

現場で役立つ
制御工学の基本(演習編)

— 解答と誤解答から学ぶ演習書 —

博士(工学) 涌井 伸二
博士(工学) 橋本 誠司
博士(工学) 高梨 宏之
博士(工学) 中村 幸紀

共著

コロナ社

ま え が き

制御工学の講義に対する試験結果を見ると、学生の間違いや誤認の仕方は共通している。そこで、講義中にあえて誤解答を説明する。すると、誤解答をとおして一層の理解が図れるのであろう、このような講義を受けた学生の試験結果は良好になる。さらに、著者らが学生あるいは初級の研究開発者であったとき、既刊の書籍や演習書を参考にして、いままさに対象としている制御系の理解を図る、あるいは問題解決のための例題を探すことがあった。しかし、数値例題の解答だけからは、演習問題の意図をくみ取ることができないばかりか、実務の場面での使用方法がわからず苦労したものである。また、企業の実働エンジニアとの打合せで、いろいろな制御系設計や解析方法を検討・提案するなかで、その簡便な例題や応用事例、あるいはそれらが記載された文献を求められることが非常に多い。

そこで、講義や研究開発の経験と著者らの若いときの勉学の有りようを踏まえて、従来の演習書に代わるものをここに出版した。制御理論を使いこなせることを狙いとして、あえて誤解答も記載し、正解とあわせて丁寧な解説をしている。

本書の特徴は以下のとおりである。

- (1) 演習問題の先頭には、一目で内容を想起しやすいタイトルをつけた。
 - (2) 制御理論の適用や応用に重点をおいた問題を多数用意した。
 - (3) 単に解答で終わらず、導出に至る計算過程も詳細に記載した。
 - (4) 誰もが経験する誤認に基づく誤解答例を適宜に提示した。
 - (5) 各問題の解説には、誤解答に至る経緯、演習問題の意図、そしてほかの演習問題との関係などにも言及した。
 - (6) 基本理論を中心とした姉妹書「現場で役立つ制御工学の基本」(コロナ社)との関連部分を随時明記し、あわせて内容理解の強化を図れるよう配慮した。
- 最後に、出版にあたり多大なるご尽力を頂いたコロナ社の皆様に感謝します。

2017年4月

著者一同

目 次

1 諸言—本書を活用するにあたって—

1.1 執筆の動機	1
1.2 応用力を身につけるための演習	1
1.3 演習問題の設定と解答の方針	3
1.4 本書の活用方法	6

2 フィードバック制御の詳解

【演習 2.1】 さまざまなセンサの機能と役割	7
【演習 2.2】 回転速度を検出するセンサ	9
【演習 2.3】 センサとアクチュエータ	9
【演習 2.4】 サーボモータの制御系設計	10
【演習 2.5】 RC 直列回路の伝達関数, 時定数, 時間応答	12
【演習 2.6】 加速度センサの使用	14
【演習 2.7】 負帰還符号の設定—3重ループの場合—	16
【演習 2.8】 比例-積分制御器 (PI 制御器) の伝達関数	19
【演習 2.9】 時定数と時間応答の関係	20

3 ラプラス変換と伝達関数

【A：基礎編】

【演習 3A.1】 数式からのモデル化	22
【演習 3A.2】 ヘビサイドの展開定理を用いた部分分数展開	24
【演習 3A.3】 複素数を含む部分分数展開	25
【演習 3A.4】 微分方程式のラプラス変換による解法 (初期値考慮)	26

iv	【演習 3A.5】	微分方程式から伝達関数の導出方法	28
	【演習 3A.6】	伝達関数の基本形と時定数, 固有角周波数, 減衰係数の対応	29
目	【演習 3A.7】	ブロック線図からの伝達関数導出 (その 1)	30
	【演習 3A.8】	ブロック線図からの伝達関数導出 (その 2)	31
	【演習 3A.9】	閉ループ伝達関数の導出	33
	【演習 3A.10】	開ループ伝達関数の導出	34
	【演習 3A.11】	伝達関数の計算とその特性方程式の性質	36
	【演習 3A.12】	2 入力 1 出力の伝達関数の導出	37
次	【演習 3A.13】	近似微分の伝達関数	40
	【演習 3A.14】	オペアンプを使った擬似積分補償回路に対する 最終値定理の適用	41
	【演習 3A.15】	定常偏差の確認 (その 1)	43
	【演習 3A.16】	定常偏差の確認 (その 2)	44
	【演習 3A.17】	定常応答の確認 (その 1)	45
	【演習 3A.18】	定常応答の確認 (その 2)	46

[B: 応用編]

	【演習 3B.1】	ブロック線図のブロックおよび矢印の意味	47
	【演習 3B.2】	RL 直列回路のブロック線図	49
	【例題 3B.3】	マス・ばね・ダンパ系のブロック線図	49
	【演習 3B.4】	ブロック線図の作成	51
	【演習 3B.5】	ブロック線図の等価変換 (その 1)	52
	【演習 3B.6】	ブロック線図の等価変換 (その 2)	53
	【演習 3B.7】	ブロック線図の等価変換 (その 3)	54
	【演習 3B.8】	ブロック線図の効用 (正帰還の効果)	55
	【演習 3B.9】	導出した伝達関数のチェック方法と近似による理解	57
	【演習 3B.10】	分母と分子のキャンセルという演算操作	60

4 時間領域から見るシステムの特性

	【演習 4.1】	日常生活におけるインパルス応答とステップ応答	61
	【演習 4.2】	インパルス応答とステップ応答	62

【演習 4.3】	時間領域と s 領域での応答計算	62
【演習 4.4】	積分系と 1 次遅れ系	64
【演習 4.5】	むだ時間を含む 1 次遅れ系の時定数の読み取り	65
【演習 4.6】	RL 直列回路の時定数とゲイン線図	66
【演習 4.7】	2 次遅れ系の時間応答と周波数応答の対比	68
【演習 4.8】	2 次遅れ系の極配置から減衰係数 ζ の大小を判断	70
【演習 4.9】	伝達関数とその極零表示	72
【演習 4.10】	システムの型と定常偏差	73
【演習 4.11】	制御系の型と内部モデル原理 (その 1)	75
【演習 4.12】	制御系の型と内部モデル原理 (その 2)	75
【演習 4.13】	制御対象が積分器を有するシステムの定常偏差	78
【演習 4.14】	外乱に対するシステムの型と定常特性 (その 1)	80
【演習 4.15】	外乱に対するシステムの型と定常特性 (その 2)	81
【演習 4.16】	内部モデル原理	83

5 周波数領域から見るシステムの特性

【演習 5.1】	ゲイン dB の計算	84
【演習 5.2】	伝達関数とボード線図の概略図	85
【演習 5.3】	1 次系のハイパスフィルタ	86
【演習 5.4】	周波数応答と時間応答の対応	88
【演習 5.5】	実測のボード線図に -40 dB/dec の傾斜を作図	90
【演習 5.6】	周波数応答のなかのゲイン曲線の dB 表示	91
【演習 5.7】	IV (電流・電圧) 変換器の伝達関数の周波数応答	93
【演習 5.8】	デカード (decade) とオクターブ (octave) の関係	94
【演習 5.9】	オペアンプを用いた位相進み補償回路の伝達関数の導出と 折線近似によるゲイン曲線の作図	96
【演習 5.10】	オペアンプを用いた擬積分補償回路の折線近似による ゲイン曲線の作図	100
【演習 5.11】	むだ時間要素の周波数特性と安定性に及ぼす影響	102
【演習 5.12】	周波数伝達関数の大きさの計算	103
【演習 5.13】	基本伝達関数のボード線図を描く	104

6

制御系の安定性を検討する手法

【演習 6.1】	ゲイン余裕と位相余裕の読み取り	106
【演習 6.2】	数値例に対するラウスの安定判別法の適用とその実務への応用	108
【演習 6.3】	フィードバック制御による安定化	109
【演習 6.4】	ラウスの安定判別法	110
【演習 6.5】	ナイキスト線図の描画と安定判別法	112
【演習 6.6】	ナイキストの安定判別法	113
【演習 6.7】	1次遅れ系の安定性	115
【演習 6.8】	電磁石に通電する電流ドライバの時定数が 安定性に及ぼす影響(拡張根軌跡法)	116
【演習 6.9】	システムが有するむだ時間の安定性に対する影響度	117

7

制御系設計時の留意点

【演習 7.1】	レギュレーション問題とサーボ問題の区別	120
【演習 7.2】	実測の周波数応答からの バンド幅, 共振値, 共振周波数の読み取り	121
【演習 7.3】	PID 制御器の役割	122
【演習 7.4】	PD 補償器の調整	123
【演習 7.5】	外乱オブザーバの実現	125
【演習 7.6】	ノッチフィルタの周波数特性	126
【演習 7.7】	ノッチフィルタによる不安定化	128
【演習 7.8】	位相進み補償と位相遅れ補償の目的	129
【演習 7.9】	位相進み補償器の設計	130
【演習 7.10】	位相進み補償によるむだ時間補償法	132

1

諸

言

—本書を活用するにあたって—

応用の場面で自在に理論を操るためには、それまでに多数の演習を行っておく必要がある。しかし、制御工学の応用に関する演習書が少ないこと、また、従来の演習書は、初学者あるいは若手の研究開発者にとって理論の活用を容易にする記載ではないことが多い。そこで、あえて誤解答も示し解説を加えた演習書を上梓した。本章では、執筆の動機や演習の必要性、演習問題の設定と解答の方針について述べる。

1.1 執筆の動機

姉妹書「現場で役立つ制御工学の基本」(コロナ社)には、章末に演習問題をつけている。その解答では、正解の結果だけを簡素に記載する書籍が多いなか、これを得る詳細な計算過程までも丁寧に記載した。理由は、解答不能な場合、そのまま放置することが多いのではないかと思うからである。

しかし、著者らには危惧がある。計算を経て正解にたどり着けても、数少ない章末問題そのもの、あるいは正答にも理解不十分な学生や技術者がおり、姉妹書で得た知識を実践で活かせないのではないかということである。疑問に真摯に応えることは、制御理論の活用にとって避けてはならないことであり、むしろ歓迎すべきことと思う。ところが、伝統的な制御工学のテキストおよび演習書の場合、一直線に理論を解説し、そして演習に対する唯一の正答を提示しているものがほとんどである。つまり、疑問に解決を与える演習になってはいない。ここに焦点をあてたのが本書である。

具体的に、講義に関する学生の質問、単位認定のための試験結果の分析、卒論・修論テーマを進捗させていくときに遭遇した誤認例、そして現役の技術者との相談内容などから、現場で直面するような基礎から実践までの問題を多く含め、章末問題の不足を補い、あえて誤解答を示し、かつ誤解の原因まで言及した演習書になっている。

1.2 応用力を身につけるための演習

理工学分野での理論系科目に対しては、原理・原則に対する真の理解を得る目的

2 で演習が課される。一般化あるいは普遍化した公式を、具体的事例に適用することによって、応用力を身につけさせるためである。以下に、普遍化された公式の例をみていこう。

まず、電気回路の演習書^{1)†}には、キルヒホッフの法則が以下のように記載されている。

- ・ 第1法則（電流連続の法則）：回路内の任意の節点において、流入する電流を正、流出する電流を負とすると、これらの電流 I_k の代数和は0となる。一般化して、 $\sum I_k = 0$ である。
- ・ 第2法則（電圧平衡の法則）：回路内の任意の閉回路において、同一方向にすべての起電力 E_k および電圧降下 $R_l I_l$ を加えたものは0である。一般化して、 $\sum E_k - \sum R_l I_l = 0$ と表現される。

上記法則を暗唱する勉強だけでは、無益とまでいわないが、応用力は全く身につかない。応用力を得るには、具体的な回路構造に対して、上記二つの法則を使った回路方程式を立式する演習が必須となる。なぜならば、第1法則では「=0」の記載に初学者は戸惑い、電気・電子回路のなかで電流が突如として消滅するという立式を行ってしまいがちだからである。電流は決して消滅することはない。演習を行うことによって「=0」が電流の方向に関連していると納得する。第2法則では、「回路内の任意の閉回路」だけを取り出して立式を終わらせることが多い。すべての閉回路に対しての立式をしなければ、正答は導けない。実は、第1法則でも同様であり、「任意の節点」という説明に誤解が生じやすい。つまり、現実の問題を解くには、回路構造を見抜いたうえで、すべての節点および閉回路について連立方程式を立てるという訓練としての演習が必要となる。

そして、難関科目の一つである電磁気学の演習書²⁾には、アンペールの周回積分の法則が登場する。以下のとおりである。

閉曲線 C が電流 I の流れる巻数 N のコイルを貫くとき、磁界の強さを \mathbf{H} とおいて次式である。

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = NI$$

† 肩つき数字は章末の参考文献番号を表す。

コンパクトで美しい公式である。しかし、応用の場面では、実空間における巻線の配置を踏まえた公式の使いこなしが必要となる。そして、幾何学および積分計算に精通しなければ具体的事例の解を求めることはできない。

さらに、制御工学のテキスト(姉妹書)³⁾には、制御の型の定義に関して以下のような記載がある。

開ループ伝達関数 $G(s)$ は、一般に

$$G(s) = \frac{K \cdot b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^j \cdot s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

と表せる。このとき、積分器 $1/s$ の数 j に応じて、 $j = 0$ のとき 0 型、 $j = 1$ のとき 1 型、 $j = 2$ のとき 2 型と分類する。

上記をそのまま記憶し、 $G(s)$ の具体的な計算を実施しても、不必要に労力と時間がかかるばかりである。なぜならば、具体的な制御ブロック線図から積分器 $1/s$ の数 j は一目で計数できてしまうからである。一般化するために、開ループ伝達関数 $G(s)$ を式で記載したにすぎないのであり、このことは演習を行うことによって自然に了解できる。

つまり、いずれの科目においても、法則や公式の具体的な事例への適用という演習をとおして、応用力が獲得できる。加えて、法則や公式そのものに対する一層の理解も図れる。さらに、演習によって、研究開発の場面で遭遇するさまざまな課題を解決する道具としての理論の適用能力が磨かれる。

1.3 演習問題の設定と解答の方針

演習問題の設定と解答の記載は下記のとおりとしている。

【演習 5.5】 実測の・・・

図 5.5.1 は位置決めステージの実測の周波数応答である。…

解答

.....

誤解答

.....

① 内容を想起しやすいタイトル。

② 応用場面を意識した問題。

③ 単に解答で終わらず、導出過程も記載。

④ よく見かける誤解答例を提示。

解説 で誤解答に至る経緯などに言及。

⑤ 誤解答しやすい原因や演習問題の意図などを解説。**解答**では示せなかった説明も記載。

より具体的に、以下に5章の【演習 5.5】の一部を示して、演習問題の設定および解答の記載に関する方針①～⑤を説明する。

まず、① 演習内容を容易に想起できるタイトルをつけ、これを目次とした。いま取り組んでいる課題が存在し、この解決を図るために演習書に記載の問題を探索することがある。従来の場合、配置されている問題を順番に参照しなければならないが、この労力を緩和するためである。

次に、② 制御理論の応用場面を意識した問題を多数採用している。下記の演習では、ボード線図のなかのゲイン曲線に傾斜 -40 dB/dec を入れるという、いわば作図問題である。解答は単純ともいえる作図作業になるが、この演習が意図することは、後の**解説**の項まで読み進めると包括的に納得できる。

【演習 5.5】 実測のボード線図に -40 dB/dec の傾斜を作図

図 5.5.1 は位置決めステージの実測の周波数応答である。これに、 -40 dB/dec の傾斜を描き入れよ。

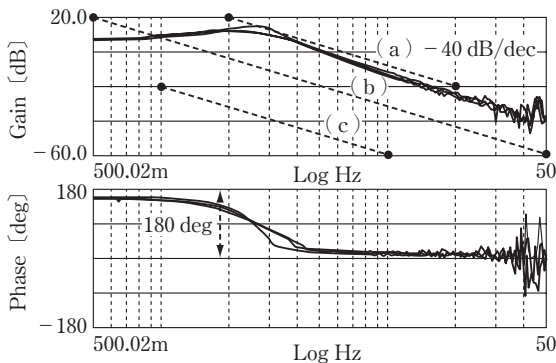


図 5.5.1 位置決めステージの周波数応答 (姉妹書の図 5.3.7)

③ 演習問題の設定後には、以下のように**解答**を記載している。単に正解だけを記載するのではなく、これを導くに至った経緯も含めて丁寧な説明を行っている。

解答 図 5.5.1 上段のゲイン曲線には、すでに正解の傾斜である (a), (b), (c) を入れた。(a) の場合は、 2 Hz で 20 dB の基点と、周波数が 1 dec 高い 20 Hz での $20 - 40 = -20\text{ dB}$ の点を結んでいる。… (省略) …

④ **解答** の次には、**誤解答** の記載を行った。このことが本書の最大の特徴となっている。

一般に、初学者あるいは初級技術者の場合、誤解、思い込み、そして理論の理解不足によって、正解にたどり着けないことが多々ある。このとき、誤解答に至る道筋を鮮明にたどることによって、むしろ理論およびこの適用法に対する理解が得られる。このように著者らは考えるので、学生からの講義に関する質問内容、卒論・修論テーマを進めていく途上で実際に経験した間違い例、そして企業の開発現場での誤認例を掲載した。つまり、誰もがつまづいた、あるいは誤認が生じやすい誤解答の例を示している。もちろん、すべての演習に**誤解答** を記載しているわけではないことをお断りしておく。

誤解答 誤解答の例を図 5.5.2 に示す。まず、図上段の場合を見てみよう。ほとんどの場合、片対数グラフの横軸は 0.1—1—10—100 Hz という数値の並びとなる。… (省略) …

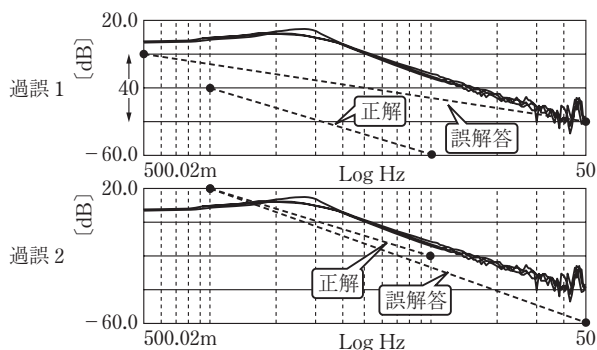


図 5.5.2 -40 dB/dec の傾斜を描く間違い例

⑤ 最後に、解答と誤解答を対比しつつ、総合の**解説** を行っている。具体的に、演習が問題のための問題でないことを記載している。あるいは、誤解答に至った背景を推論も交えて言及している。さらには、演習内容を使った産業機器への応用まで述べている。したがって、演習をとおして、制御工学の基本的知識と応用の相互関係、および道具として実践できる能力を身につけ、また、産業への結びつきを学ぶことができる。さらには、現場での専門用語の使用法も自然と習得できるはずである。

解説 対象とする位置決めステージはマス・ばね・ダンパ系なので、2次遅れ系の周波数応答になる。そうであるならば、低周波数領域で平坦なゲイン特性であり、共振

1.4 本書の活用方法

本演習書では，姉妹書で紹介した応用例から問題を多数出題している。このため，以下のように姉妹書と併用しながら勉強することを勧める。

Step 1：姉妹書を読み，制御工学の基礎を理解する[†]。

Step 2：本書の演習問題を解く。

Step 3：本書の**解答**，**解説**に加えて，さらに**誤解答**も読む。初学者が陥りがちなミスを知ることで正しい解答の導出方法を習得する。

参考文献

- 1) 大下真二郎：詳解電気回路演習（上），共立出版（1979）
- 2) 後藤憲一，山崎修一郎 共編：詳解電磁気学演習，共立出版（1970）
- 3) 涌井伸二，橋本誠司，高梨宏之，中村幸紀：現場で役立つ制御工学の基本，コロナ社（2012）

[†] 内容の理解を深めるため，姉妹書に掲載したシミュレーションのMATLAB[®]のプログラムをコロナ社のWebサイト (<http://www.coronasha.co.jp/np/isbn/9784339032024/>) に公開している。ソースコードのパラメータ値を変更してプログラムを実行すると，掲載されたものとは別の結果を確認できるため，その原因を吟味するなどの勉強方法が可能である。

分子の係数を比較して

$$A + B = -1 \quad (3A.2.8)$$

$$A + B + j(A - B) = 1 \quad (3A.2.9)$$

式(3A.2.8)を(3A.2.9)に代入して整理すると

$$j(A - B) = 2 \quad (3A.2.10)$$

を得る。式(3A.2.10)を(3A.2.8)と連立させて解くことで、式(3A.2.11)の解が得られる。

$$A = \frac{-1 - j2}{2}, \quad B = \frac{-1 + j2}{2} \quad (3A.2.11)$$

(2) 係数比較によって部分分数の分子を計算する。

$$\frac{s+2}{s(s+1)(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-1} \quad (3A.2.12)$$

式(3A.2.12)の右辺を通分して整理すると

$$\begin{aligned} \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-1} &= \frac{(s+1)(s-1)A + s(s-1)B + s(s+1)C}{s(s+1)(s-1)} \\ &= \frac{(A+B+C)s^2 + (C-B)s - A}{s(s+1)(s-1)} \end{aligned} \quad (3A.2.13)$$

となるので、式(3A.2.12)左辺と式(3A.2.13)右辺の分子を係数比較して式(3A.2.14)となる。

$$A + B + C = 0, \quad C - B = 1, \quad -A = 2 \quad (3A.2.14)$$

式(3A.2.14)を解いて、 $A = -2$, $B = 1/2$, $C = 3/2$ を得る。

誤解答 問(1)の誤解答は【演習 3A.3】で示す。

解説 制御工学では、高次の伝達関数(2次以上)を複数の1次伝達関数の和で表すことがある。これを部分分数展開(partial fraction expansion)という(姉妹書 3.4.3 項参照)。分母を因数分解できることが前提であり、因数分解した因子が部分分数の分母となる。そのうえで、分子を決定しなければならない。分子を決定する場合、以下の解法がある。

解法1: ヘビサイドの展開定理を用いて、分子の値を決定する。

解法2: 式(3A.2.1), (3A.2.4)のように1次式の分子を仮定し、通分した後でもとの式の分子と係数比較する。

2次式程度であれば、いずれの方法で解いても労力は同じ程度である。しかし、3次式以上になると、解法2では計算が煩雑(n 次の伝達関数では n 個の連立方程式を解く)になる。計算ミスの原因にもなるため、解法1を使うべきである。

【演習 3A.3】 複素数を含む部分分数展開

次の伝達関数を部分分数に展開せよ。

$$G(s) = \frac{-s+1}{s^2+2s+2}$$

解答 【演習 3A.2】(1) で示したとおり、ヘビサイドの展開定理を用いて分子の係数を求めることができる。

誤解答 【演習 3A.2】の式(3A.2.1)右辺を通分して整理すると、次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{A}{s+1-j} + \frac{B}{s+1+j} &= \frac{A(s+1+j) + B(s+1-j)}{s^2 + 2s + 2} \\ &= \frac{(A+B)s + A+B+j(A-B)}{s^2 + 2s + 2} \end{aligned} \quad (3A.3.1)$$

このとき分子 s の係数は -1 であるから

$$A + B = -1 \quad (3A.3.2)$$

を得る。また、分子の s^0 の係数は 1 であるから、実部 $= 1$ 、虚部 $= 0$ として

$$A + B = 1 \quad (3A.3.3)$$

$$A - B = 0$$

を得る。しかし、式(3A.3.2)と(3A.3.3)の第一式は矛盾するため、式(3A.3.1)を満たす A 、 B は存在しない。

解説 部分分数展開を分子の係数比較によって計算するとき、複素数が含まれる場合には特に注意しなければならない。式(3A.3.1)のように通分した後で、分子の係数をもとの伝達関数の分子と比較し、分子の s^0 の係数が実数であるから、虚部 $= 0$ としてしまうと、正しい係数は得られない。ここでは、 s^0 の係数として見なければならないため、複素数 j も考慮して、式(3A.3.4)の関係式を解く必要がある。

$$\begin{aligned} A + B &= -1 \\ A + B + j(A - B) &= 1 \end{aligned} \quad (3A.3.4)$$

【演習 3A.4】微分方程式のラプラス変換による解法 (初期値考慮)

入力が $u(t)$ 、出力が $y(t)$ であるシステムの微分方程式が式(3A.4.1)で与えられるとき、 $u(t)$ に単位ステップ信号 $u_s(t)$ を与えたときの時間応答 $y(t)$ を求めよ。

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) = 3u(t) \quad (3A.4.1)$$

ここで初期値は $y(0) = a$ 、 $\dot{y}(0) = b$ とする。

解答 初期値を考慮し両辺をラプラス変換すると、次式となる。

$$[s^2Y(s) - as - b] + 5[sY(s) - a] + 4Y(s) = \frac{3}{s} \quad (3A.4.2)$$

$Y(s)$ について解くと

$$(s^2 + 5s + 4)Y(s) = \frac{3}{s} + as + b + 5a$$

$$Y(s) = \frac{s(as + b + 5a) + 3}{s(s+1)(s+4)} \quad (3A.4.3)$$

となる。さらに、ヘビサイドの展開定理を用いて部分分数展開すると

$$Y(s) = \frac{3}{s} - \frac{3-4a-b}{s+1} + \frac{3-4a-4b}{s+4}$$

となる。よって、逆ラプラス変換により式(3A.4.4)となる。

$$y(t) = \frac{3}{4} - \frac{3-4a-b}{3} e^{-t} + \frac{3-4a-4b}{12} e^{-4t} \quad (3A.4.4)$$

解説 通常の問題に見られる初期値が零の場合について考える。この場合には、式(3A.4.1)のラプラス変換は

$$s^2 Y(s) + 5sY(s) + 4Y(s) = \frac{3}{s} \quad (3A.4.5)$$

となり、よって $Y(s)$ は

$$Y(s) = \frac{3}{s(s+1)(s+4)} \quad (3A.4.6)$$

である。その部分分数展開は

$$Y(s) = \frac{3/4}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1/4}{s+4}$$

となり、時間応答はその逆ラプラス変換により式(3A.4.7)で表される。

$$y(t) = \frac{3}{4} - e^{-t} + \frac{1}{4} e^{-4t} \quad (3A.4.7)$$

式(3A.4.4)と(3A.4.7)を見比べ、式(3A.4.4)を初期値が影響する項 $y_i(t)$ とそれ以外の項 $y_{ni}(t)$ に分けて書き直すと、次式となる。

$$y(t) = y_i(t) + y_{ni}(t) = \left(\frac{4a+b}{3} e^{-t} + \frac{-4a-4b}{12} e^{-4t} \right) + \left(\frac{3}{4} - e^{-t} + \frac{1}{4} e^{-4t} \right)$$

ここで $a=1$, $b=1$ とした場合の時間応答波形を図 3A.4.1 に示す。破線が初期値なしの応答 y_{ni} で実線が初期値ありの応答 y である。また、初期値応答 y_i が一点鎖線である。この結果より出力の初期値 $y(0)=1$ の影響を受けて、時刻 0 では 1 から動作している。また、その微分値 $\dot{y}(0)=1$ の影響から、時刻 0 で y は正の方向に動作を開始していることが確認できる。さらに定常では式(3A.4.4)にて $t \rightarrow \infty$ とし、 $3/4 (=0.75)$ に収束することが確認できる。

このように、机上計算では初期値が零の応答を確認することが多いが、実応答ではその初期値に依存し、応答は大きく変わりうることに注意する。

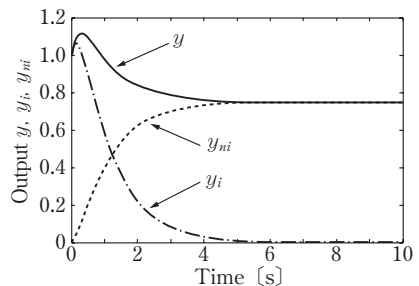


図 3A.4.1 単位ステップ指令に対する時間応答波形(初期値あり)

【演習 3A.5】 微分方程式から伝達関数の導出方法

図 3A.5.1 に圧電素子を用いた位置決めステージを示す。同素子は入力電圧の値に応じて伸長し、素子に接続されたステージの位置決めを行う。また、図中のヒンジはステージと圧電素子の結合部分に対応する。図中の記号は、 m : ステージの質量、 k : ヒンジのばね定数、 c : ヒンジの粘性比例係数、 z : ステージの変位、 z_d : 圧電素子の伸長量を表す。このとき、ステージの運動方程式は次式で表される。

$$m \frac{d^2}{dt^2} z(t) + c \left\{ \frac{d}{dt} z(t) - \frac{d}{dt} z_d(t) \right\} + k \{ z(t) - z_d(t) \} = 0 \quad (3A.5.1)$$

式(3A.5.1)より圧電素子の変位 z_d からステージの変位 z までの伝達関数 G を求めよ。

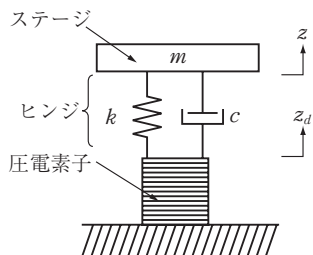


図 3A.5.1 圧電素子を用いた位置決め (姉妹書の図 7.3.4)

解答 式(3A.5.1)の両辺をラプラス変換すると式(3A.5.2)を得る。

$$\begin{aligned} ms^2Z(s) - sz(0) - \frac{d}{dt} z(0) + c \{ [sZ(s) - z(0)] - [sZ_d(s) - z_d(0)] \} \\ + k \{ Z(s) - Z_d(s) \} = 0 \end{aligned} \quad (3A.5.2)$$

ただし、 $Z(s)$ 、 $Z_d(s)$ は $z(t)$ 、 $z_d(t)$ のラプラス変換を表す。式(3A.5.2)において圧電素子とステージの変位の初期値を零、つまり

$$z(0) = z_d(0) = 0, \quad \frac{d}{dt} z(0) = 0 \quad (3A.5.3)$$

とすると、伝達関数は次式で表される。

$$G(s) = \frac{Z(s)}{Z_d(s)} = \frac{cs + k}{ms^2 + cs + k}$$

解説 式(3A.5.2)のように、導関数 d^2z/dt^2 、 dz/dt 、 dz_d/dt のラプラス変換を行うと $t=0$ における初期値の項が現れる。ただし、伝達関数を導出するにあたり、同初期値はすべて零とする(式(3A.5.3)を参照)。一般的には、入力 u 、出力 y の線形時不変系

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) \\ = b_m \frac{d^m}{dt^m} u(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} u(t) + b_0 u(t) \end{aligned}$$

に対して、初期値を $d^{n-1}y(0)/dt^{n-1} = d^{n-2}y(0)/dt^{n-2} = \dots = y(0) = 0$, $d^{m-1}u(0)/dt^{m-1} = d^{m-2}u(0)/dt^{m-2} = \dots = u(0) = 0$ としてラプラス変換を行うことで伝達関数

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3A.5.4)$$

が求められる。なお、通常の実システムはバイプロパーまたは厳密にプロパーな系で表されるため、式(3A.5.4)の次数について $m \leq n$ と仮定する 경우가多い。

また、本演習では、 $d^{n-1}y(0)/dt^{n-1} = d^{n-2}y(0)/dt^{n-2} = \dots = y(0)$, $d^{m-1}u(0)/dt^{m-1} = d^{m-2}u(0)/dt^{m-2} = \dots = u(0)$ とすべて等号で示したが、物理量を考えて場合には次元が異なり、等号関係は成り立たないことに注意する。

【演習 3A.6】 伝達関数の基本形と時定数, 固有角周波数, 減衰係数の対応

- (1) 図 3A.6.1 の RL 直列回路に電圧 v を印加したとき、電流 i が流れた。この回路の時定数を求めよ。
- (2) 図 3A.6.2 のマス・ばね・ダンパ系は、外力 u を印加したときのマスの変位が x であることを示す。このシステムの減衰係数および固有角周波数を求めよ。

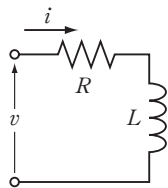


図 3A.6.1 RL 直列回路
(姉妹書の図 3.2.1)

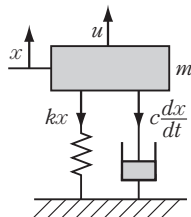


図 3A.6.2 マス・ばね・ダンパ系
(姉妹書の図 3.2.2)

解答

- (1) RL 直列回路の印加電圧 v から電流 i までの伝達関数は

$$P(s) = \frac{1}{Ls + R} \quad (3A.6.1)$$

となる。一方、1次遅れ系の伝達関数は

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} \quad (3A.6.2)$$

であるから、式(3A.6.1)を変形して

$$P(s) = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{L}{R}s + 1} \quad (3A.6.3)$$

となるので、これを式(3A.6.2)と比較すれば、式(3A.6.4)の時定数が得られる。

— 著 者 略 歴 —

涌井 伸二 (わくい しんじ)

1977年 信州大学工学部電子工学科卒業
1979年 信州大学大学院修士課程修了(電子工学専攻)
1979年 株式会社第二精工舎(現セイコーインスツル株式会社)勤務
1989年 キヤノン株式会社勤務
1993年 博士(工学)(金沢大学)
2001年 東京農工大学大学院教授
現在に至る

高梨 宏之 (たかなし ひろゆき)

1998年 宇都宮大学工学部電気電子工学科卒業
2000年 宇都宮大学大学院工学研究科博士前期課程修了(電気電子工学専攻)
2003年 宇都宮大学大学院工学研究科博士後期課程修了(生産・情報工学専攻), 博士(工学)
2003年 立命館大学総合理工学研究機構ポストドクトラルフェロー
2004年 秋田県立大学助手
2006年 秋田県立大学助教
2014年 日本大学准教授
現在に至る

橋本 誠司 (はしもと せいじ)

1994年 宇都宮大学工学部電気電子工学科卒業
1996年 宇都宮大学大学院工学研究科博士前期課程修了(電気電子工学専攻)
1996年 日本学術振興会特別研究員
1999年 宇都宮大学大学院工学研究科博士後期課程修了(物性工学専攻), 博士(工学)
1999年 宇都宮大学 SVBL 研究員
2000年 小山工業高等専門学校助手
2002年 群馬大学助手
2005年 群馬大学助教授
2007年 群馬大学大学院准教授
2016年 群馬大学大学院教授
現在に至る

中村 幸紀 (なかむら ゆきのり)

2004年 京都工芸繊維大学工学部電子情報工学科卒業
2006年 奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士前期課程修了(情報システム学専攻)
2008年 日本学術振興会特別研究員(DC2)
2009年 奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士後期課程修了(情報システム学専攻), 博士(工学)
2009年 日本学術振興会特別研究員(PD)
2009年 東京農工大学大学院助教
2015年 岡山大学大学院講師
現在に至る

現場で役立つ 制御工学の基本 (演習編)

—解答と誤解答から学ぶ演習書—

Fundamentals of Control Engineering Available to Industry (Exercises)

— Lessons Learned from Correct Answers and Common Mistakes —

© Wakui, Hashimoto, Takanashi, Nakamura 2017

2017年7月7日 初版第1刷発行

★

検印省略

著者	涌井伸二
	橋本誠司
	高梨宏之
	中村幸紀
発行者	株式会社 コロナ社
	代表者 牛来真也
印刷所	美研プリンティング株式会社
製本所	有限会社 愛千製本所

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)

ホームページ <http://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-03220-8 C3053 Printed in Japan

(齋藤)



JCOPY <出版者著作権管理機構 委託出版物>

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつど事前に、出版者著作権管理機構（電話 03-3513-6969, FAX 03-3513-6979, e-mail: info@jcopy.or.jp）の許諾を得てください。

本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めていません。落丁・乱丁はお取替えいたします。