1　章

1.4　式(1.3)によって $F = ma = 1200 \times 3 = 3600$〔N〕となる。

1.5　式(1.3)によって $m = F/a = 600/3 = 200$〔kg〕となる。

1.6　加速度 a は $a = 50 / 0.02 = 2500$〔m/s^2〕である。したがって式(1.3)によって

$$F = ma = 3 \times 2500 = 7500 \text{〔N〕}$$

となる。

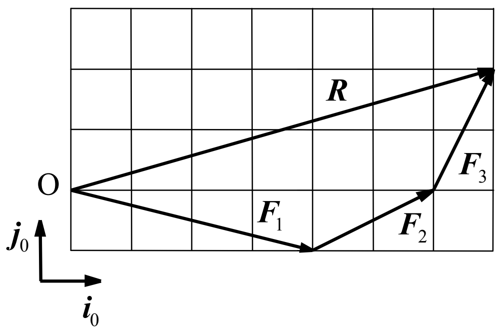
1.7　出発の位置を原点 O として，x, y 軸を東，北の方向になるように座標系 $\mathrm{O}-xy$ を定め，座標の単位を 1m とする。現在の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は成分表示で

$$\boldsymbol{r} = 4\boldsymbol{i}_0 + 3\boldsymbol{j}_0 - 2\boldsymbol{i}_0 - 6\boldsymbol{j}_0 = 2\boldsymbol{i}_0 - 3\boldsymbol{j}_0$$

となる。全体の移動は東へ 2m，南へ 3m となる。

2　章

2.4　作図の方法を用いる場合，合力 $\boldsymbol{R}$ は図のようになる。



成分表示の方法を用いる場合，図から

$$\boldsymbol{F}_1 = 4\boldsymbol{i}_0 - \boldsymbol{j}_0, \boldsymbol{F}_2 = 2\boldsymbol{i}_0 + \boldsymbol{j}_0, \boldsymbol{F}_3 = \boldsymbol{i}_0 + 2\boldsymbol{j}_0$$

を得るので，合力 $\boldsymbol{R}$ は

$$\boldsymbol{R} = (4+2+1)\boldsymbol{i}_0 + (-1+1+2)\boldsymbol{j}_0 = 7\boldsymbol{i}_0 + 2\boldsymbol{j}_0$$

となる。この結果から，合力 $\boldsymbol{R}$ の大きさ R と，合力 $\boldsymbol{R}$ が横軸となす角 θ は

$$R = \sqrt{7^2 + 2^2} = 7.28[\mathrm{N}], \theta = \cos^{-1}\left(\frac{7}{7.28}\right) = 15.9^\circ$$

となる。

2.5　腕の長さは$d=\mathrm{OH}=3\sin 30^\circ=1.5$〔m〕である。したがってモーメントの大きさ$N$は

$$N=-1.5\times 10=-15〔\mathrm{N\cdot m}〕$$

となる。

同じ問題を，力の成分を利用する方法で扱う。x, y 軸方向の力の成分F_x, F_yを求めると，$F_x=10\sin 30^\circ, F_y=-10\cos 30^\circ$ となる。F_y はモーメントを生じないので，モーメントの大きさNは

$$N=-3\times 10\sin 30^\circ=-15〔\mathrm{N\cdot m}〕$$

となって，上の結果と一致する。

2.6　各力のモーメントを求め，加え合わせると，合モーメントの大きさNは

$$N=1\times 2+2\times 4+3\times 5-4\times 2-5\times 4=-3〔\mathrm{N\cdot m}〕$$

となる。

3　章

3.4　座標系$\mathrm{O}-x$を問題の図のように定めると，重心の座標x_Gは

$$x_G=\frac{\int_0^l (2m/l)\,xdx+\int_l^{2l}(m/l)\,xdx}{2m+m}=\frac{5l}{6}$$

となる。重心の位置は，左端から$(5/6)l$の位置にある。

4　章

4.4　壁における水平方向，鉛直方向の反力をR_x, R_y，ひもに働く張力をTとする．力のつり合いの条件は，水平方向，鉛直方向の力に関して

$$R_x-T\cos 60^\circ=0$$

$$T\sin 60^\circ+R_y-(m+2m)g=0$$

であり，点Oまわりのモーメントに関して

$$2lT\sin 60^\circ-mg\frac{l}{2}-2mg\frac{3}{2}l=0$$

である．これらの式を解いて

$$T=\frac{7}{2\sqrt{3}}mg, R_x=\frac{7}{4\sqrt{3}}mg, R_y=\frac{5}{4}mg$$

を得る．

5　章

5.4　速度vを与える式$v=3t^2$に$t=2$を代入すると，求める速度vは$v=12$となる。

つぎに平均速度$\tilde{v}$を与える式

$$\tilde{v}=\frac{(2+\Delta t)^3-2^3}{\Delta t}$$

に，問題のΔtの値を代入すると，問題の値の順に

$$\tilde{v}=19.00,\ 12.61,\ 12.06,\ 12.01$$

となって，Δtが小さくなるとき，$v=12$に近づく。

5.5　速度v，加速度aは，位置xをそれぞれ時間について1回，2回微分して得られ，結果は

$$v=-e^{-2t}\left(2\cos 3t+3\sin 3t\right)$$

$$a=-e^{-2t}\left(5\cos 3t-12\sin 3t\right)$$

である。

5.6　速度$\boldsymbol{v}$，加速度$\boldsymbol{a}$は，位置$\boldsymbol{r}$をそれぞれ時間について1回，2回微分して得られ，結果は

$$\boldsymbol{v}=e^t\left(\cos t-\sin t\right)\boldsymbol{i}_0+e^t\left(\cos t+\sin t\right)\boldsymbol{j}_0$$

$$\boldsymbol{a}=-2e^t\sin t\,\boldsymbol{i}_0+2e^t\cos t\ \boldsymbol{j}_0$$

である。

位置ベクトル$\boldsymbol{r}$に対し，速度$\boldsymbol{v}$，加速度$\boldsymbol{a}$のなす角θ_v,θ_aは，内積を利用して

$$\cos\theta_v=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}{rv}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\theta_a=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}}{ra}=0$$

で定められる。ゆえにどの位置でも，ベクトル$\boldsymbol{r}$に対し，速度ベクトル$\boldsymbol{v}$は角度$\theta_v=\pi/4$，加速度ベクトル$\boldsymbol{a}$は角度$\theta_a=\pi/2$をなす。

6　章

6.4　質点に働く動摩擦力は$-\mu_k mg$である。投げた位置を原点とする座標系$\mathrm{O}-x$を導入する。質点が静止するまでの間の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\mu_k mg$$

である。初速度v_0を考慮してこの式を解くと

$$\frac{dx}{dt} = -\mu_k g t + v_0,\ x = -\frac{1}{2}\mu_k g t^2 + v_0 t$$

となる。静止する時刻t_1は$dx/dt = 0$を満たすtとして求められ$t_1 = v_0/\mu_k g$である。求める距離x_1はこのときのxとして求められ$x_1 = {v_0}^2/2\mu_k g$である。

6.5　自動車の質量をm，動摩擦係数をμ_kと表すと，運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu_k m g$$

である。初速度をv_0と表すと，速度vと位置xは

$$v = -\mu_k g t + v_0$$

$$x = -\frac{1}{2}\mu_k g t^2 + v_0 t$$

となる。したがって停止までに要する時間t_1は

$$t_1 = \frac{v_0}{\mu_k g}$$

であり，進む距離x_1は

$$x_1 = -\frac{1}{2}\mu_k g\left(\frac{v_0}{\mu_k g}\right)^2 + v_0\frac{v_0}{\mu_k g} = \frac{1}{2}\frac{{v_0}^2}{\mu_k g}$$

である。$v_0 = 27\times 1000/(60\times 60) = 7.5$と$\mu_k = 0.2$を用いると

$$t_1 = 3.83[\mathrm{s}], x_1 = 14.3[\mathrm{m}]$$

となる。

6.6　目標位置を通る時刻をt_aとすると，時刻$t = t_a$において，式(6.17)のx, yはx_a, y_aに等しくならなければならないので

$$(v_0\cos 60^\circ)t_a = 30$$

$$(v_0\sin 60^\circ)t_a - \frac{1}{2}\times 9.8\times {t_a}^2 = 10$$

が成り立たなければならない。この式の第1式から

$$t_a = \frac{30}{v_0\cos 60^\circ}$$

を得る。これを第2式に代入すると

$$30\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} - \frac{1}{2}\times 9.8\times\left(\frac{30}{v_0\cos 60^\circ}\right)^2 = 10$$

を得る。これを満たす正の値を求めると

$$v_0 = 20.5[\mathrm{m/s}]$$

を得る。

7　章

7.4　抵抗力$F_d = -c^2 F_0 v^2$を用いると，速度vで表した運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = F_0 - c^2 F_0 v^2 = F_0\left(1 - c^2 v^2\right)$$

である。変数分離の方法に従って，この式を

$$\frac{dv}{c^2v^2-1} = -\frac{F_0}{m}dt \quad \therefore \frac{1}{2}\left[\frac{1}{cv-1} - \frac{1}{cv+1}\right]dv = -\frac{F_0}{m}dt$$

と書き直して積分すると

$$\frac{1}{2c}\log\frac{cv-1}{cv+1} = -\frac{F_0}{m}t + C' \ \therefore \frac{cv-1}{cv+1} = Ce^{-\frac{2cF_0}{m}t}$$

を得る。この式から

$$v = \frac{1}{c}\frac{1+Ce^{-\frac{2dcF_0}{m}t}}{1-Ce^{-\frac{2dcF_0}{m}t}}$$

を得る。この式で$t \to \infty$とすると

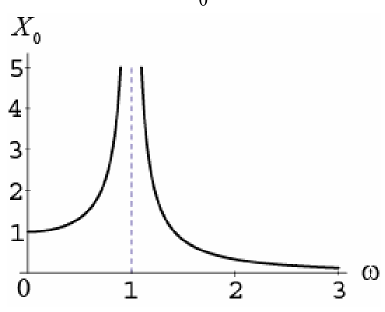
$$v = \frac{1}{c}\frac{1+Ce^{-\frac{2dcF_0}{m}t}}{1-Ce^{-\frac{2dcF_0}{m}t}} \to \frac{1}{c}$$

となる。この速度のときの抵抗力は$F_d = -c^2 F_0\left(\frac{1}{c}\right)^2 = -F_0$となって，物体に働く力$F_0$とつり合う。

7.5　式(7.61)に問題の値を代入すると，$\omega_n = \sqrt{k/m} = 1$を用いて

$$X_0 = \left|\frac{1}{1-\omega^2}\right|$$

となる。横軸にω，縦軸にX_0をとって振幅X_0とωの関係を示すと図のようになる。図から$\omega = 1$の付近で振幅X_0が大きくなることがわかる。



7.6　運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2}+9x=2\cos^2 t$$

である。$2\cos^2 t=1+\cos 2t$ に注意して特解を求めると $x=1/9+(1/5)\cos 2t$ となる。したがって一般解は，a,b を任意定数として

$$x=a\cos 3t+b\sin 3t+\frac{1}{9}+\frac{1}{5}\cos 2t$$

となる。$t=0$ のときの条件を考慮して任意定数 a,b を定めると，質点の運動は

$$x=-\frac{14}{45}\cos 3t+\frac{1}{9}+\frac{1}{5}\cos 2t$$

となる。

8　章

8.4　式(8.12)を用いると，角運動量 L は

$$L=r_0mv_0\sin 90^\circ=40\times1500\times10=600000\left[\mathrm{kg\cdot m^2/s}\right]$$

となる。

成分表示の式を用いて同じ結果が得られることを示す。位置 (x,y) と速度成分 (v_x,v_y) は

$$x=40\cos\theta,\ y=40\sin\theta$$

$$v_x=-10\sin\theta,\ v_y=10\cos\theta$$

である。これらを $L=x\cdot mv_y-y\cdot mv_x$ の式に代入すると

$$L=x\cdot mv_y-y\cdot mv_x=600000[\mathrm{kg\cdot m^2/s}]$$

となり，θ によらないで一定の値となる。

8.5　点Oを原点として座標系 $\mathrm{O}-xy$ を定めると, 時刻 t における質点の位置 x,y と速度 v_x,v_y は

$$x=v_0t,\ y=-\frac{1}{2}gt^2$$

$$v_x=v_0,\ v_y=-gt$$

となる。したがって式(8.18)によって，角運動量 L は

$$L=v_0t(-mgt)-\left(-\frac{1}{2}gt^2\right)mv_0=-\frac{1}{2}mv_0gt^2$$

である。つぎに力のモーメント N は，腕の長さ x と重力 $-mg$ を掛けて

$$N=v_0t\times(-mg)=-mv_0gt$$

となる。これらが式(8.17)を満たすことは代入によって確かめられる。

9　章

9.4　例題9. 5と同じようにして

$$v = -\sqrt{2gh} = -\sqrt{2\times 9.8\times 20} = -19.8[\mathrm{m/s}]$$

を得る。

9.5　力と移動方向のなす角度をθとするとき

$$\cos\theta = \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2+h^2}}$$

である。したがって求める仕事Wは

$$W = \int_0^l F_0 \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2+h^2}}dx$$

で与えられる。積分を求めるため$(l-x)^2+h^2=u^2$とおくと

$$-2(l-x)dx = 2udu$$

が成り立ち，仕事Wは

$$W = -F_0\int_{\sqrt{l^2+h^2}}^{h} du = F_0\left(\sqrt{l^2+h^2}-h\right)$$

となる。

１０　章

10.4　図に示すように, 左の質点の初期位置を原点Oとして, 座標系$\mathrm{O}-x$を定める。各質点の位置をx_1, x_2とすると，この質点系の重心の座標は

$$x_G = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$$

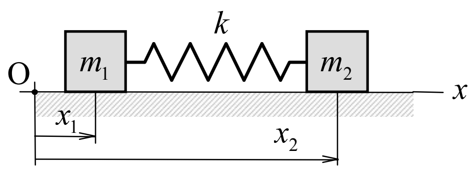
である。外力が働かないので，式(10.6)から，重心の運動方程式は

$$\frac{d^2x_G}{dt^2} = 0$$

となる。この式から，重心x_Gは

$$x_G = C_1t + C_2$$

となる。ここで任意定数C_1, C_2は初期条件によって定められる。この式によって，重心x_Gは等速直線運動をすることがわかる。



つぎに質点1,2のそれぞれの運動を求める。ばねが伸び縮みしていなければ$x_2 - x_1 = l$である。ばねの伸びeは$e = x_2 - x_1 - l$である。質点1,2に働く力は$ke, -ke$である。したがって質点1,2の運動方程式は

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k\left(x_2 - x_1 - l\right)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k\left(x_2 - x_1 - l\right)$$

となる。この式を辺々加え合わせると，重心の式が得られる。この式の解は上に求めた通りである。上式からeの式を導くため，第1,2式をm_1, m_2で割り，第2式から第1式を引くと

$$\frac{d^2 e}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) ke = 0$$

得る。この式はばねで支えられた質点と同じ式となっており，この式の解eは，a, bを任意定数として

$$e = a\cos\omega_n t + b\sin\omega_n t$$

となる。ここで$\omega_n = \sqrt{k\left(1/m_1 + 1/m_2\right)}$である。任意定数$a, b$は初期条件によって定められる。

上で求めたx_Gとeの式からx_1, x_2を求めると

$$x_1 = x_G - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(l + e\right) = x_G - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(l + a\cos\omega_n t + b\sin\omega_n t\right)$$

$$x_2 = x_G + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(l + e\right) = x_G + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(l + a\cos\omega_n t + b\sin\omega_n t\right)$$

となる。

１１　章

11.4　慣性モーメント$I_y, I_{y'}, I_{y''}$は

$$I_y = \int_0^l \frac{2m}{l} x^2 dx + \int_l^{2l} \frac{m}{l} x^2 dx = 3ml^2$$

$$I_{y'} = \int_0^l \frac{2m}{l} x^2 dx + \int_0^l \frac{m}{l} x^2 dx = ml^2$$

$$I_{y''} = \int_0^l \frac{m}{l} x^2 dx + \int_l^{2l} \frac{2m}{l} x^2 dx = 5ml^2$$

となる。

11.5　定義式に基づいて

$$I_{x'} = \int_0^b y^2 \rho a dy = \frac{1}{3} a b^3 \rho = \frac{1}{3} M b^2$$

$$I_{y'} = \int_0^a x^2 \rho b dx = \frac{1}{3} a^3 b \rho = \frac{1}{3} M a^2$$

を得る。平行軸の定理を用いて

$$I_{x'} = I_x + M\left(\frac{h}{2}\right)^2, I_{y'} = I_y + M\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

によって求めることもできる。

１２　章

12.4　点Oに関する棒の慣性モーメントIは

$$I = \int_0^l \frac{M}{l} x^2 dx = \frac{1}{3}\frac{M}{l} l^3 = \frac{1}{3} M l^2$$

である。運動方程式は

$$\frac{1}{3} M l^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{2} M g l \sin\theta = 0$$

となる。近似式$\sin\theta \fallingdotseq \theta$を用いると，運動方程式は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3}{2l} g\theta = 0$$

となる。この式の一般解は，a, bを任意定数として

$$\theta = a\cos\omega_n t + b\sin\omega_n t$$

である。ここで

$$\omega_n = \sqrt{\frac{Mgl}{2I_{\mathrm{O}}}} = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$$

である。$t = 0$において$\theta = \theta_0, d\theta/dt = 0$を用いると，求める自由振動は

$$\theta = \theta_0 \cos\omega_n t$$

となる。

12.5　重心Gまわりの慣性モーメントは$I_G = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{M}{l} x^2 dx = \frac{1}{12} M l^2$である。平行軸の定理によって，点Oに関する慣性モーメントIは

$$I = I_G + Mh^2 = \left(\frac{1}{12} l^2 + h^2\right) M$$

となる。運動方程式は

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + Mgh\sin\theta = 0$$

である。この式に近似式$\sin\theta \fallingdotseq \theta$を用いると，固有角振動数$\omega_n$は

$$\omega_n = \sqrt{\frac{Mgh}{I}} = \sqrt{\frac{gh}{\frac{1}{12}l^2 + h^2}}$$

となる。つぎにω_nの最大値を求めるため，$d\left(\omega_n{}^2\right)\Big/dh$を求めると

$$\frac{d\left(\omega^2\right)}{dh} = 12g\frac{l^2 - 12h^2}{\left(l^2 + 12h^2\right)^2}$$

となる。これが0になる条件から，求める距離hは

$$h = \frac{1}{\sqrt{12}}l \fallingdotseq 0.289\,l$$

となる。

補　章

A1

A1.3　求めるベクトル積$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$は

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{i}_0 + 2\boldsymbol{j}_0 + \boldsymbol{k}_0\right)\times\left(-\boldsymbol{i}_0 + 3\boldsymbol{j}_0 + 2\boldsymbol{k}_0\right) = \boldsymbol{i}_0 - 3\boldsymbol{j}_0 + 5\boldsymbol{k}_0$$

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} = \left(-\boldsymbol{i}_0 + 3\boldsymbol{j}_0 + 2\boldsymbol{k}_0\right)\times\left(\boldsymbol{i}_0 + 2\boldsymbol{j}_0 + \boldsymbol{k}_0\right) = -\boldsymbol{i}_0 + 3\boldsymbol{j}_0 - 5\boldsymbol{k}_0$$

である。この結果は式(1.22)の交換法則

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$$

を満たす。

A1.4　式(1.21)によって

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{AB} = \frac{\left(2\boldsymbol{i}_0 + \boldsymbol{j}_0 + \boldsymbol{k}_0\right)\cdot\left(\boldsymbol{i}_0 + \boldsymbol{k}_0\right)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2 + 1}{\sqrt{6}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。したがって求める角θは$\theta = 30^\circ$となる。

A1.5　はじめにスカラー積を利用して求める。求めるベクトルを$\boldsymbol{C} = C_x\boldsymbol{i}_0 + C_y\boldsymbol{j}_0 + C_z\boldsymbol{k}_0$とおく。これがベクトル$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$と直交するため，条件$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} = 0, \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C} = 0$が成り立たなければならない。この条件は

$$2C_x + C_y + C_z = 0$$

$$C_x + C_z = 0$$

となる。またベクトル$\boldsymbol{C}$の大きさが1になるための条件は

$$C = \sqrt{C_x{}^2 + C_y{}^2 + C_z{}^2} = 1$$

である。上の3式を連立させて解くと

$C_x = \frac{1}{\sqrt{3}}, C_y = -\frac{1}{\sqrt{3}}, C_z = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ あるいは $C_x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, C_y = \frac{1}{\sqrt{3}}, C_z = \frac{1}{\sqrt{3}}$

を得る。したがって求めるベクトルは

$$\boldsymbol{C} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\boldsymbol{i}_0 - \boldsymbol{j}_0 - \boldsymbol{k}_0\right)$$

である。

ベクトル積を利用する場合は，ベクトル積$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$の大きさを１にすればよい。ベクトル$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$のなす角$\theta = \pi/6$を用いると，求めるベクトル$\boldsymbol{C}$は

$$\boldsymbol{C} = \pm\frac{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}{AB\sin\left(\pi/6\right)} = \pm\frac{\left(2\boldsymbol{i}_0 + \boldsymbol{j}_0 + \boldsymbol{k}_0\right)\times\left(\boldsymbol{i}_0 + \boldsymbol{k}_0\right)}{\sqrt{6}\sqrt{2}\left(1/2\right)} = \pm\frac{\boldsymbol{i}_0 - \boldsymbol{j}_0 - \boldsymbol{k}_0}{\sqrt{3}}$$

となる。ベクトル$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$のなす角$\theta$が求められていないときは，まず

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \pm\left(2\boldsymbol{i}_0 + \boldsymbol{j}_0 + \boldsymbol{k}_0\right)\times\left(\boldsymbol{i}_0 + \boldsymbol{k}_0\right) = \pm\left(\boldsymbol{i}_0 - \boldsymbol{j}_0 - \boldsymbol{k}_0\right)$$

を求める。このベクトルの大きさは$\sqrt{3}$であるから，上式をこれで割れば求めるベクトルとなる。

A2

A2.3　与えられたa,bを2辺とする直角三角形を考え，cとαを問題に与えられたように定める。これを用いると$a = c\cos\alpha, b = c\sin\alpha$となり，加法定理によって

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c\cos\alpha\cos\theta + c\sin\alpha\sin\theta = c\cos\left(\theta - \alpha\right)$$

となる。

A3

A3.3　(1) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{14\left(2x+5\right)}{\left(3x+4\right)^3}$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} = -3\cos^2 x\sin x$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

A3.4　$x = 2$におけるこの曲線の勾配は$y'\left(2\right) = 2$である。したがって点$\left(2,3\right)$を通ってこの勾配をもつ直線の方程式は

$$y = 2\left(x-2\right) + 3 = 2x - 1$$

となる。

A3.5　長方形の隣り合う2辺の長さをx, yとすると，$2x + 2y = 4l$が成り立つ。長方形の面積Sは

$$S = xy = x\left(2l - x\right)$$

である。これをxで微分して0とおくと

$$\frac{dS}{dx} = 2l - 2x = 0$$

を得る。この式から，$x = l$ のとき面積は最大となることがわかる。$x = l$ のとき $y = l$ となるので，面積が最大となるのは $x = y = l$，すなわち正方形のときである。

A4

A4.3　積分定数を省略してつぎの結果となる。

(1) $-\dfrac{1}{2x^2}$　　(2) $-\dfrac{1}{4(2x+3)^2}$　　(3) $\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$

A4.4　(1) $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$ を用いて $\int \sin^2 x dx = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$

(2) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$ を用いて $\int \cos^2 x dx = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$

(3) $\sin mx \cos nx = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right\}$ を用いて

$$\int \sin mx \sin nx dx = -\frac{1}{2(m+n)}\cos(m+n)x - \frac{1}{2(m-n)}\cos(m-n)x + C$$

A4.5　(1) $S = \int_1^3 x^2 dx = \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_1^3 = \dfrac{26}{3}$

(2) $S = \int_1^3 \dfrac{1}{x} dx = \left[\log x\right]_1^3 = \log 3$

(3) $S = \int_1^3 \dfrac{1}{(2x+3)^2} dx = \left[-\dfrac{1}{2(2x+3)}\right]_1^3 = \dfrac{2}{45}$

A4.6　x の位置における高さ y は $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ である。したがって面積 S は

$$S = 2\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

である。この計算を行うため，$x = a\sin u$ とおくと $dx = a\cos u du$ となるので

$$S = 2\int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 u du = \frac{1}{2}\pi a^2$$

となる。