【5.3】

流速uはx方向（流下方向）に変化しないため，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

流速uはyに一様であるため，

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

y方向（水路横断方向）に流れは生じないため，

$$v = 0$$

これらを式(2.18)の連続式に適用すれば，

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad w = C \quad （C：\text{積分定数}）$$

水路床または水面において，z方向に流れは生じないので，

$$w|_{z=0} = w|_{z=h} = 0$$

を境界条件とすれば，

$$C = 0 \quad \rightarrow \quad w = 0$$

定常な流れを対象としているため，

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

x方向の質量力f_xは

$$f_x = g \sin \theta$$

圧力pはx方向（流下方向）に変化しないため，

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

以上の結果を式(5.9)のナビエ・ストークス方程式に適用してuの一般解を求める．

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rightarrow 0 = g \sin \theta + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{g}{\nu}\sin \theta$$

$$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{g \sin \theta}{\nu}z + C_1 \quad （C_1：\text{積分定数}）$$

$$\rightarrow u = -\frac{g \sin \theta}{2\nu}z^2 + C_1 z + C_2 \quad （C_2：\text{積分定数}）$$

水路床および水面での境界条件として，

水路床：$u|_{z=0} = 0$

水面：$\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=h} = 0$

を適用すれば，

$$C_1 = \frac{g\sin\theta}{\nu}h,\quad C_2 = 0$$

を得るので，流速分布は次式となる．

$$u(z) = \frac{g\sin\theta}{\nu}\left(-\frac{z^2}{2} + hz\right)$$

最大流速（水表面流速）u_Sは，

$$u\big|_{z=h} = \frac{g\sin\theta}{2\nu}h^2$$

断面平均流速u_mは，

$$u_\mathrm{m} = \frac{1}{h}\int_0^h u(z)dz = \frac{g\sin\theta}{3\nu}h^2 = \frac{2}{3}u_\mathrm{S}$$

単位幅流量qは，水路幅をBとすれば，

$$q = \frac{Q}{B} = \int_0^h u(z)dzB = \frac{g\sin\theta}{3\nu}h^3 = hu_\mathrm{m}$$

せん断応力τは，式(1.15)のニュートンの粘性法則より，

$$\tau = \mu\frac{du}{dz} = -\rho g(z-h)\sin\theta$$