

ま え が き

微分積分と線形代数は、大学教養の数学の二本柱として長年確立している。そのうち線形代数を基礎から解説するのが本書の目的である。

線形代数は、いまから 50 年ほど前まで『代数と幾何』や『行列と行列式』の名称で教えられてきた科目の名称と内容を変更してできた科目である。1960 年代は数学教育の現代化が叫ばれた頃で、線形代数のシラバスもその影響を受けている。線形代数が初学者にとって抽象的になりすぎているゆえんでもある。

線形代数の理論は、中学校以来学んできた連立 1 次方程式の解法と深い関連がある。物理学における量子力学、電気工学における電気回路の理論、統計学における因子分析法など、線形代数は広範な分野に応用される。理工系の大学生のみならず、医療系の大学生にも身につけていただきたい科目である。

以下簡単に本書の内容を概説しよう。第 1 章と第 2 章では、平面上と空間におけるベクトルを導入し、さらに、1 次変換との関連を強調する形で 2 次と 3 次の正方行列を導入した。第 3 章では、平面上と空間のベクトルを n 項数ベクトルへと一般化し、さらに、一般サイズの行列と線形写像の理論を展開した。第 4 章では行列式について、第 5 章では行列の標準化、特に行列の対角化について学ぶ。理論的には大変重要だが、少し難しいので最初に読む際は飛ばしたほうがよいと考えたいいくつかの定理・命題などを付録に収めてある。

線形代数の定理の多くは「あたり前」の事実である。もちろん、あたり前だからといって定理の証明がやさしいわけではない。むしろ、行列の基本変形などの操作に習熟する中で、定理が主張する内容があたり前に感じられるようになれば理解したも同然である。その意味で、最初に読むときは、定理の証明を飛ばしてもよいから、例題・練習等を必ず自分の手を動かして解いていただきたい。本書では一つの事例をいろいろな角度から問題として取り上げた。線形

代数の理論全体が一つにつながっていることを実感してもらいたいからである。

高等学校で新学習指導要領が実施され、また、最近多くの大学で、教育の質向上を目指した改革が行われている。本書がこのような変化に適応した新しい教科書の一つになるなら、著者の喜びはこれにまさることはない。

大学の同僚の高英聖氏には、原稿を読んでいただき貴重なご意見をいただいた。コロナ社の方々には、本書の執筆を勧めていただき、編集作業を通じて多大なるご協力をいただいた。これらの方々には心から感謝いたします。

2014年7月

桑野泰宏

本書の使い方

- 以下の項目をひとまとめにして、各章の中で通し番号を付している。
 - － **定理・命題・補題・系**とは、定義等から論理的に証明された事柄をいう。これらの中で非常に重要なものを定理、重要なものを命題、命題等を証明するのに必要な補助命題を補題、命題等から容易に導かれるものを系としたが、その区別は厳密なものではない。
- 以下の各項目および重要な式、本文中の説明をわかりやすくするための図には、それぞれ各章の中で通し番号を付してある。
 - － **定義**とは、言葉の意味や用法について定めたものである。
 - － **注意**とは、定義や定理・命題等に関する注意である。
 - － **例**とは、定義や定理・命題等の理解を助けるための実例である。
 - － **例題**では、基本的な問題の解き方を丁寧に説明した。
 - － **練習**は、(一部の例外を除き)例題の類題である。
- 各章の章末には、まとめの問題を**章末問題**として配置した。
- 本書では、証明の終わりに□、解答例の終わりに◆を付した。
- 重要な用語は太字にし、巻末の索引で引用するとともに、一部の用語には英訳を付した。探したい項目や式を見つけるには、それぞれの通し番号を参考にするとともに、目次や索引を活用して欲しい。

目 次

1. 平面上のベクトルと1次変換

1.1 平面上の有向線分と平面ベクトル	1
1.2 平面上のベクトルの成分表示	2
1.3 平面上のベクトルの加法と実数倍	4
1.4 平面上のベクトルの内積	9
1.5 直線の方程式	12
1.6 1次変換と2次正方行列	16
1.7 逆行列と行列式	21
1.8 行列式の性質	23
章末問題	27
〈コーヒーブレイク〉	28

2. 空間のベクトルと1次変換

2.1 空間のベクトル	29
2.2 空間における直線と平面の方程式	33
2.3 3次正方行列と1次変換	36
2.4 3次正方行列の行列式	39
2.5 行列式の余因子展開	41
2.6 余因子行列と逆行列	42
章末問題	45
〈コーヒーブレイク〉	46

3. 行列と数ベクトル空間

3.1 数ベクトルの導入	47
3.2 部分空間と次元	52
3.3 行列の導入	54
3.3.1 行列の和と実数倍	56
3.3.2 行列の積	58
3.3.3 線形写像と行列	62
3.3.4 正則行列と逆行列	64
3.4 連立1次方程式と基本変形	67
3.5 行列の基本変形と階数	72
3.6 行列の正則性と階数	75
3.7 階段行列と階数	78
3.8 行列の階数と連立1次方程式	85
3.9 階数に関するまとめ	87
章末問題	91
〈コーヒーブレイク〉	92

4. 行列式とその応用

4.1 置換	93
4.2 行列式とその性質	100
4.3 行列式の余因子展開	108
章末問題	115
〈コーヒーブレイク〉	116

5. 行列の対角化・標準化

5.1 固有値・固有ベクトル	117
5.2 固有方程式	120
5.3 対角化の条件	124
5.4 対角化のいくつかの応用	128
5.5 ジョルダン標準形	134
章末問題	141
〈コーヒーブレイク〉	142

付 録

A.1 行列の階数と部分空間の次元	143
A.2 行列式と行列の正則性	145
A.3 行列の標準形	147
引用・参考文献	152
練習問題解答	153
章末問題解答	178
索引	198

1

平面上のベクトルと1次変換

本章では、高等学校での学習にならって、平面上の矢線ベクトルを導入する。矢線ベクトルと数ベクトルとの等価性について述べた後、行列と平面上の点の移動である1次変換について考察する。

1.1 平面上の有向線分と平面ベクトル

平面上の平行移動で、点Aが点Bに移るとき、図1.1のように線分ABに矢印をつけて表すことがある。このような向きのついた線分ABを有向線分ABといい、Aをその始点、Bをその終点という。

平面上の有向線分の全体を考える。この中で、有向線分ABと向きと長さ（大きさ）が等しい有向線分全体の集合を、有向線分ABの定める矢線ベクトル、あるいは単にベクトル（vector）といい、 \overrightarrow{AB} で表す。

A, B, C, Dを平面上の4点とし、有向線分ABと有向線分CDの大きさと向きが相等しいとする（図1.2）。このとき、平面上の有向線分ABと向きと大



図 1.1 有向線分 AB

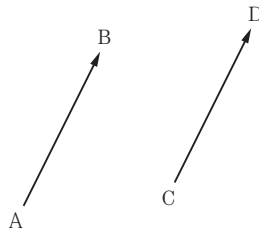


図 1.2 ベクトルの相等

長さの等しい有向線分全体の集合 \overrightarrow{AB} と平面上の有向線分 CD と向きと大きさの等しい有向線分全体の集合 \overrightarrow{CD} は等しい。よって、 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ である。

例 1.1 平行四辺形 $ABCD$ において、
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ などが成り立つ (図 1.3)。

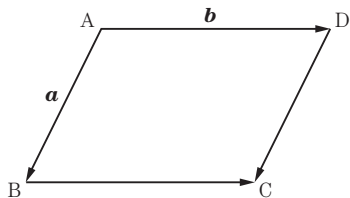


図 1.3 平行四辺形 $ABCD$

ベクトル \overrightarrow{AB} を、 \mathbf{a} のように、太字の小文字で表すことがある[†]。 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ のとき、ベクトル \mathbf{a} の向きは有向線分 AB の向きに等しく、また、ベクトル \mathbf{a} の大きさ $|\mathbf{a}|$ は線分 AB の長さに等しい。

点 A を平面上の任意の点とし、始点と終点をともに A にとったときの有向線分 AA の定めるベクトルを零ベクトルといい、 $\mathbf{0}$ と記す。零ベクトル $\mathbf{0}$ の大きさは 0 であり、その向きは特定できない。

平面上の任意のベクトル \mathbf{a} に対し、 \mathbf{a} と大きさが等しく、向きが逆のベクトルが存在する。これを \mathbf{a} の逆ベクトルといい、 $-\mathbf{a}$ と記す。

例 1.2 図 1.3 の平行四辺形 $ABCD$ において、 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$ とすると、 $\overrightarrow{CD} = -\mathbf{a}$, $\overrightarrow{CB} = -\mathbf{b}$ などが成り立つ。

1.2 平面上のベクトルの成分表示

いま、平面上に xy 直交座標軸を一つとって固定する。この座標系の原点 O を始点とし、座標平面上の任意の点 A を終点とする有向線分 OA を考える。点

[†] ほかに、 \mathbf{a} , \vec{a} , \mathfrak{a} , \underline{a} などと記すことがある。特に手書きの場合、 \mathbf{a} のような太字は書きにくいので、 \mathfrak{a} のような白抜き文字を使うことが多い。

A の座標を (a_1, a_2) とするとき、有向線分 OA の定めるベクトル $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ を

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

と記すことがある。これを与えられた座標軸に関するベクトル \mathbf{a} の成分表示という。また、 a_1 を \mathbf{a} の x 成分または第 1 成分、 a_2 を \mathbf{a} の y 成分または第 2 成分という。

ベクトルの成分表示を考える際は、始点を原点 O に固定しているため、零ベクトルの終点も O である。したがって

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

と成分表示される。

$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ に対して、原点 O に関し点 A と対称な点を A' とするとき、定義により、 $\overrightarrow{OA'} = -\mathbf{a}$ である。実際、有向線分 OA と有向線分 OA' は、長さが等しく、逆向きであるからである。いま、A の座標を (a_1, a_2) とすると A' の座標は $(-a_1, -a_2)$ である。よって、ベクトル \mathbf{a} の成分表示が式 (1.1) で与えられるとき

$$-\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

と成分表示できる。

平面上のベクトルは、始点を座標原点 O に固定した場合、終点の座標で決定される。したがって、これ以後、平面上のベクトルとその成分表示とを同一視することとし、平面上のベクトル全体の集合[†]を \mathbb{R}^2 と記す。

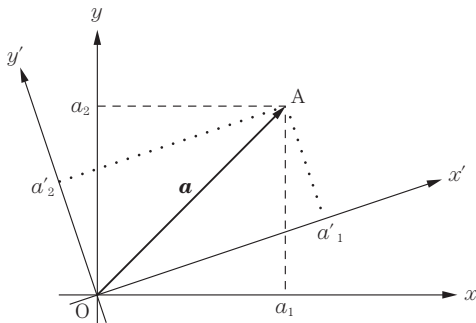
ベクトル $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ の成分表示が式 (1.1) で与えられるとき、その大きさ $|\mathbf{a}|$ を

$$|\mathbf{a}| = OA = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

により定める。

[†] 平面上の点全体の集合といっても同じことである。

注意 1.1 ベクトル $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ の成分表示は、座標軸のとり方による (図 1.4)。しかしながら、ベクトル \mathbf{a} は大きさは座標軸の回転に対して不変なので、ベクトル \mathbf{a} の大きさ $|\mathbf{a}|$ の値は座標軸のとり方によらない。なお、零ベクトル $\mathbf{0}$ の成分表示だけは、座標軸のとり方によらず、式 (1.2) で与えられる。

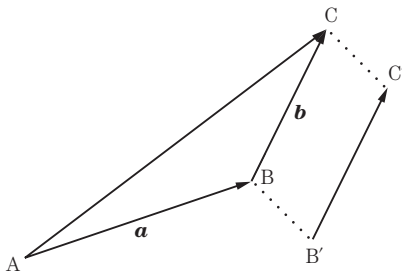


点 A の座標は、座標軸 Oxy のとき (a_1, a_2) 、
座標軸 $Ox'y'$ のとき (a'_1, a'_2) である。

図 1.4 座標系と成分表示

1.3 平面上のベクトルの加法と実数倍

A, B, C を平面上の 3 点とし、 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ 、 $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$ とする。このとき、二つのベクトル \mathbf{a} 、 \mathbf{b} の和 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ を \overrightarrow{AC} により定める。この定義では、 \mathbf{a} の終点と \mathbf{b} の始点が一致している場合しか、ベクトルの加法が定義されていないように見えるが、そうではない。一般に、 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ 、 $\mathbf{b} = \overrightarrow{B'C'}$ とし、 $B \neq B'$ であるとする。いま、 $B'C'$ を平行移動して BC となったとする。つまり、点 B' が点 B に移るように平行移動したとき、点 C' が点 C に移るとする。このとき、 $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$ であり、 \mathbf{a} の終点と \mathbf{b} の始点が一致するから、足し算が実行できて、 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$ となる (図 1.5)。



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

図 1.5 ベクトルの足し算

例 1.3 (平行四辺形の法則) 平行四辺形 ABCD において、 $\vec{AD} = \vec{BC}$ である。よって

$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \tag{1.4}$$

が成り立つ (図 1.6)。式 (1.4) は、 \vec{AB} と \vec{AD} の和は、 \vec{AB} 、 \vec{AD} を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の対角線により定まるベクトル \vec{AC} に等しいことを意味する。これを平行四辺形の法則という。

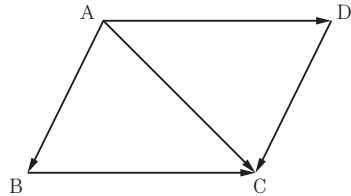


図 1.6 ベクトルの足し算における平行四辺形の法則

ベクトルの足し算を成分表示で考えよう。

図 1.7 で、点 A の座標を (a_1, a_2) 、点 B の座標を (b_1, b_2) 、四角形 OACB を平行四辺形とする。 $\vec{OB} = \vec{AC}$ より、 $OB=AC$ 、 $OB \parallel AC$ である。したがって、点 C は点 A を x 方向に b_1 、 y 方向に b_2 平行移動した点であるから、点 C の座標は $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ である。よって、 $\mathbf{a} = \vec{OA}$ 、 $\mathbf{b} = \vec{OB}$ のとき、 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \vec{OC}$ を成分表示すると

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

と表される。

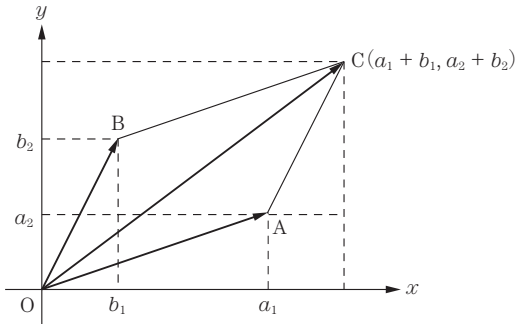


図 1.7 ベクトルの足し算の成分表示

6 1. 平面上のベクトルと1次変換

この考察により、ベクトルの和の x, y 成分はそれぞれ、 x, y 成分同士の和に等しい。よって、これよりただちに、ベクトルの加法に関する次の性質が従う。

命題 1.1 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ に対し、次の (1)~(4) が成り立つ。

- (1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- (2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
- (3) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$
- (4) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \mathbf{0}$

証明 式 (1.5) より明らかである。

□†

二つのベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} の差 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ は

$$\mathbf{b} + \mathbf{x} = \mathbf{a}$$

の解として定義できる。したがって、 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ は、 \mathbf{a} と $-\mathbf{b}$ の和 $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ に等しい。よって、ベクトルの引き算を成分表示すると、式 (1.6) のように表される。

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

次に、ベクトルの実数（スカラー）倍を定めよう。ベクトル \mathbf{a} の c 倍 $c\mathbf{a}$ を

1. $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ のとき、 $c > 0$ ならば \mathbf{a} と同じ向き、 $c < 0$ ならば \mathbf{a} と逆向きで、大きさは \mathbf{a} の $|c|$ 倍のベクトル、 $c = 0$ ならば $c\mathbf{a} = \mathbf{0}$ と定義する。
2. $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ のとき、すべての実数 c に対して、 $c\mathbf{a} = \mathbf{0}$ と定義する。

図 1.8 で、 $\overrightarrow{OA'} = c\overrightarrow{OA}$ のとき、点 A の座標が (a_1, a_2) ならば点 A' の座標は (ca_1, ca_2) である。

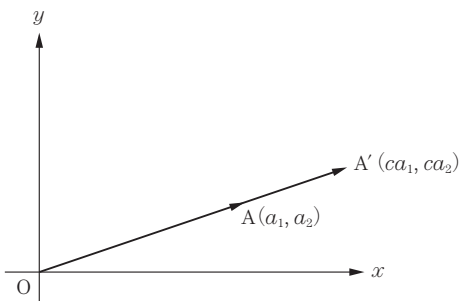


図 1.8 ベクトルのスカラー倍の成分表示

† □ は証明終わりの記号である。

よって、ベクトルのスカラー倍を成分表示すると

$$c \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

と表される。これによりただちに、ベクトルの実数（スカラー）倍に関する次の性質が従う。

命題 1.2 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2, c, d \in \mathbb{R}$ に対し、次の (1)~(3) が成り立つ。

$$(1) \quad c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$$

$$(2) \quad (c + d)\mathbf{a} = c\mathbf{a} + d\mathbf{a}$$

$$(3) \quad (cd)\mathbf{a} = c(d\mathbf{a})$$

証明 式 (1.7) より明らかである。 □

例題 1.1 $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ のとき、 $2(-\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) + 3(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ を求めよ。

解答例

$$\begin{aligned} 2(-\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) + 3(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= -2\mathbf{a} + 4\mathbf{b} + 3\mathbf{a} + 3\mathbf{b} \\ &= (-2 + 3)\mathbf{a} + (4 + 3)\mathbf{b} \\ &= \mathbf{a} + 7\mathbf{b} \end{aligned}$$

であるから

$$2(-\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) + 3(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ -5 \end{bmatrix}$$

である。 ◆[†]

練習 1.1 $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ のとき、 $2(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) - 3(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ を求めよ。

[†] ◆は解答例終わりの記号である。

索引

【い】	矩形 54 クラメールの公式 113 クロネッカーの δ 65, 127	【せ】
1 次結合 49		齊次方程式 86
1 次従属 50		正則行列 21, 39, 65
1 次独立 50	【け】	成分表示 3, 29
1 次変換 17, 18, 37, 38, 62	係数行列 67	正方行列 64
【え】	ケーリー・ハミルトンの定理 122	線形写像 62
n 重線形性 103	元 vi	線形性 17, 37, 62
【か】	【こ】	【た】
解空間 85	広義固有空間 147	対角化可能 124
階数 74	交代性 104	対角行列 64
外積 31	互換 95	対角成分 64
階段行列 79	固有空間 118	対称行列 128
回転行列 20	固有多項式 121	単位行列 21, 65
拡大係数行列 67	固有値 117	単位ベクトル 8
【き】	固有ベクトル 117	【ち】
奇置換 98	固有方程式 121	置換 93
基底 53	【し】	置換群 93
基本行列 70	次元 53	直線のパラメータ表示 12, 34
基本ベクトル 9, 49	指数 135	直和 137
基本変形 69, 71	始点 1	直交行列 128
逆行列 22, 39, 65	自明な解 86	【て】
逆ベクトル 2, 48	写像 vi	定数ベクトル 67
行 16, 36, 54	終点 1	転置行列 55
行ベクトル 54	ジョルダン細胞 134	転倒数 96
行ベクトル表示 55	ジョルダン標準形 135	【と】
行列 16, 54	【す】	トレース 122
——のサイズ 54	数ベクトル 47	【な】
行列式 22, 40, 100	数ベクトル空間 47	内積 9, 49, 58
【く】	スカラー積 10	
偶置換 98		

【は】		ベクトル	1, 29	【ゆ】	
掃き出し法	67	——の大きさ	3, 29	有向線分	1, 29
		——のスカラー倍	6, 48		
		——のなす角	9	【よ】	
【ひ】		ベクトル積	31	余因子	41, 108
非自明な解	86	ベクトル方程式	12	余因子展開	111
非斉次方程式	86	ペロン・フロベニウスの定理	195		
非対角成分	64			【れ】	
		【ほ】		零行列	21, 56
【ふ】		方向ベクトル	12	零ベクトル	2, 30
符 号	96	法線ベクトル	14	列	16, 36, 54
部分空間	52	補空間	137	列ベクトル	54
				列ベクトル表示	55, 85
【へ】		【み】			
平行四辺形の法則	5	右手系	29, 32		
べき零行列	135				

— 著者略歴 —

1988年 東京大学理学部物理学科卒業
1993年 東京大学大学院理学系研究科博士課程修了（物理学専攻）
博士（理学）
1993年 京都大学数理解析研究所研修員（日本学術振興会特別研究員）
～98年
1994年 メルボルン大学数学科 Research Fellow (Level A)
～95年
1998年 鈴鹿医療科学大学講師（数学担当）
2005年 鈴鹿医療科学大学助教授
2006年 鈴鹿医療科学大学教授
現在に至る

基礎からの線形代数

Basic Linear Algebra

© Yasuhiro Kuwano 2014

2014年9月12日 初版第1刷発行

★

検印省略

著者 くわ の やす ひろ
桑 野 泰 宏
発行者 株式会社 コロナ社
代表者 牛来真也
印刷所 三美印刷株式会社

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)

ホームページ <http://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-06107-9 (松岡) (製本:愛千製本所)

Printed in Japan



本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられております。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めておりません。

落丁・乱丁本はお取替えいたします