複素流体力学ノート

―― 理想流体の基礎から粘性流への展開 ――

工学博士　新井　紀夫　著

コ ロ ナ 社

まえがき

本書では，理想流体の概念と粘性流におけるせん断流（渦度の集まり）とを複素数（関数論）を用いて結び付けることにより，流体力学の基本概念を理解することを目指している。粘性流を解くには，現実的にはナヴィエ・ストークス方程式を数値的に解くことになるが，粘性流，せん断流とはなんぞやという物理的理解がなくても，ある程度解けてしまう。しかし，物理的理解が欠けた状態で数値解を眺めても，間違いのどつぼにはまるだけである。

そこで，本書では複素速度ポテンシャルの考え方のみで粘性流を理解していくことを目指す。そうすることによって，物理的理解を伴いながら粘性流を捉えていくことができるようになるからである。その意味で，これは粘性流に対する究極のモデル化ということができる。

本書の内容は，流体力学の初学者が最初に習う部分であるので，機械系，航空系の学生たちに読んでもらいたい（特に航空系）。工学部における関数論に関する講義は，学生にとって目的が不明確であったり，ただ問題を解くだけになっていたりして，概念の理解すらあいまいなまま終わっていることが多い。しかし，関数論の概念は，見方によっては流体力学と密接な関係にあるので，物理的概念とともに学ぶことにより，面白さの本質を知ることができるのである。

また，本書の内容は関数論を基盤としているので，理学部数学科の基礎応用科目の一端も担えるであろう。日本における理学部数学科は，純粋数学に重心があり，応用数学は軽んじられているとの懸念を持っており，本書がそれを少しでも払拭できればと期待している。

本書の構成はつぎのとおりである。1 章では，本書で扱う関数論の基礎を，復習を交えつつ明確に述べている。特に複素数の微分可能性，積分などに関しては詳細に述べている。2〜5 章では，流体力学の基礎を復習し，複素速度ポテン

シャルの理解を深める。6 章では，典型的な円周りの流れに焦点を絞って詳細に解説している。7 章からは，等角写像を説明し，写像による流れ場の解析の典型例として Joukowski 変換を，また，物体に働く流体力（Blasius の定理）を詳細に解説している。10，11 章では，本書の大きな目的の一つである「複素速度ポテンシャルによる粘性流の解析」の基礎となる鏡像の方法を説明し，粘性流の解析につなげている。12 章では，複素速度ポテンシャルによる仮想質量の求め方を説明し，本書の目的とする「複素速度ポテンシャルのみによる流体現象の解明」に向けた拡張性を説明している。

2012 年 8 月吉日

新井紀夫

目　　　　　次

1.　複素数の基礎

2.　速度ポテンシャルと流れ関数

3.　複素速度ポテンシャル

4.　複素速度ポテンシャルを用いて表す流れ

5.　流　れ　の　合　成

6.　種々の円柱周りの流れ

7.　等　角　写　像

8.　Joukowski 翼

9.　Blasiusの定理

10.　鏡 像 の 方 法

11.　非粘性渦（渦糸）による粘性流のモデル化—渦糸近似法

12.　仮　想　質　量

1 複素数の基礎

すでにいろいろなところで学んでいるはずであるが，複素数の領域において，特徴的な虚数単位 i が出てくる。これは

$$i^2 = -1 \tag{1.1}$$

という性質を有している。複素数はこれを用いて表現され，数学による記述の世界を一段高めるのにたいへん有効な役目を果たしている。

ここでは，その基本的性質として是非とも知っておいてほしい関係について述べる。それを理解することにより，本書で目的としている「複素流体力学」を，より有効に習得することができる。基本的には，複素流体力学は理想流体に関するものであるが，本書では粘性流体の表現にも十二分に役立つ流れのモデル化を導いていく。

1.1 複　　素　　数

いま，実数定数 a，b と実変数 x，y に対して，つぎのような式を考える。

$$c = a + ib \tag{1.2}$$

$$z = x + iy \tag{1.3}$$

この場合，c を複素数の定数，z を複素数の変数という。これらを図示する際には，実数を x 軸上に，虚数を y 軸上にとり，複素数 z を xy 平面上の点 (x, y) として表す。この xy 平面を**複素平面**と呼ぶ（もしくは z 平面）。また，x 軸を

実数軸，y 軸を**虚数軸**と呼ぶ。

便宜上，直角座標 (x, y) だけでなく，極座標 (r, θ) もよく用いられる（**図 1.1**）。その関係は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \tan^{-1}\frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

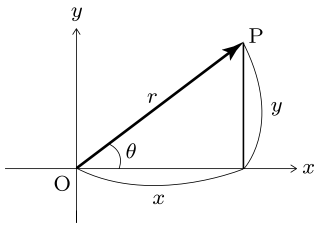

図 1.1　(x, y) 座標と (r, θ) 座標

以上の表現を用いて xy 平面を複素平面と考えると，複素数 $z = x + iy$ は平面上の点を表す**複素座標**である。ここで複素数 z の絶対値 $|z|$ を $\sqrt{x^2+y^2}$ と定義すると，式 (1.4) の関係式より

$$r = |z| \tag{1.5}$$

であり，θ は複素数 z の偏角と呼ばれ

$$\theta = \arg z \tag{1.6}$$

のように表す。複素数 z は絶対値 r と偏角 θ を用いて

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1.7}$$

と表すことができる。

つぎに，複素数の積について考える。複素数 $z_\alpha = r_\alpha(\cos\alpha + i\ \sin\alpha)$ と $z_\beta = r_\beta(\cos\beta + i\ \sin\beta)$ の積は

$$z_\alpha z_\beta = r_\alpha(\cos\alpha + i\ \sin\alpha)\cdot r_\beta(\cos\beta + i\ \sin\beta)$$

$$= r_\alpha r_\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha))$$

$$= r_\alpha r_\beta(\cos(\alpha+\beta) + i\ \sin(\alpha+\beta)) \tag{1.8}$$

となる。つまり，二つの複素数の積により，それぞれの絶対値の積が新たな絶対値，それぞれの偏角の和が新たな偏角となるような，新たな複素数が得られる。

このことを見やすくするために

$$e^{i\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \cos\theta + i\sin\theta \tag{1.9}$$

で定義される関数 $e^{i\theta}$ を導入する。この関数がつぎのような性質を持つことは，三角関数の加法定理を使用することにより，簡単に確かめられる。

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} \tag{1.10}$$

また，その微分に関しても，関数 $e^{i\theta}$ からつぎの式が成り立つことがわかる。

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}e^{i\theta} &= \frac{d}{d\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= -\sin\theta + i\cos\theta\\ &= ie^{i\theta}\end{aligned} \tag{1.11}$$

この関数 $e^{i\theta}$ を使用することにより，式 (1.7) の形で表された複素数 z は

$$z = re^{i\theta} \tag{1.12}$$

と書け，これを複素数 z の**極形式**という。複素数をこの極形式で表すと，複素数の積は

$$\begin{aligned}z_\alpha z_\beta &= r_\alpha e^{i\alpha}\cdot r_\beta e^{i\beta}\\ &= r_\alpha r_\beta e^{i(\alpha+\beta)}\end{aligned} \tag{1.13}$$

と，たいへん簡潔に表すことができる。なお，先ほど式 (1.9) で定義した

$$e^{i\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \cos\theta + i\sin\theta \tag{1.14}$$

を**オイラー**（Euler）**の公式**と呼ぶ。

また，オイラーの公式から，つぎの式が導かれる。

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{1.15}$$

これがいわゆる**ド・モアブル**（De Moivre）**の公式**である。

ここで，$e^{i\theta}$ の複素共役 $\overline{e^{i\theta}}$ を考えよう。式 (1.14) の定義により，その複素共役をとると

$$\begin{aligned}\overline{e^{i\theta}} &= \overline{\cos\theta + i\ \sin\theta}\\ &= \cos\theta - i\ \sin\theta\\ &= \cos(-\theta) + i\ \sin(-\theta)\\ &= e^{i(-\theta)}\end{aligned} \tag{1.16}$$

となる。ここで，式 (1.14) の定義と同様に

$$e^{-i\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \cos\theta - i\sin\theta \tag{1.17}$$

を導入することにより，$e^{i\theta}$ の複素共役として

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \tag{1.18}$$

の結果を得ることができる。

1.2　複素数の幾何学的意味

複素数 $z = x + iy$ を表す複素平面において，その加減乗除の四則演算を考えよう。複素数 z を表す点 z を考えたとき，$-z$ は原点に対して対称な点であり，原点に対する z の**鏡像**である。また，$\overline{z}$ を x 軸（実数軸）に対して対称な点と定義すると，$\overline{z}$ は実数軸に対する z の鏡像である。

1.2.1　実　　数　　倍

a を実数とし, z に対して az を考える。極形式 $z = re^{i\theta}$ で考えると, $az = are^{i\theta}$ となるので，$a > 0$ のときは偏角 θ は同じままで，絶対値だけが a 倍される。

$a < 0$ のときは $az = -|a|z$ であるので，$a > 0$ のときとは原点に対して対称，すなわち原点に関して鏡像となる（あるいは絶対値は $a > 0$ のときと同じで，偏角が π だけ増えたともいえる）。

1.2.2　和　と　差

二つの複素数 $z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$ の和と差を考えると

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2) \tag{1.19}$$

となり，複素平面上において，いわゆるベクトルの和と差と同じ図が描ける。

1.2.3　積　と　商

二つの複素数 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$，$z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ の積と商を考える。積は

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \tag{1.20}$$

となる。すなわち，z_1 に z_2 を掛けるということは，z_1 側から見れば，その大きさ（絶対値）を r_2 倍し，偏角 θ_1 を θ_2 だけ増すことになる。z_2 側から見た場合も同様の議論ができる。これらの関係を図示すると図 **1.2** のようになる。影を施した △O-1-z_1 と △O-z_2-$z_1 z_2$ は相似形になっている（△O-z_2-$z_1 z_2$ は △O-1-z_1 の r_2 倍になっている）。

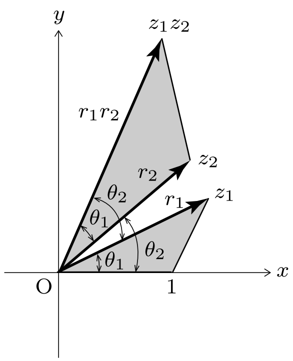

図 1.2　複素数の積

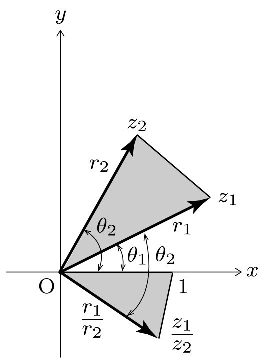

図 1.3　複素数の商

商は

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \tag{1.21}$$

となる。すなわち，z_1 を z_2 で割るということは，z_1 側から見れば，その大きさ（絶対値）r_1 を r_2 で割り，偏角 θ_1 から θ_2 を減ずることになる。z_2 側から見た場合も同様の議論ができる。これらの関係を図 **1.3** のようになり，影を施した △O-z_1-z_2 と △O-1-z_1/z_2 とが相似形になっている（△O-1-z_1/z_2 は △O-z_1-z_2 の $1/r_2$ 倍になっている）。

1.3　複素数による直線の方程式の表現

複素平面上の 2 点 z_1, z_2 を通る直線の方程式は，これら 2 点を結ぶ直線上のある点を z とすると，k を任意の実数として，$z - z_1 = k(z_2 - z_1)$ と表される。z について整理すれば

$$z = (1-k)z_1 + kz_2 \tag{1.22}$$

と表される。また，式 (1.22) とその共役の式

$$\overline{z} = (1-k)\overline{z_1} + k\overline{z_2} \tag{1.23}$$

から k について整理すると，つぎのように表せる。

$$k = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\overline{z} - \overline{z_1}}{\overline{z_2} - \overline{z_1}} \tag{1.24}$$

さらに，この式を変形すると，つぎの式が得られる。

$$(\overline{z_2} - \overline{z_1})z - z_1\overline{z_2} = (z_2 - z_1)\overline{z} - \overline{z_1}z_2$$

ここで，$\overline{z_2} - \overline{z_1} = -ic$，$z_2 - z_1 = i\overline{c}$，$z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 = iA$ と置くと

$$cz + \overline{cz} + A = 0 \quad （c：複素数，A, a, b：実数） \tag{1.25}$$

索　　　引

—— 著 者 略 歴 ——

1976 年　東京大学大学院工学系研究科博士課程修了 (航空宇宙工学専攻)
　　　　工学博士
1977 年　NASA(アメリカ航空宇宙局) Ames Research Center 客員研究員
1979 年　東京農工大学助手
　　　　以後，講師，助教授を経て教授
　　　　現在に至る

複素流体力学ノート
理想流体の基礎から粘性流への展開
Fluid Dynamics by Complex Velocity Potential
——From Ideal to Viscous Flows——

2012 年 10 月 26 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略	著　　者	新　井　紀　夫（あら い のり お）
	発 行 者	株式会社　コ ロ ナ 社
		代 表 者　牛 来 真 也
	印 刷 所	三 美 印 刷 株 式 会 社

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発行所　株式会社　**コ　ロ　ナ　社**
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–04622–9　(柏原)　(製本：愛千製本所) G
Printed in Japan