まえがき

著者が大学に入った頃，教養科目を1年かけてじっくり学ぶのはごく普通のことだった。しかし，著者が大学教員になった頃には，教養科目は基礎科目に名を変え，セメスター制が確立して半期ごとの単位認定が当然になっていた。そして，最近では一部でクォーター制が取り入れられ，細分化された内容を四半期ごとに学生が単位修得しなければならないケースも増えてきた。

1991年の大学設置基準の大綱化以来，基礎科目は縮小を続け，その狭い枠の中で短期決戦型の科目が増えてきた。例を挙げると，セメスター制の半期で微分積分と線形代数を講義する科目や，クォーター制の四半期で統計学を講義する科目などがある。

本書は，大学新入生に必要な基礎数学としての微分積分，線形代数，確率，統計についてコンパクトにまとめた教科書である。これらにそれぞれ1章を割き，微分積分の章に必要な予備知識として初等関数に関する章を第1章に配した。第1章を除く各章は毎週1回90分の講義7,8回分，クォーター制の四半期での1単位科目を想定してまとめた。したがって，各章は比較的独立しており，各章の初めに扉のページを設けてその章の内容や目的について概説した。

第2章と第3章の微分積分と線形代数は大学教養（基礎科目）の数学の二本柱として長年定着しており，その重要性については改めて説明する必要はないであろう。第4章と第5章の確率と統計は近年「役に立つ数学」としてその重要性が認知されており，『確率・統計』という科目名でセットにして講義されることも多い。本書では基礎数学の立場から，実際の応用へも目を配りながら，単なる計算手順の説明にとどまらず，その計算の意味するところや数学的根拠についても解説した。

本書の記述は平易を旨とした。各節は見開き偶数ページを基本とし，定義や定理などの要点を前半にまとめ，後半には例題や練習を配置して，学習参考書の体裁に近づけた。一方で，例題や練習の一部は要点中の定理などの証明問題とし，理論的な理解も軽視しないようにした。

高等学校で新学習指導要領が2012年度から数学・理科で先行実施され，本

書が出版される頃にはその第 1 期生が大学へ入学してくる。数学の新課程の目玉の一つが，全員必修の数学 I で「データの分析」という単元が加わったことであろう。その一方で，新課程では「行列とその応用」の単元がなくなってしまった。そのため本書では，特に第 3 章の線形代数と第 5 章の統計について，高等学校の内容とのつながりに留意した。

本文中の一部のグラフ・図の作図には，Wolfram Mathematica® 7 を用いた。巻末の付表は，Microsoft® Excel® 2013 の関数機能を用いて作成した。

大学の同僚の高英聖氏には，原稿を読んでいただき貴重なご意見をいただいた。コロナ社の方々には，本書の執筆を勧めていただき，編集作業を通じて多大なるご協力をいただいた。これらの方々に心から感謝いたします。

2015 年 1 月

桑野泰宏

本書の使い方

- 以下の項目をひとまとめにして，各章の中で通し番号を付している。
  - **定理・命題・系**とは，定義等から論理的に証明された事柄をいう。これらの中で非常に重要なものを定理，重要なものを命題，命題等から容易に導かれるものを系としたが，その区別は厳密なものではない。
- 以下の各項目と図，および重要な式には，それぞれ各章の中で通し番号を付してある。
  - **定義**とは，言葉の意味や用法について定めたものである。
  - **注意**とは，定義や定理・命題等に関する注意である。
  - **例**とは，定義や定理・命題等の理解を助けるための実例である。
  - **例題**では，基本的な問題の解き方を丁寧に説明した。
  - **練習**は，（一部の例外を除き）例題の類題である。
- 各章の章末には，まとめの問題を**章末問題**として配置した。
- 本書では，証明の終わりに □，解答例の終わりに◆を付した。
- 重要な用語は太字にし，巻末の索引で引用するとともに，一部の用語には英訳を付した。探したい項目や式を見つけるには，それぞれの通し番号を参考にするとともに，目次や索引を活用して欲しい。

目　　　次

1.　初　等　関　数

2.　微　分　積　分

3.　線　形　代　数

4.　確　　　　率

5.　統　　　　計

1 初 等 関 数

初等関数とは，多項式関数，有理関数，無理関数などの代数関数と，**三角関数**，**逆三角関数**，**指数関数**，**対数関数**，およびこれらの関数の有限回の合成で得られる関数のことである。この章では，第 2 章で学ぶ微分積分に最低限必要な初等関数について学ぶことを目標とする。

測量などの実用上の必要から生まれた数学の分野に三角法がある。三角関数は，三角法の中から生まれた最も重要な関数といえる。本書では任意の実数を角度に対応させる**一般角**の**弧度法**を用い，単位円を用いて三角関数を定義した。三角関数の定義域をしかるべく制限すると，1 : 1 対応となり，その逆関数を定義することができる。それが逆三角関数である。

中学校以来学んできた指数法則は，指数の範囲を自然数から整数，有理数，実数へと拡張することができる。そうして実数を定義域とする指数関数を導入した。対数関数は指数関数の逆関数である。対数の概念はもともと，天文学における三角関数の乗法・除法計算を加法・減法に変換することから生まれた。

ネイピアの対数表は 1614 年に出版された。これにより，巨大な数の乗法と除法が加法と減法により計算できるようになった。同時代人であったケプラーが，惑星の運動に関するケプラーの法則を発表したのは 1619 年であった。

ケプラーの発見により惑星が太陽を一方の焦点とする楕(だ)円軌道を描くことが明らかになり，天体の運動は円運動であるという古代ギリシア以来の宇宙観に打撃を与えた。なぜ円ではなく楕円かという問が，ニュートンの万有引力の法則と運動の法則の発見につながっている。その意味で，近代科学の成立にネイピアの対数表の果たした役割は大きい。

1.1　三　角　関　数

この節では**三角関数**（trigonometric function）の定義の復習から始める。

定義 1.1　(三角関数)　xy 座標平面で，原点を中心とする半径 1 の円周 C を考える。$+x$ 軸から反時計回りに測って角度 θ となる C 上の点 P を角度 θ の点という（**図 1.1**）。このときの点 P の座標を $(\cos\theta, \sin\theta)$ とすることにより，**正弦関数** $\sin\theta$, **余弦関数** $\cos\theta$ を定義する。

また，$\cos\theta \neq 0$ のとき

$$\tan\theta := \mathrm{OP}\ \text{の傾き} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

で，**正接関数** $\tan\theta$ を定義する。

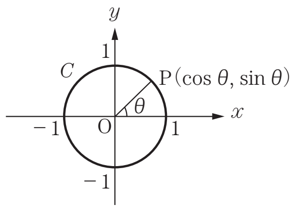

図 1.1　三角関数の定義

次に，**弧度法**と**一般角**について説明しよう。本書では特に断らない限り，角度は弧度法で測ることにする。弧度法では，半径 1 の扇形の弧の長さが θ のとき，対応する中心角を θ〔rad〕と定義する。〔rad〕は角度の単位で，ラジアン（radian）と読む。

一周を 360 deg (= 360°) とする度数法との対応を述べよう。弧度法では半径 1 の円周の長さが 2π なので，$360\,\mathrm{deg} = 2\pi\ \mathrm{rad}$，すなわち $180\,\mathrm{deg} = \pi\ \mathrm{rad}$ となる。したがって，次の比例関係が成り立つ。

$$x\,〔\mathrm{deg}〕 = \frac{\pi x}{180}〔\mathrm{rad}〕, \qquad x\,〔\mathrm{rad}〕 = \frac{180x}{\pi}〔\mathrm{deg}〕$$

また，一般角とは，角度 θ を必ずしも $0 \leqq \theta < 2\pi$ に制限しないことをいう。$\theta \geqq 2\pi$ のときは，必要なだけ何周かして角度 θ の点を決定する。例えば，角度 $13\pi/3$ の点は角度 $\pi/3$ の点と一致する（$13\pi/3 = 2 \times 2\pi + \pi/3$ より）。また，$\theta < 0$ のときは，時計回りに角度 $-\theta(> 0)$ だけ回って角度 θ の点を決定する。

命題 1.1　任意の実数 θ に対して次の関係が成り立つ。

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{1.1}$$

三角関数 $y = \sin x,\ \cos x,\ \tan x$ のグラフは**図 1.2** のようになる。

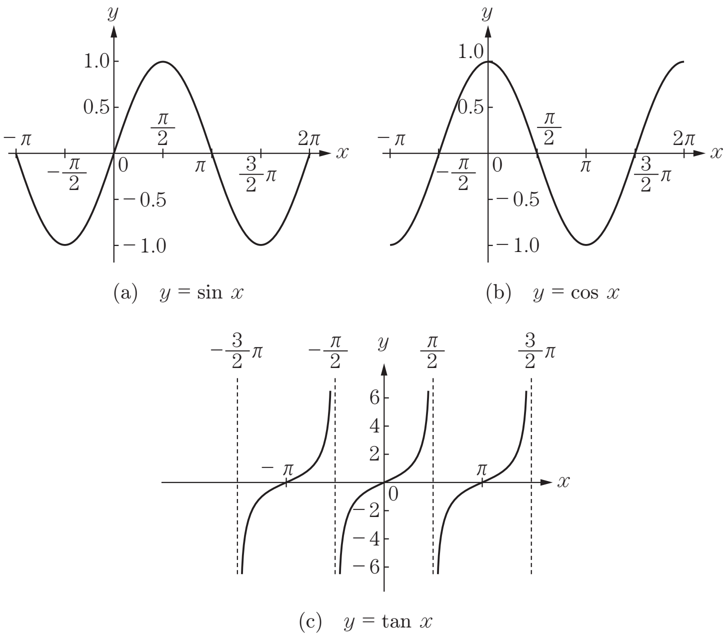

図 1.2　三角関数のグラフ

命題 1.2　三角関数について, 次の加法定理が成り立つ (すべて複号同順)。

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \tag{1.2 a}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \tag{1.2 b}$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \tag{1.2 c}$$

例題 1.1　次の問に答えよ。

(1)　次の角度を，度数法は弧度法に，弧度法は度数法に直せ。

(a)　60°　　(b)　$\dfrac{2\pi}{3}$　　(c)　-20°　　(d)　5

(2)　次の値を求めよ。

(e)　$\sin\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$　　(f)　$\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$　　(g)　$\tan\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$

解答例　(1)　$180^\circ = \pi$ rad（以下，rad を省略）であるので

(a)　$60^\circ = \dfrac{60}{180}\pi = \dfrac{\pi}{3}$　　(b)　$\dfrac{2\pi}{3} = 180^\circ \times \dfrac{2}{3} = 120^\circ$

(c)　$-20^\circ = \dfrac{-20}{180}\pi = -\dfrac{\pi}{9}$　　(d)　$5 = 180^\circ \times \dfrac{5}{\pi} = \left(\dfrac{900}{\pi}\right)^\circ$

である。

(2)　**図 1.3** より次の値を得る。

(e)　$\sin\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(f)　$\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

(g)　$\tan\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

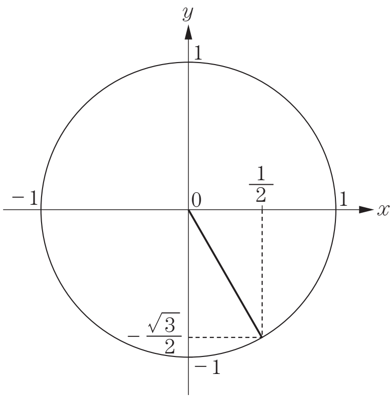

図 1.3　角度 $5\pi/3$ に対する三角関数の値　◆

練習 1.1　加法定理を用いて，$\cos\dfrac{\pi}{12}$ を求めよ。

例題 1.2　次の三角関数の和・差を積に直す公式を証明せよ。

(1)　$\sin A + \sin B = 2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

(2)　$\sin A - \sin B = 2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

(3)　$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

(4)　$\cos A - \cos B = -2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

証明　命題 1.2 の式 (1.2 a) の複号の二つの和と差を取ると，それぞれ

(1′)　$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

(2′)　$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$

を得る。さらに，$\alpha+\beta = A,\ \alpha-\beta = B$ とおくと

$$\alpha = \frac{A+B}{2}, \qquad \beta = \frac{A-B}{2}$$

となるので，(1), (2) が得られる。

次に，命題 1.2 の式 (1.2 b) の複号の二つの和と差を取ると，それぞれ

(3′)　$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

(4′)　$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$

を得る。よって (1), (2) と同様に，$\alpha+\beta = A,\ \alpha-\beta = B$ とおくと，(3), (4) が得られる。　□

練習 1.2　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，関数 $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ を考える。このとき次の問に答えよ。

(1)　加法定理を用いて $y = 2\sin(x + \pi/3)$ が成り立つことを示せ。

(2)　この関数の最大値，最小値を求めよ。また，最大値，最小値を与える x の値を求めよ。

1.2 逆三角関数

一般に，関数 $y = f(x)$ が $1:1$ 対応であるとき，言い換えるとすべての y の値に対し，$f(x) = y$ をみたす x の値がただ一つのとき，f の**逆関数**（inverse function）f^{-1} を定義できる。この節では重要な逆関数の例として，**逆三角関数**（inverse trigonometric function）を取り上げる†。

定義 1.2　(**逆三角関数**)　$f(x) = \sin x$ の定義域を $J = [-\pi/2, \pi/2]$ に制限すると，値域は $I = [-1, 1]$ で $1:1$ 対応となる。その逆関数を $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$ と記し，**逆正弦関数**という。

$g(x) = \cos x$ の定義域を $K = [0, \pi]$ に制限すると，値域は I で $1:1$ 対応となる。その逆関数を $g^{-1}(x) = \cos^{-1} x$ と記し，**逆余弦関数**という。

$h(x) = \tan x$ の定義域を $\mathring{J} = (-\pi/2, \pi/2)$ に制限すると，値域は $\mathbb{R}$ で $1:1$ 対応となる。その逆関数を $h^{-1}(x) = \tan^{-1} x$ と記し，**逆正接関数**という。

逆三角関数 $y = \sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x$ のグラフは**図 1.4** のようになる。

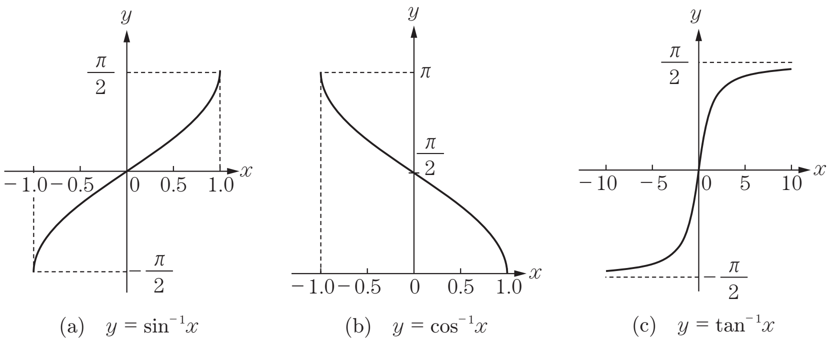

図 1.4　逆三角関数のグラフ

† 三角関数はもともと $1:1$ 対応ではないが，定義域を制限することで $1:1$ にできる。

例題 1.3 (1) 次の値を求めよ。

(a) $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ (c) $\tan^{-1}\sqrt{3}$

(2) $-1 \leqq x \leqq 1$ に対し，次の関係式が成り立つことを示せ。

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} \tag{1.3}$$

解答例 (1) (a) $\sin^{-1}(1/\sqrt{2}) = x$ とおくと, $\sin x = 1/\sqrt{2}$（ただし, $-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2$）と等価である。よって

$$x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

(b) $\cos^{-1}(-1/2) = x$ とおくと，$\cos x = (-1/2)$（ただし，$0 \leqq x \leqq \pi$）と等価である。よって

$$x = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

(c) $\tan^{-1}\sqrt{3} = x$ とおくと，$\tan x = \sqrt{3}$（ただし，$-\pi/2 < x < \pi/2$）と等価である。よって

$$x = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$ ◆

証明 (2) $\sin^{-1}x = \alpha$ とおくと，$\sin\alpha = x$（ただし，$-\pi/2 \leqq \alpha \leqq \pi/2$）である。よって，$\beta = \pi/2 - \alpha$ とおくと，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ である。

$\cos\beta = \cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha = x$ より，$\cos^{-1}x = \beta$ が成り立つ。よって

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

となり，式 (1.3) が成り立つ。 □

練習 1.3 次の関係式が成り立つことを証明せよ。

$$\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

索　　　引

―― 著 者 略 歴 ――

1988 年　東京大学理学部物理学科卒業
1993 年　東京大学大学院理学系研究科博士課程修了（物理学専攻）
　　　　博士（理学）
1993 年　京都大学数理解析研究所研修員（日本学術振興会特別研究員）
～98 年
1994 年　メルボルン大学数学科 Research Fellow (Level A)
～95 年
1998 年　鈴鹿医療科学大学講師（数学担当）
2005 年　鈴鹿医療科学大学助教授
2006 年　鈴鹿医療科学大学教授
　　　　現在に至る

大学新入生のための基礎数学
Basic Mathematics for Freshmen

2015 年 2 月 20 日　初版第 1 刷発行 ★

検印省略

著　者　桑野（くわの）泰宏（やすひろ）
発行者　株式会社　コロナ社
　　　　代表者　牛来真也
印刷所　三美印刷株式会社

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発行所　株式会社　コロナ社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–06108–6　（松岡）（製本：愛千製本所）
Printed in Japan