で曲線を描いている人の近くで，芯の進むようすを観察しよう．芯の進む方向が少しずつ変わりながら，曲線が仕上がってくる．芯の跡は同じ方向には進まず，つぎの瞬間わずかに方向が変わる．

小林幸夫：『現場で出会う微積分・線型代数』(現代数学社, 2011) 2.1 節．

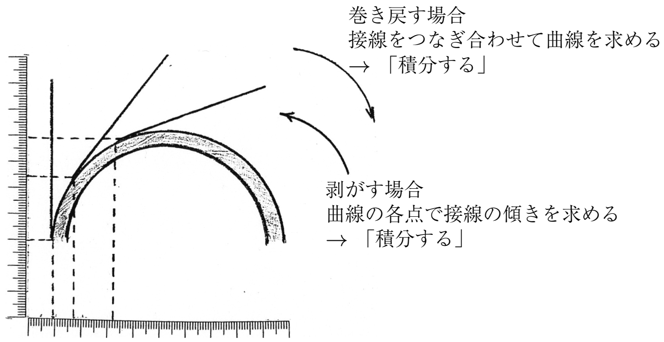


図 0.1　点ごとの接線のつなぎ合わせ

◀ 接線上でヨコ座標 (独立変数) がわずかに変わるとタテ座標 (従属変数) も変わる．変化したあとの点を曲線上の点とみなして，この点で接線を傾ける．

テープがたわまないように，テープを強く引っ張りながら，じわじわとリールにテープを巻き戻す (図 0.1)．「じわじわ」という進め方が本質であり，そうでないとなめらかに貼れない．

頭の中で，テープに右側から光を当てたり，真上から光を当てたりした場面を想像してみる．左右方向の物差で，接点の影が右向きに進む長さが測れる．上下方向の物差で，接点の影が上向きに進む長さが測れる．

① 剥がす場合：リールの周上の各点で接線の方向が異なる．

② 巻き戻す場合：テープを微小な角だけ傾けながら，微小な長さの線分をつなぎ合わせると，曲線が描ける (図 **0.2**)．

◀ 一つの**方向**に二つの**向き**がある．
　左右方向
　　左向き
　　右向き

◀「限りなくゼロに近い」「微小」という表現もあいまいなので，解析学では $\varepsilon - \delta$ 論法を考える．

日常語	数学語
じわじわ	限りなくゼロに近い

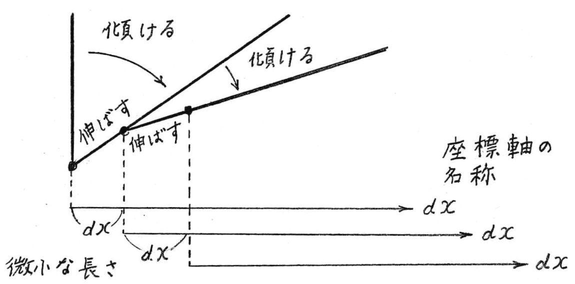


図 0.2　②の意味　線分の長さがゼロではまったく進まないから，傾けてから伸ばして貼る.「完全にゼロ」と「限りなくゼロに近い」とのちがいに注意する．

数学は**記号の科学**だから,「微小な長さをつなぎ合わせる操作」を表す記号を決める．

① 剥がす操作
「曲線を**微**小に**分**割して傾きを求める」
→ **微分する**
② 巻き戻す操作
「**分**割した長さを**積**み重ねる」
(重箱とちがい「合計する」という意味)
→ **積分する**

合計 $\displaystyle\int_{\text{どこから}}^{\text{どこまで}}$ 何を　dx は **任意の** (どこでもいい) **点から測った長さ** を表す (図 0.2).
足し合わせる

高さ，奥行を考える場合，dy, dz も使う.

用語　合計を「**積分**」，任意の点から測った長さを「**微分**」という.

例 左右方向：$\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1$.　$\underbrace{(\text{どこまで})}_{\text{終点の座標}} - \underbrace{(\text{どこから})}_{\text{始点の座標}}$

意味「微小な長さの線分をつなぎ合わせると，長さ $x_2 - x_1$ の線分になる」

ノート：dx の意味

ある点から左右方向の長さを測る物差 (図 0.2) を dx 軸と名付ける.
● dx 軸上では $dx = 0.0000006$ のように小さい値の目盛，$dx = 8230000024581$ のように大きい値の目盛，$dx = -0.0005$ のような負の値の目盛がある.
● dx 軸上で「微小な長さ」(図 0.2) を考えたのは，接線の影の先端を測るとき，接点付近の限りなく小さい範囲でしか**接線が曲線の代わり**にならないからである.
● 原点から右向きを正の長さとすると，左向きの長さは負の長さである.
向きの正負も含めて表す長さを「有向距離」という.

右向きに測る場合：$\displaystyle\int_{3}^{5} dx = 5 - 3 > 0$　(正の長さ).　$\longrightarrow$ 正の向き　3　5

左向きに測る場合：$\displaystyle\int_{-3}^{-5} dx = (-5) - (-3) < 0$　(負の長さ).　$\longleftarrow$ 負の向き　-5 -3

感覚をつかめ

「つなぎ合わせ」を合計と考えると，和の記号 $\sum$ (sum の頭文字 S のギリシア文字) が思い出せる.
$\sum$ はギザギザの形だから，トビトビの数の合計に使う.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k = 1 + 2 + \cdots + 10.$
p.ix「数学の書式」
整数を表すのでアルファベット k を選んだ.
$\int$ (S を上下に伸ばした形) はなめらかな形だから，途切れなく足すときの合計に使う.
積分記号を**インテグラル** (integrate 集積する) という.

◀「接線が曲線の代わりにならない」を「曲線を接線で代用できない」ともいい表せる.

0.2　接線の表し方

曲線の形は，曲線上の点のタテ座標の増減で決まる．タテ座標の値が大きく (小さく) なると，曲線は右上がり (右下がり) になる．ある点の近くを虫めがねで拡大すると (図 **0.3**)，その点で接線は曲線の代わりとみなせることがわかる．接線が右上がりか右下がりかによって，曲線上の点のタテ座標の増減が決まる．描きたい曲線上の各点で接線の傾きがどんな規則で決まるかがわかっていると，接線の傾きを手がかりにして曲線を描ける．中学・高校数学を振り返って，接線の表し方から始めよう.

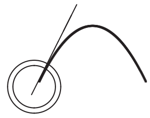


図 0.3　拡大

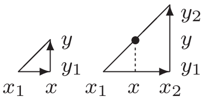
たとえば，ヨコ座標が x のとき接線の傾きが $2x$ で表せる曲線は放物線である.

Stop!
「はしがき」参照．直線とは? 傾きとは? 正しくいえるか？

休憩室 林真理子：『下流の宴』(毎日新聞社，2010)
簡単と思う部分もあるかもしれませんが，基礎を甘く見てはいけません．基礎がきちんと身についているからこそ，難しい問題を解くことで思考力や応用力が養われるのです.

用語を理解せよ

直線はどういう図形か？
直線とは「傾きが一定の図形」である.
「傾き」とは何か？



x：よこ座標
y：たて座標
(x, y) は直線上の任意の点

$$\text{傾き} = \frac{(\text{終点のタテ座標}) - (\text{始点のタテ座標})}{(\text{終点のヨコ座標}) - (\text{始点のヨコ座標})}.$$

（例題 0.1）　よこ方向にどれだけ進むとたて方向にどれだけ進むか.

座標
「座席」の「座」は「場所」という意味.
「道標」(みちしるべ) の「標」は「しるし」という意味.
栗田稔：『幾何学の思想と教育』(海鳴社，1987) p.24.

例題 0.1　直線の表し方

xy 平面内で原点と (x_0, y_0) とを通る直線の傾きを求めて，直線の方程式を答えよ.

発想「直線とは，傾きが一定の図形」ということばで表現した定義を**式に翻訳**する.

【解説】 $\underbrace{\dfrac{y-0}{x-0}}_{\text{任意の点と原点との間の傾き}} = \underbrace{\dfrac{y_0-0}{x_0-0}}_{\text{特定の点と原点との間の傾き(一定)}}$　例 原点と点 $(3,5)$ とを通る直線 $\dfrac{y-0}{x-0}=\dfrac{5-0}{3-0}$

$\left(\text{傾き} = \dfrac{\text{高さ}}{\text{幅}}\right)$

分母を払うと，

$$y = \frac{y_0}{x_0}x$$

(高さ ＝ 傾き × 幅)

のように**正比例**関数の式 $y = ax$ (a は比例定数) になる (図 **0.4**).

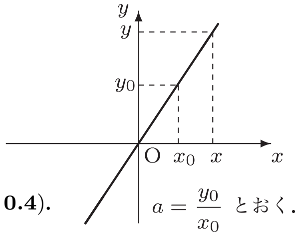


図 0.4　原点を通る直線

相談室

S　図 0.4 で，x 軸上の x, y 軸上の y は，座標軸の名前とどうちがうのでしょうか?

P　座標軸の名前 x, y は変数名を表し，座標軸上の x, y は座標 (数値) の代表です．混同しないために，座標を s, t と書くこともできます．$t = \dfrac{y_0}{x_0}s$ が $x = s$, $y = t$ (s, t はどんな値でもいい) で成り立つので，$y = \dfrac{y_0}{x_0}x$ と表せます．任意の値を s, t とおくことは煩わしいので，図 0.4 のように，はじめから x, y と表すことがあります．

> **用語を理解せよ**
> **座標とは**，原点からの距離 (例:3 cm) が単位の距離 (例:cm) の何倍かを表す数値である．
> $$\frac{3\,\mathrm{cm}}{\mathrm{cm}} = 3$$
> だから，座標は 3 である．
> $3\,\mathrm{cm} = 3 \times \mathrm{cm}$ に注意．

> (終点のヨコ座標)
> $-$(始点のヨコ座標)
> > 0 とする．
> 傾きは
> (終点のタテ座標)
> $-$(始点のタテ座標)
> > 0 のとき 正,
> $= 0$ のとき ゼロ,
> < 0 のとき 負.

問 0.1　xy 平面内で 2 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) を通る直線の傾きを求めて，直線の方程式を答えよ．

発想「直線とは，傾きが一定の図形」ということばで表現した定義を**式に翻訳**する．

【解説】 $\underbrace{\dfrac{y-y_1}{x-x_1}}_{\text{任意の点と特定の点との間の傾き}} = \underbrace{\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}_{\text{特定の 2 点の間の傾き(一定)}}$　例 2 点 $(2,7)$, $(3,9)$ を通る直線 $\dfrac{y-7}{x-2}=\dfrac{9-7}{3-2}$

$\left(\text{傾き} = \dfrac{\text{高さ}}{\text{幅}}\right)$

分母を払うと，

$$y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

(高さ ＝ 傾き × 幅)

となり「点 (x_1, y_1) を通り，傾きが $(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$ の直線」を表すことがわかりやすい (図 **0.5**).

$x - x_1$, $y - y_1$ は，点 (x, y) の「点 (x_1, y_1) から測った座標」とみなせる．

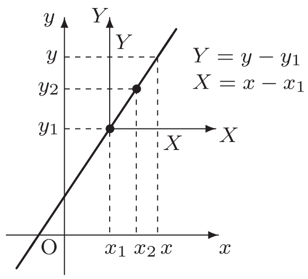


図 0.5　特定の 2 点を通る直線

補足 2 点 $(2,7)$, $(3,9)$ のどちらを (x_1, y_1), (x_2, y_2) としてもいいから

$$\frac{y-9}{x-3} = \frac{7-9}{2-3}$$

とも表せる．

▶ **注意** (x, y) は任意 (どこでもいい) の点だから，例では $(2,7)$ も取り得る．このとき $(7-7)/(2-2) = 0/0$ になる．$0/0 = \heartsuit$ とおくと，$\heartsuit$ がどんな値であっても $0 \times \heartsuit = 0$ (左辺の 0 は分母，右辺の 0 は分子) をみたす．しかし，この例では，$\heartsuit = (9-7)/(3-2) = 2$ である．

◎ **何がわかったか**　点 (x_1, y_1) を新しい原点とする座標軸 (X 軸，Y 軸) を使うと，1 次関数のグラフも正比例関数のグラフと同様に，原点を通る直線である．直線の方程式

$$y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

は

$$Y = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}X \qquad \left(\text{比例定数を } a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \text{ とおく.}\right)$$

のように正**比例**関数の式 $Y = aX$ になる．この見方は，例題 0.2 で放物線上の点ごとの接線の方程式を表すとき，接点を原点とする新しい座標軸 (dx 軸，dy 軸) を選ぶという発想に結びつく．問 0.1 で，微分の世界の入口に立ったことになる (図 0.8).

> **感覚をつかめ**
> 点 $(\clubsuit, \heartsuit)$ を通る直線
> $y - \heartsuit$
> $=$ 傾き $\times (x - \clubsuit)$

◀ 座標軸の名前 x, y と座標 (数値) x, y との区別について，例題 0.1 の**相談室**を参照．

◀ 小林幸夫:『力学ステーション』(森北出版，2002) pp.7–8, pp.27–28, p.43.

◀ $\dfrac{y-7}{x-2} = 2$ の分母を払った式 $y - 7 = 2(x-2)$ を見よ．$x = 2$, $y = 7$ のとき $0 = 2 \times 0$.

> **傾き ＝ $\dfrac{\text{高さ}}{\text{幅}}$**
> →「**微分する**」操作の基本
> **高さ ＝ 傾き × 幅**
> →「**積分する**」操作の基本 (0.3 節)

◀「点 (x_1, x_2) を新しい原点とする」とは? $(3,9)$ は $(2,7)$ を原点 [$(0,0)$ とみなす] とすると $(1,2)$ である．

簡単な曲線の各点で接線の方程式を求める問題に進む.

例題 0.2 接線の方程式

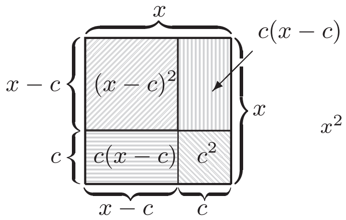
放物線 $y=x^2$ 上の各点で接線の方程式を求めよ.

発想 接点を (c,c^2) とすると，接線は放物線と 1 点だけを共有する.
接線の傾きを a と表すと，接線の方程式は $y-c^2=a(x-c)$ である (問 0.1).
接点以外では，独立変数 x の値が同じでも，従属変数 y の値は放物線と接線とで異なる.
誤解を避けるために，y_p (p は parabora), y_t (t は tangent line) で区別してもいい.
$x=c$ のときだけ $y_p=y_t$ であることに注意する.
$y=x^2$ と $y=a(x-c)+c^2$ とを比べやすくするために，x^2 を $x-c$ で表す (図 **0.6**).

◀ 例題 0.2 では，微積分の知識ではなく，中学数学の知識だけで考える．接線の傾きが $2c$ (問 0.4) であるという結果を先取りしない.

イメージを描け

x^2 を $x-c$ で表す方法



$$x^2=c^2+2c(x-c)+(x-c)^2$$

図 0.6 1 辺の長さ $\boldsymbol{x}$ の正方形 図 0.7 と比べよ.

Stop! 図 0.6 は中学数学の素朴な発想であるが，この図を使うという発想に気づきにくい．公式の暗記，式の変形に集中して，幾何の感覚を失っていないだろうか? 式だけを書くことによって x^2 を $x-c$ で表すのは厄介である.

【解説】 放物線：$y=x^2$

$$=c^2+2c(x-c)+(x-c)^2$$

の点 (c,c^2) の接線

$$y=c^2+a(x-c)$$

は，接点 (c,c^2) を新しい原点とする座標軸 (図 **0.7** の dx 軸，dy 軸) で，

$$\underbrace{y-c^2}_{dy}=a\,\underbrace{(x-c)}_{dx}$$

と表せる．放物線の方程式 $y-c^2=\underbrace{2c(x-c)}_{Y}+(x-c)^2$ の右辺第 2 項 $Y=2c(x-c)$ は，接点を通る傾き $2c$ の直線の方程式 $y-c^2=2c(x-c)$ の右辺と同じである．放物線の方程式から

$$\underbrace{(y-c^2)}_{\text{放物線上のタテ座標}}\ -\ \underbrace{2c(x-c)}_{\text{直線上のタテ座標}}\ =(x-c)^2$$

である (図 0.7). $(x-c)^2=k$ (k は負でない実定数) とおくと，x の値によって k の値は異なる.

$(x-c)^2=k$ をみたす x は,「放物線上のタテ座標」と「直線上のタテ座標」とが

$$\begin{cases}\text{一致しないとき } [k\neq 0 \quad (x\neq c)] & 2\text{ 個},\\ \text{一致するとき } [k=0 \quad (x=c)] & 1\text{ 個}\end{cases}$$

ある．$k=0$ のとき，$y-c^2=2c(x-c)$ は接線を表すことがわかるから $a=2c$ である.

▶ 接点 (c,c^2) で接線の方程式 $y-c^2=2c(x-c)$ を $dy=2cdx$ と表す.

Stop! X 軸，Y 軸 (問 0.1) $\longrightarrow$ dx 軸，dy 軸 (例題 0.2)

◎何がわかったか

① 接点の位置だけで放物線と接線とは一致する (接点では，放物線と接線との間で，ヨコ座標，タテ座標は同じ). **接点では放物線の代わりに直線** (接線) の方程式で表せる (図 **0.8**).

② 接点以外では，放物線と接線との間の差は $(x-c)^2$ だから，x の値が c に近いほど (接点に近づくにつれて) 0 に近づく.

③ **接点を原点とする座標軸** (dx 軸，dy 軸) で表して**接線を正比例関数のグラフ**とみなす.

線型近似 点 (c,c^2) で接する直線の方程式：$dy=2cdx$

◀ もとのヨコ座標 x が c の位置を原点 $(x-c=c-c=0)$ に選んだ.

◀ $(x-c)^2=k$
$x-k=\pm k$
$x=c\pm k$
(i) $k\neq 0$ のとき
$c+k,\ c-k$ の 2 個の異なる解.
(ii) $k=0$ のとき
$x=c$ (2 重解).

◀ 接線を $y=2c(x-c)+c^2$, $y=2cx-c^2$ と書いてもいいが，$y-c^2=2c(x-c)$ の形は一目で「点 (c,c^2) を通り，傾き $2c$ の直線」とわかる (例題 0.1). この形を見ると「$y-c^2$ を dy, $x-c$ を dx とおく」という発想に結びつく．dx 軸，dy 軸について，0.1 節参照.

$dy=2cdx$ は $y-c^2$ を dy, $x-c$ を dx とおいた形.
$dy=2cdx$ は，中学数学で学んだ正比例関数の式 $y=ax$ の y が dy, a が $2c$, x が dx になった形.

索　　引

▶ 索引を数学用語の和英辞典として活用することができる.

【あ行】

【か行】

―― 著 者 略 歴 ――

東京大学大学院理学系研究科博士課程修了
理学博士
理化学研究所フロンティア研究員等を経て
創価大学教授
現在に至る

著書に『力学ステーション 時間と空間を舞台とした物体の振る舞い』（森北出版，2002），『数学ターミナル 線型代数の発想 楽屋裏から「なぜこう考えるのか」を探ってみよう』（現代数学社，2008），『数学オフィスアワー 現場で出会う 微積分・線型代数 化学・生物系の数学基礎を実践する』（現代数学社，2011）などがある。

数学ラーニング・アシスタント **常微分方程式の相談室**
Learning-assistant for Mathmatics,
The Consultation Room of Ordinary Differential Equations

2019 年 1 月10日　初版第 1 刷発行

検印省略

著　者　小林（こばやし）幸夫（ゆきお）
発 行 者　株式会社 コロナ社
代 表 者　牛来真也
印 刷 所　三美印刷株式会社
製 本 所　有限会社 愛千製本所

112–0011 東京都文京区千石 4–46–10
発 行 所 株式会社 コ ロ ナ 社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–06116–1　C3041　Printed in Japan　（柏原）