□□□□□□□□□ ま え が き □□□□□□□□□

本書は古典制御および現代制御の演習書として執筆されたものである。システム制御工学シリーズの古典制御の教科書『フィードバック制御入門』および現代制御の教科書『線形システム制御入門』に対応しており，これらとともに用いることが最も有効ではあるが，本書のみでも読み進められることを念頭に置いて記述している。第 I 部（1〜7 章）が古典制御（杉江担当），第 II 部（8〜15 章）が現代制御（梶原担当）の演習となっている。

制御工学の内容をきちんと理解するためには自らの手を動かして計算することが最も重要である。このための演習問題を厳選して準備したつもりである。これと同時に，計算機を活用して数値計算で種々の結果を求めることにも重点を置いている。これは，個々のシステムの時間応答やボード線図などがどのようなものかを直感的に捉えることが大切であり，理解を深めるには欠かせないと考えているためである。古典制御の部分では，ほぼすべての演習において計算結果のグラフを描いており，現代制御の部分では，計算結果の再現に必要なプログラムを明示している†。種々のパラメータを変更すると安定性や応答がどのように変化するのかを，読者自身で体得してもらえれば幸いである。

古典制御部分の図の作成に関して丸田一郎，山口輝也，馬場一郎の各氏に，原稿校正に関して安藤嘉健，南裕樹，泉晋作，稲垣聡，筈井祐介，田中洋輔，藤本悠介，池西紀明，白堀慎一郎，四方田真美をはじめとする多くの方にたいへんお世話になった。また，古典制御，現代制御を通して，大阪大学 池田雅夫教授には詳細なコメントをいただいた。この場を借りて厚くお礼申し上げる。

2014 年 7 月　　　　杉江俊治・梶原宏之

† プログラムは http://cacsd2.sakura.ne.jp/?p=63 でダウンロード可能。

□□□□□□□□□ 目　　次 □□□□□□□□□

第 I 部　古典制御

1.　古典制御の準備事項

2.　伝達関数とブロック線図

3.　時　間　応　答

4.　フィードバック特性

5.　周 波 数 応 答

6.　フィードバック制御系の安定性

7.　フィードバック制御系の設計法

第 II 部　現代制御

8.　状 態 空 間 表 現

9.　安定性と時間応答

10.　状態フィードバックと可制御性

11.　状態オブザーバと可観測性

12. LQG 制 御

13. LQI 制 御

14. 非線形システムの線形化

15. 最小実現問題

1

古典制御の準備事項

【本章のねらい】

- 本書に必要なラプラス変換に関する基礎事項を準備する。
- 本書に必要な MATLAB による数値計算の基礎事項を準備する。

1.1　複　　素　　数

1 組の実数 (x, y) から定まるつぎの複素数 z を考える。

$$z = x + jy, \quad j = \sqrt{-1}$$

複素数 z は**図 1.1** に示す複素平面において座標 (x, y) の点として表せるが，絶対値 $|z|$ を r，偏角 $\angle z$ を θ とすると

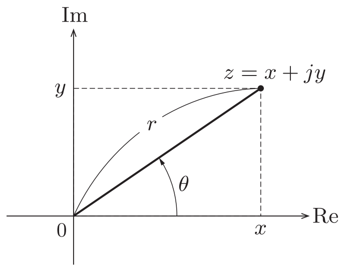

図 1.1　複 素 平 面

$$z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

を得る。これを極形式という。オイラーの公式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \tag{1.1}$$

を用いると，極形式はさらに簡潔に

$$z = re^{j\theta}$$

となる。この表現を用いると，複素数の積や商を見通し良く記述できる。

例題 1.1　四つの複素数

$$z_i = r_i e^{j\theta_i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

が与えられたとき，これらの積と商で表される複素数

$$z = \frac{z_1 z_2}{z_3 z_4}$$

の絶対値と偏角を求めよ。

【解答】

$$z = \frac{r_1 e^{j\theta_1} r_2 e^{j\theta_2}}{r_3 e^{j\theta_3} r_4 e^{j\theta_4}} = \frac{r_1 r_2}{r_3 r_4} \frac{e^{j(\theta_1+\theta_2)}}{e^{j(\theta_3+\theta_4)}} = \frac{r_1 r_2}{r_3 r_4} e^{j(\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4)}$$

となり，絶対値は $(r_1 r_2)/(r_3 r_4)$，偏角は $\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4$ となる。　$\diamondsuit$

例題 1.2　つぎの各複素数の絶対値と偏角を求めよ。

(1)　$1 + \sqrt{3}j$　　(2)　$\dfrac{1-j}{1+j}$　　(3)　$\dfrac{(1+j)^2}{(1+\sqrt{3}j)^3}$

【解答】　(1)　$z_1 = 1 + \sqrt{3}j$ とすると，この絶対値は $r_1 = \sqrt{1+3} = 2$。偏角は $\cos\theta_1 = 1/2$ より $\theta_1 = \pi/3$〔rad〕。

(2)　$z_2 = 1 - j$，$z_3 = 1 + j$ とする。複素平面上にプロットすれば点 $(1, -1)$，$(1, 1)$ なので，それぞれの絶対値と偏角は $r_2 = r_3 = \sqrt{2}$，$\theta_2 = -\pi/4$，$\theta_3 =$

$\pi/4$ となる。よって，z_2/z_3 の絶対値は 1（$= r_2/r_3$），偏角は $-\pi/2$（$= \theta_2 - \theta_3$）。

(3)　これは z_3^2/z_1^3 なので，絶対値は $r_3^2/r_1^3 = 1/4$。偏角は $2\theta_3 - 3\theta_1 = -\pi/2$。

◇

1.2　ラプラス変換

1.2.1　ラプラス変換の定義と基本的性質

時間 $t \geqq 0$ で定義された実数値および複素数値関数 $f(t)$ に対して，s を複素数として

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{1.2}$$

なる積分を考える。この積分値がある s について収束するとき

$$F(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{1.3}$$

によって定義される s の関数 $F(s)$ を $f(t)$ の**ラプラス変換**といい, $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ と略記する。本節では時間関数 $x(t)$, $y(t)$, $\cdots$ のラプラス変換を，対応する大文字 $X(s)$, $Y(s)$, $\cdots$ で表す。文脈から混乱の恐れがない場合は，小文字のまま $x(s)$, $y(s)$, $\cdots$ などと表すことも多い。

ラプラス変換の基本的な性質を以下に列挙しておく。

(L1) 線形性

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = aF(s) + bG(s) \qquad (a, b：定数) \tag{1.4}$$

(L2)　t 領域での微分

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) \tag{1.5}$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) \tag{1.6}$$

ただし，$\dot{f}(t)$ および $f^{(n)}(t)$ はそれぞれ $f(t)$ の 1 階微分および n 階微分を表し，初期値 $(f(0),\ \dot{f}(0),\ \cdots,\ f^{(n-1)}(0))$ はすべて 0 とした。

(L3)　$\boldsymbol{t}$ 領域での積分

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s) \tag{1.7}$$

(L4)　$\boldsymbol{s}$ 領域での推移

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a) \tag{1.8}$$

(L5)　最終値定理

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \tag{1.9}$$

ただし，最終値定理は $sF(s)$ が安定（分母多項式を 0 とする根の実部が負）の場合にしか適用できない。

(L6)　合成積

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] = F(s)G(s) \tag{1.10}$$

以上の中でも，(L2)（および (L3)）より，t 領域での微分（あるいは積分）演算が，ラプラス変換した後の s 領域では s をかける（あるいは割る）ことに対応することには特に注意されたい。時間関数の微分積分操作はシステム解析に欠かせないが，ラプラス変換を用いることにより，この操作が簡単な代数演算に置き換わる。

上記の性質を定義から導くことはさほど困難ではない。ここでは，(L2) と (L5) だけを示しておく。

(L2) の証明：

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = \int_0^\infty \dot{f}(t)e^{-st}dt \tag{1.11}$$

$$= f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty f(t)se^{-st}dt \tag{1.12}$$

$$= -f(0) + sF(s) \tag{1.13}$$

ここで，式 (1.12) では部分積分を用い，式 (1.13) においては（式 (1.3) が収束することより）$f(t)e^{-st} \to 0$（$t \to \infty$）を用いた。$f(0) = 0$ のときは (L2) となる。高階微分に関しては，これを繰り返し用いれば導ける。

(L5) の証明：

$G(s) := \int_0^\infty \dot{f}(t)e^{-st}dt$ と定義し，簡単のため $f(0) = 0$ とする。(L2) より

$$\lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} sF(s) \tag{1.14}$$

となる。一方，$sF(s)$ が安定なとき，$G(s)$ が $s = 0$ で収束し

$$\lim_{s\to 0} G(s) = G(0) = \int_0^\infty \dot{f}(t)dt = f(\infty) \tag{1.15}$$

を得る。式 (1.14), (1.15) より，式 (1.9) を得る。

例題 1.3　あるシステムの入力 $u(t)$ と出力 $y(t)$ が

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = 2\dot{u}(t) + u(t)$$

の関係を満たすとする。このとき，両辺をそれぞれラプラス変換して $Y(s)$ と $U(s)$ の間の関係を求めよ。ただし，各信号の初期値はすべて 0 とする。

【解答】　ラプラス変換において，時間微分は s をかけることに対応するので

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 3Y(s) = 2sU(s) + U(s)$$

を得る。よって

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s+1}{s^2+4s+3}$$

である。加える入力 $u(t)$ を変えれば，対応する出力 $y(t)$ も変わる。むろんそれらのラプラス変換 $U(s)$ や $Y(s)$ も変わる。しかし，その比 $Y(s)/U(s)$ は加える入力の種類に依存しないことがわかる。 ◇

1.2.2 基本的な関数のラプラス変換

基本的な関数のラプラス変換を**表 1.1** に示しておく。

表 1.1 基本的なラプラス変換

	$f(t)$	$F(s)$		$f(t)$	$F(s)$
1)	$\delta(t)$	1	6)	te^{-at}	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$
2)	$u_s(t)\ (=1)$	$\dfrac{1}{s}$	7)	$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
3)	t	$\dfrac{1}{s^2}$	8)	$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
4)	$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{s^{n+1}}$	9)	$e^{-at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
5)	e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$	10)	$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

表中で 1) のデルタ関数 $\delta(t)$ は，$t=0$ でのみ値を持ち，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$ かつ，任意の連続関数 $g(t)$ に対して $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)g(t)dt=g(0)$ を満たすものである。よって，定義式 (1.3) より

$$\mathcal{L}[\delta(t)]=\int_0^{\infty}\delta(t)e^{-st}dt=e^0=1$$

である。

2) と 5) は特に重要である。2) の単位ステップ関数 $u_s(t)$ は，$t<0$ では $u_s(t)=0$ であるが，$t>0$ では $u_s(t)=1$ である。これに注意して，ラプラス変換を定義式 (1.3) から計算すると

$$\mathcal{L}[u_s(t)]=\int_0^{\infty}e^{-st}dt=\left.\frac{-1}{s}e^{-st}\right|_0^{\infty}=\frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}]=\int_0^{\infty}e^{-at}e^{-st}dt=\left.\frac{-1}{s+a}e^{-(s+a)t}\right|_0^{\infty}=\frac{1}{s+a}$$

となり，2) と 5) が導ける。2) に関しては，上記のような計算をしなくても，$\delta(t)$ を時間積分したものが $u_s(t)$ なので，1) と性質 (L3) からただちに得られる。同様に，1（$=u_s(t)$）を 1 階時間積分して t，n 階積分して $t^n/(n!)$ となる

—— 著 者 略 歴 ——

杉江　俊治（すぎえ　としはる）

1978 年　京都大学大学院修士課程修了（精密工学専攻）
1978 年　日本電信電話公社勤務
1984 年　京都大学大学院博士後期課程研究指導認定退学（精密工学専攻）
1984 年　大阪府立大学助手
1985 年　工学博士（京都大学）
1988 年　京都大学助教授
1997 年　京都大学教授
　　　　現在に至る

梶原　宏之（かじわら　ひろゆき）

1975 年　九州工業大学工学部電子工学科卒業
1977 年　東京工業大学大学院修士課程修了（システム科学専攻）
1977 年　東京工業大学助手
1982 年　岡山大学講師
1984 年　岡山大学助教授
1985 年　工学博士（東京工業大学）
1990 年　九州工業大学助教授
1999 年　九州大学大学院教授
　　　　現在に至る

システム制御工学演習

Exercises in System Control Engineering

2014 年 9 月 1 日　初版第 1 刷発行

検印省略

著　者　杉　江　俊　治
　　　　梶　原　宏　之
発 行 者　株式会社　コ ロ ナ 社
　　　　代 表 者　牛 来 真 也
印 刷 所　三 美 印 刷 株 式 会 社

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10

発行所　株式会社　**コ　ロ　ナ　社**

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)

ホームページ http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978-4-339-03306-9　（新宅）　（製本：愛千製本所）　G

Printed in Japan