はしがき

応用数学とは，自然現象や社会現象などをある仮定のもとに数式で表現し，その解を数学的に求めたり，さらにこれらの現象を予測する数学のことであると定義できるかもしれない。この分野の数学に対して，わが国では応用数学という言葉が用いられているが，英語では，工業数学（engineering mathematics），工学のための数学（mathematics for engineering），あるいは理学および工学のための数学（mathematics for science and engineering）などと表現されている。英語による表現のほうが具体的で，その対象を明確に表している気がする。

土木応用数学などという特殊な数学が存在するわけではない。本書では，土木工学の分野で用いられている数学を集めて土木応用数学と名づけ，それについて記述している。土木工学の分野ではどのような数学が用いられているのか，さらに，それらを用いるといかに問題が解決できるのかという点について読者に広い知識を得ていただくことを本書の目的とした。特に，記述に当たっては，理論のみを示すのではなく，土木工学の分野に出てくる例を用いてその計算の仕方を具体的に示すようにした。ただし，“第9章 有限要素法”と“第10章 境界要素法”では，本文中では理論のみしか示せなかったので，そのかわり演習問題の解答を詳しく示した。さらに，計算過程がよくわかるように，通常はコンピュータで計算するところも，本書ではできるだけ手計算の結果を示した。その他，種々の現象の基礎方程式の誘導の仕方や解析結果の考察は，きわめて重要なことではあるが，この本の対象外としたので，それらについては，関連のある土木工学の教科書や参考書を見ていただきたい。また，数学上の公式の証明は，理論の説明を冗長にし，応用数学の実体と利用法を理解するうえで妨げになると考え，できるだけ省くことにした。最近はパーソナルコンピュータや大型コンピュータの普及により，実務で数値計算法がよく用いられるようになったので，“第7章 マトリックス解析法”，“第8章 差分法”，“第

9章 有限要素法”，第10章 境界要素法”，同じ理由から，“第12章 多変量解析”をあえて本書に入れることにした。その際，実務書ではなく教科書という本書の目的からコンピュータのプログラムは省略した。

ページ数の関係で，本書を読んだり，演習問題を解く際に必要な公式と数表のみを付録に示した。本文中の例題を理解したり，演習問題を行う際に必要であるので，連立方程式と固有方程式については，ポケットコンピュータのための解析プログラムを付録に示した。

今回，私には，この本の執筆というどうしても避けられない壁があったために，結果として応用数学のおもしろさを知ることができた。本書執筆に当たり，理論は理解できたと思っているのに例題をやってみると解けなかったり，例題は解けるのに理論が書けないというようなことがよくあった。読者の方々も，少しぐらいでへこたれず，この本を通じて，ぜひ応用数学に興味をもち，さらにより詳しい参考書でも勉強し，将来，実務において応用数学を十分に生かされることを期待する。

不勉強な著者が短期間で本書を書いた関係で，初歩的な誤りや記述の不備な点もあるかもしれない。読者のご指摘やご批判により改善につとめたいと願っている。

東京大学の伊藤 學 教授を委員長とする本シリーズの編集委員会の方々は，私にこの本を執筆する機会を与えて下さるとともに，本書をまとめるに当たり内容の構成について貴重な助言を下さいました。また，中井 博 教授をはじめとする大阪市立大学土木工学科の先生方には本書を記述するに当たり，励ましの言葉や貴重な助言をいただきました。これらの方々にここで感謝の意を表します。

1986年8月

北 田 俊 行

目　　　次

第1章　序　　　論

第2章　微 分 方 程 式

第3章　複素関数論

第4章　変　　分　　法

第5章　フーリエ解析・フーリエ積分

第6章　ラプラス変換

第7章　マトリックス解析法

第8章　差　分　法

第9章　有限要素法

第10章　境界要素法

第11章　確　率・統　計

第14章 計　画　法

付　録

参考文献

演習問題の略解

索　引

第1章　序　論

1.1　本教科書の対象範囲

土木工学の分野における実務において，ある技術的な仕事（問題）が与えられたとき，その解決方法は，図1.1に示すように分類できる。現象が既知の問題は，教科書，ハンドブックおよび設計示方書などを用いて解決できる。未知の現象では，模型実験（あるいは統計データの収集）を行ったり，理論解析により解決できる。本教科書では，土木工学の分野で一般に用いられる理論解析法や統計データの処理方法について簡単に述べる。

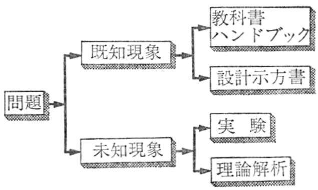

図 1.1　問題解決の方法

1.2　未知現象の解明方法

現象が定性的にわかっている場合には，その現象を再現できると思われる**数学モデル**を考える（図1.2参照)。数学モデルとは，“数式で表した仮定である”，と定義できる[5]。この数学的なモデルを解くことによって数学的な解を得る。この解は実験等により検証することが必要である。この数学モデルにより実際の現象が実

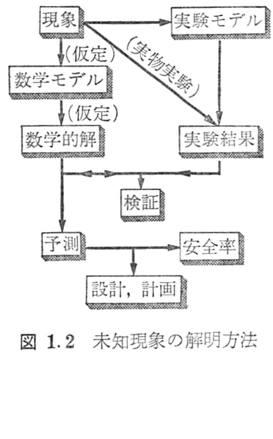

図 1.2　未知現象の解明方法

用上問題とならない程度の誤差範囲で再現できることがわかれば，この数学モデルを用いて与えられた問題の解が予測できる。さらに，この予測結果に安全率の概念を導入することによって，構造物を設計したり，道路計画などを立てることができる。

1.3　数学モデル

図 1.3 に示すように，数学モデルは，物質的なモデルと非物質的なモデルに大別できる。

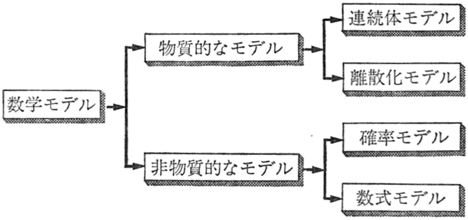

図 1.3　数学モデルの種類

物質的なモデルとは，固体，流体および粉体など具体的な物質が対象となるモデルであり，非物質的なモデルは，確率とか費用とか形をもたないものを対象とする。物質的なモデルは，さらに，**連続体モデル**と**離散化モデル**に分けられる。連続体モデルとは，たとえ物質の中に寸法あるいはその物理的性質に不連続な箇所が存在していても，それを平均化し不連続がないものとしたモデルであり，逆に離散化モデルでは，連続体であっても，それを離散要素の集合体としてモデル化するので，要素間の境界では不連続が存在する。

確率分布など確率・統計に関するモデルを**確率モデル**という。また，線形計画法の場合などのように数式で表現した数学モデルのように，対応する具体的な物質が存在しないようなモデルは**数式モデル**といえるかもしれない。確率モデルと数式モデルは，非物質的なモデルというカテゴリーの中に入れることができる。また，確率モデル以外のモデルを**確定モデル**という。

図 1.4 にモデル化の例を示す。同図（a）のように，自動車荷重が作用する橋梁の設計においては，図（b）のような数学モデル（**力学モデル**）が用いられる。実際の自動車荷重 L は，集中荷重 $P_L(1+i)$ と等分布荷重 $q_L(1+i)$ に，橋の自重は，等分布荷重 q_D にモデル化される。ここに，i は車の動的な効果を考慮した割増し係数である。橋の断面は橋軸方向に変化するので，橋は

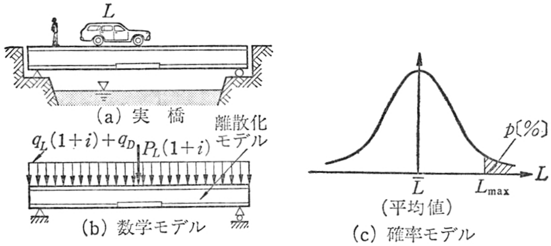

図 1.4　モデル化の例

単純支持の変断面梁（離散化モデル）にモデル化される。なお，自動車荷重Lに対しては図（c）のような確率モデルを考え，非常に小さい超過確率pに対応する大きな荷重 $L_{\max}$ が用いられる。

1.4　現象の見方および種類

現象の見方は図 **1.5** のように分類できる。一つは，**オイラー的な見方**と**ラグランジェ的な見方**である。たとえば，流れの挙動を明らかにするのに，1つ1つの流体粒子の挙動を追跡するのが，ラグランジェ的な見方であり，空間の固定点での各瞬間の流れを観測するのが，オイラー的な見方である。

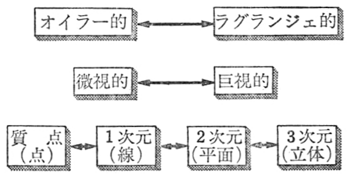

図 1.5　現象の見方

次に，**微視的な見方**と**巨視的な見方**がある。微小要素を考え微分方程式を導く方法は，全体のエネルギーなどを考えて基礎式を導く変分法（第4章）などに比較して，微視的である。しかし，微分方程式を導く方法も，物質の粒子や分子のレベルから見れば，巨視的な方法であるといえる。

最後に空間的な見方がある。図 1.5 に示すように，質点の挙動から立体構造物の挙動まで四つの空間的な見方が考えられる。構造物はすべて3次元であるが，工学的にはその現象を2次元，1次元，あるいは質点の挙動として取り扱えばよい場合が多い。

現象の種類は図 **1.6** のように分類できる。まず，**線形な現象**と**非線形な現象**

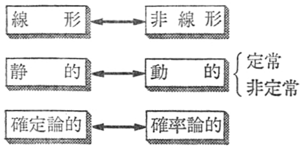

図 1.6　現象の種類

がある。現象が線形式で表されるものが線形現象であり，そうでないものが非線形現象である。土木工学の分野では，現象が線形であると仮定して解析できる問題が多い。次に，**静的な現象**と**動的な現象**がある。時間によって変化する現象が動的な現象で，そうでないものが静的な現象である。動的な現象は，さらに，**定常**と**非定常**に分けられる。振幅や周期など現象の本質的な要素が時間とともに変化しない現象を定常といい，そうでないものを非定常という。最後は，**確定論的な現象**と**確率論的な現象**である。ある条件を与えれば常に一定の解が得られるような現象が前者で，無数のばらつきのある解が得られるような現象が後者である。

1.5　土木工学の分野で用いられる各種解析法

土木工学の分野でその解法によく応用数学が用いられる現象あるいは問題，およびそれらの解析法をまとめて**表 1.1** に示す。解析法の簡単な説明も同表に示すが，その詳細については本文中で述べるのでここでは省略する。

1.6　土木応用数学に関する参考書

本教科書では，土木に関する例題を中心に，表 1.1 に示した解析法が簡単に説明されている。各解析法が奥深い内容をもっており，この本にそれらのすべてを含めることは不可能である。したがって，ここでは土木で用いられる応用数学にはどんなものがあり，それがいかに用いられるかを簡単に述べることにする。良い参考書がたくさんあるので，興味をもたれた分野があれば，その分野の参考書を読まれ，その分野の知識をさらに深められることを期待する。そういった分野の数をふやすことにより，ますます土木応用数学に対する興味も増してくるものと考える。さらに数学モデルの作り方や解析結果の工学的な考察についても，紙面の都合で，それぞれの専門分野の教科書に譲ることにした。

表 **1.1** 土木工学の分野でよく用いられる解析法

現象あるいは問題	解析法	解析法の簡単な説明
構造物の静的挙動 構造物の動的挙動 座屈強度 波　動 水の流れ 土の圧密 拡散（温排水，工場排水） （以上，すべてに関して線形問題と非線形問題がある）	常・偏微分方程式	微分方程式を直接解く方法
	ラプラス変換	微分方程式の一解法
	フーリエ解析	微分方程式の解を無限三角級数で表す
	複素関数論	流れの解析によく用いられる
	積分方程式	微分方程式の基本解を用いて領域内の積分問題を境界上での積分問題に置換する
	変分法（リッツ法など）	領域全体のエネルギーや誤差を最小にする解を近似的に求める方法
	ガレルキン法	変分法を用いて微分方程式を解く方法
	差　分　法	微分方程式を離散化し数値的に解く方法
	マトリックス構造解析	コンピュータ向きの構造解析法
	有限要素法(F.E.M.)	変分原理に基礎をおく2，3次元問題向きの数値計算法
	境界要素法(B.E.M.)	積分方程式の数値計算法
道路計画，駐車場計画 製作および工程管理	線形計画法 (非線形計画法)	多くの制約条件の基に，ある関数の最大（最小）値を求める方法（すべて線形式で表せる場合が線形で，そうでない場合が非線形）
	動的計画法	段階的に判断が必要な問題の最適解を求める方法
	ネットワークプランニング	工事等の工程管理を（確率論的に）行う方法
	待ち行列法	料金所で待つ車の列などについて，確率論的に取り扱う方法
自動車，風，地震荷重の特性 確率データの処理 実験データの処理 多変数の確率データの処理 交通量調査	統計処理（一変数）	度数分布，平均値，標準偏差など
	確率分布のあてはめ	統計データの数式化
	相 関 解 析	二つ以上のデータの相互関係を調べる
	多変量解析（重相関係数，偏相関係数，主因子分析，判別関数，クラスター分析）	多くの確率変数からなる現象の特性を調べる方法
	実験計画法（分散分析法）	ある確率変数がその現象に影響を与えるかどうかを調べる方法
	スペクトル解析	時間的あるいは場所的に変化する確率変数の主成分を分析する方法
	モンテカルロ法	ある確率分布に従う確率変数を理論的に発生させ数値実験的に問題を解く方法

第2章

微分方程式

2.1 常微分方程式

図2.1に示すような等断面の梁に等分布荷重 q〔kgf/cm〕と軸方向圧縮力 P〔kgf〕が作用している場合について取り扱う。まず最初に，P が0の場合を考える。**梁の曲げ剛性**を EI〔kgf·cm²〕とすると，梁のたわみに関する4階常微分方程式が次式で与えられる〔43〕,〔57〕。

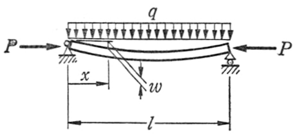

図 2.1 等分布荷重と圧縮力を受ける梁

$$EI\frac{d^4w}{dx^4}=q \quad \text{または} \quad EIw,_{xxxx}=q \tag{2.1}$$

ここに，$w,_{xxxx}$ は x に関する w の4階微分を表す。

ここでは微分方程式をいかに解くかを目的にしているので，式の意味などについては深く考えず先に進んでもらいたい。

式（2.1）の両辺を x に関して4回積分すると

$$w=\frac{q}{24EI}x^4+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4 \tag{2.2}$$

$C_1\sim C_4$ は**積分定数**であり，式（2.2）は式（2.1）の**一般解**という。積分定数を梁の両端の条件，すなわち，**境界条件**を用いて決定すると，いま考えている問題の解，すなわち，**特殊解**が求まる。

$w,_{xx}$ はたわみ曲線の曲率を表し，図2.1のような形で梁がたわむときその符号は負となる。$-w,_{xx}$ に EI をかけると，梁を曲げようとする断面内の

索　　引

——著 者 略 歴——

1968 年　大阪市立大学工学部土木工学科卒業
1973 年　大阪大学大学院博士課程修了
1973 年　大阪大学助手
1978 年　大阪市立大学講師
1980 年　工学博士（大阪大学）
1981 年　大阪市立大学助教授
1984 年　英国ロンドン大学・インペリアルカレッジ
　　　　　客員教授
1999 年　大阪市立大学教授
2002 年　大阪市立大学大学院教授，現在に至る

専門分野：橋梁工学

土木応用数学

Mathematics for Civil Engineering

1986 年 9 月 30 日　初版第 1 刷発行
2002 年 11 月 25 日　初版第 5 刷発行

検印省略

著　者　北　田　俊　行
大阪府寝屋川市郡元町 14-19

発行者　株式会社　コ ロ ナ 社
代 表 者　牛 来 辰 巳

印刷所　富士美術印刷株式会社

112-0011　東京都文京区千石 4－46－10
発行所　株式会社　コ　ロ　ナ　社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140-8-14844・電話（03）3941-3131（代）
ホームページ http://www.coronasha.co.jp

ISBN 4-339-05041-5　（清文社，愛千製本所）
Printed in Japan