「捜索理論における確率モデル」章末問題の模範解答

［2章］（ページ 24）

【1】任意の事象 $A \subseteq \Omega$ に対し，A と A^c は排反である。したがって，公理 2 と 3 から $1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$。ゆえに，公理 1 から $P(A) = 1 - P(A^c) \leq 1$。

任意の事象 A と $\emptyset$ は排反であるから，公理 3 から $P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$。ゆえに，$P(\emptyset) = 0$。

【2】式 (2.2) から，2 個の事象の場合には公式 (2.3) は正しい。$n-1$ の事象 $A_1, \cdots, A_{n-1}$ に対して公式 (2.3) が正しく，次式が成立すると仮定する。ただし，表記を簡単にするため，積事象 $A_i \cap A_j \cap \cdots \cap A_k$ を $A_i A_j \cdots A_k$ と書いた。

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_s \cup \cdots \cup A_{n-1}) \;\; &= \;\; \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{i<j\leq n-1} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k\leq n-1} P(A_i A_j A_k) \\
&\quad + \cdots + (-1)^{n-2} P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1})
\end{aligned}$$

式 (2.2) から，

$$\begin{aligned}
&P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P((A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup A_n) \\
&= P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}) + P(A_n) - P((A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}) A_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{i<j\leq n-1} P(A_i A_j) + \cdots + (-1)^{n-2} P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) \\
&\quad + P(A_n) - P(A_1 A_n \cup A_2 A_n \cup \cdots \cup A_{n-1} A_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) + P(A_n) - \sum_{i<j\leq n-1} P(A_i A_j) - \sum_{i\leq n-1} P(A_i A_n) \\
&\quad + \cdots + (-1)^{n-2} P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) + \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_{n-2}\leq n-1} (-1)^{n-2} P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_{n-2}} A_n) \\
&\quad + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j\leq n} P(A_i A_j) + \cdots \\
&\quad + \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}\leq n} (-1)^{n-2} P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_{n-1}}) + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)
\end{aligned}$$

となって，公式 (2.3) が n 個の事象に対しても成り立つ。

【3】事象 $A \cap B$ は，最初の目が 2 で 2 回目の目が 5 となる事象であるから，その確率は，全部で 36 通りの 2 つの目の出方の中の 1 つとして，$P(A \cap B) = 1/36$ となる。さて，$P(A) = 1/6$ である。また，(最初の目，2 回目の目) の 2 組で書けば，事象 B は $(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$ の 6 通りあるから，$P(B) = 6/36 = 1/6$ である。ゆえに，$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 1/36$ となり，事象 A と B は独立である。事象 A として最初の目が何であろうと，上の計算のやり方は同じである。

事象 A として最初の目がどんな目 x が出ろうと，目の和が 7 となるのは 2 回目の目が $7-x$ となる場合のみである。つまり，どんな x が出たとしても，次に事象 B が生じるのは 1/6 の確率である。この独立性は B として目の和を 7 以外の場合には成り立たない。和が 7 以外の場合，最初の目によっては事象 B が成り立たない場合が必ずあるからである。たとえば，$B=\{$ 目の和が $6\}$ なら，最初に 6 の目が出れば，事象 B は決して生じない。

【4】<u>二項分布</u>

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x}p^x q^{n-x} = \sum_{x=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!}pp^{x-1}q^{n-x} = \sum_{k=0}^{n-1} np\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}p^k q^{n-1-k} \\
&= np(p+q)^{n-1} = np
\end{aligned}
$$

$E[X^2]=E[X(X-1)+X]=E[X(X-1)]+E[X]$ であり，第 2 項の平均は既に求めているので，第 1 項だけを計算すれば

$$
\begin{aligned}
E[X(X-1)] &= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\binom{n}{x}p^x q^{n-x} = \sum_{x=2}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!}p^2 p^{x-2}q^{n-x} \\
&= n(n-1)p^2\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!}p^k q^{n-2-k} = n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} = n(n-1)p^2
\end{aligned}
$$

である。したがって，分散は次のように計算できる。

$$Var[X]=n(n-1)p^2+np-(np)^2=np(1-p)=npq$$

<u>幾何分布</u>

$$E[X]=\sum_{n=1}^{\infty}npq^{n-1}=\left(p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dq}q^n\right)=\frac{d}{dq}\left(p\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)=p\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q}\right)=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}$$

$E[X^2]=E[X(X-1)+X]=E[X(X-1)]+E[X]$ であるから，第 1 項だけを計算すれば

$$
\begin{aligned}
E[X(X-1)] &= \sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)pq^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)pq^{n-1} = pq\frac{d^2}{dq^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right) = pq\frac{d^2}{dq^2}\left(\frac{1}{1-q}\right) \\
&= pq\frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2}
\end{aligned}
$$

となる。ゆえに，

$$Var[X]=\frac{2q}{p^2}+\frac{1}{p}-\left(\frac{1}{p}\right)^2=\frac{q}{p^2}$$

<u>指数分布</u>

$$E[X]=\int_0^{\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=\left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}dx=\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{\lambda}$$

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

であるので，

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

正規分布

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \{(x-\mu)+\mu\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy + \int_{-\infty}^{\infty} \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\
&= \mu
\end{aligned}$$

上式の２行目の第１項は奇関数の積分であり，第２項は確率密度関数の積分であることに注意すればよい。

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{(x-\mu)^2 + 2(x-\mu) + \mu^2\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\
&= 2\int_0^\infty y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy + \mu^2 \\
&= \left[-\frac{2\sigma y}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy + \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2
\end{aligned}$$

したがって，

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \sigma^2$$

［３章］（ページ 50）

【1】 (1) 3.5.1 項では，１回のリビングの捜索で発見できなかった場合のリビング，台所，書斎でのキーの事後存在確率は 0.23，0.46，0.31 であった。このとき，各場所でキーを見つける確率は，それぞれ 0.23×0.7，0.46×0.7，0.31×0.9 である。したがって，値の一番大きな台所を探すべきである。

(2) リビングを 3 回探して見つからなかった場合の事後確率は次式で計算できる。3 回も探して見つからなかったリビングの存在確率は極めて小さくなる。

$$P(\text{キーがリビングにある} \mid \text{リビングで未発見}) = \frac{0.5(1-0.7)^3}{0.5(1-0.7)^3 + 0.3 + 0.2} \approx 0.026$$

$$P(\text{キーが台所にある} \mid \text{リビングで未発見}) = \frac{0.3}{0.5(1-0.7)^3 + 0.3 + 0.2} \approx 0.584$$

$$P(\text{キーが書斎にある} \mid \text{リビングで未発見}) = \frac{0.2}{0.5(1-0.7)^3 + 0.3 + 0.2} \approx 0.390$$

[4章] (ページ 67)

【1】 (1) $r(t) = R$（定数）であるから，式 (4.9) による探知ポテンシャルは

$$F(C) = \int_0^{2\pi R/u} \left(\frac{k}{R}\right)^3 dt = \frac{k^3}{R^3} \cdot \frac{2\pi R}{u} = \frac{2\pi k^3}{uR^2}$$

となり，探知確率は

$$P = 1 - \exp\left(-\frac{2\pi k^3}{uR^2}\right)$$

(2) 時刻 0 に出発したとすれば，$r(t) = R + ut$ であるから，探知ポテンシャルは，

$$F(C) = \int_0^{\infty} \frac{k^3}{(R+ut)^3} dt = \left[-\frac{k^3}{2u(R+ut)^2}\right]_0^{\infty} = \frac{k^3}{2uR^2}$$

となるから，探知確率は次式となる。

$$P = 1 - \exp\left(-\frac{k^3}{2uR^2}\right)$$

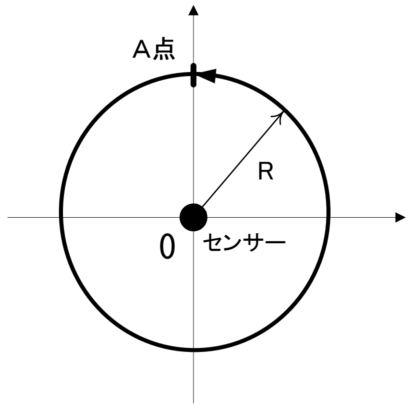


図 1: 円経路

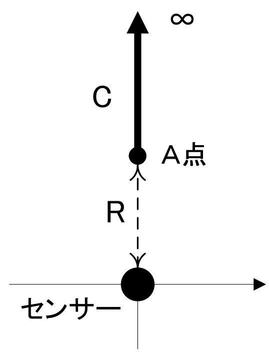


図 2: 半直線経路

【2】目標が，時点 0 にセンサーと横距離 x で最近接したとすると，$r(t) = \sqrt{x^2 + (ut)^2}$ であるから，探知ポテンシャルは次式となる。

$$\begin{aligned} F(C) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^n}{\{x^2 + (ut)^2\}^{n/2}} dt = 2\int_0^{\infty} \frac{k^n}{x^n \{1 + (ut/x)^2\}^{n/2}} dt = 2\int_0^{\infty} \frac{k^n}{x^n (1+y^2)^{n/2}} \cdot \frac{x}{u} dy \\ &= \frac{2k^n}{ux^{n-1}} \int_0^1 z^{(n-3)/2}(1-z)^{-1/2} dz = \frac{2k^n}{ux^{n-1}} B\left(\frac{n-1}{2},\ \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

変形の途中で，$y = ut/x$，$z = 1/(1+y^2)$ の変数変換を行った。

【3】式 (4.11) の $PL(x)$ を使った積分で $r = \sqrt{R_0^2 - (ut_0)^2/4}$ の記号を使えば，有効捜索幅は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} W &= 2\int_0^r dx + 2\int_r^{R_0} \frac{2\sqrt{R_0^2 - x^2}}{ut_0} dx = 2r + \int_0^{\theta_0} \frac{4R_0^2 \sin^2\theta}{ut_0} d\theta = 2r + \frac{2R_0^2}{ut_0}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\theta_0} \\ &= r + \frac{2R_0^2}{ut_0}\theta_0 \end{aligned}$$

式中では $x = R_0 \cos\theta$ の変数変換を行い，記号 $\theta_0 = \cos^{-1}(r/R_0)$ を使用した。したがって，$\sin\theta_0 = \sqrt{1-(r/R_0)^2} = ut_0/(2R_0)$ であるから，最終式は次式になる。

$$W = \sqrt{R_0^2 - \frac{(ut_0)^2}{4}} + \frac{2R_0^2}{ut_0} \sin^{-1}\left(\frac{ut_0}{2R_0}\right)$$

【4】道路の最短経路線を基線として，車群とは反対側の角度 θ の方向に渡るとする。あなたが渡り切るまでの所要時間は $D/(u\cos\theta)$ である。あなたが渡り切った点に車群が来るまでの所要時間は $(L + D\tan\theta)/v$ である。したがって，時間差 $f(\theta) = (L + D\tan\theta)/v - D/(u\cos\theta)$ を最大にする θ^* を求めたい。

$$f'(\theta) = \frac{D}{v\cos^2\theta} - \frac{D\sin\theta}{u\cos^2\theta}$$

となるから，D や L に関係なく，最適な角度は $\theta^* = \sin^{-1}(u/v)$ である。

［5章］（ページ 85）

【1】この問題は，$f(x) = \left(1 - e^{-x/\alpha}\right)\left(1 - e^{-\beta/x}\right)$（ただし，$\alpha, \beta > 0$）に対する $x \geq 0$ による最大化問題と同じである。

$$f(x) = 1 - \left(e^{-x/\alpha} + e^{-\beta/x}\right) + e^{-(x/\alpha + \beta/x)}$$

と変形できるが，第 2 項は，相加相乗平均の不等式

$$e^{-x/\alpha} + e^{-\beta/x} \geq 2\sqrt{e^{-x/\alpha}e^{-\beta/x}}$$

から，$e^{-x/\alpha} = e^{-\beta/x}$ のとき，つまり $x/\alpha = \beta/x$ のとき最小となる。また，第 3 項の最大化，すなわち $x/\alpha + \beta/x$ の最小化も，

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{\alpha}\frac{\beta}{x}} = 2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

のように，$x/\alpha = \beta/x$ のとき実現する。したがって，$f(x)$ は $x/\alpha = \beta/x$ のとき，すなわち $x^* = \sqrt{\alpha\beta}$ のとき最大となる。

［6章］（ページ 109）

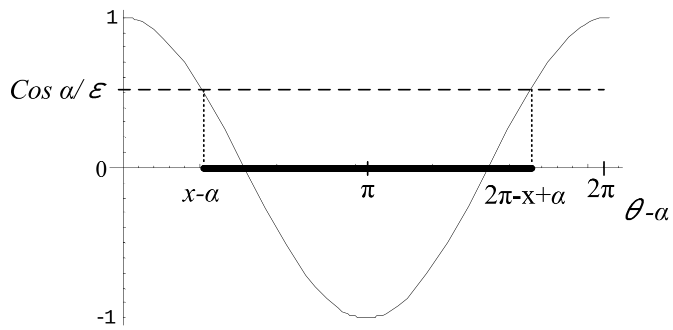
【1】式 (6.8) における θ の積分範囲を求める。

(1) $\xi \geq 1$ ならば，条件 $\cos\alpha - \xi\cos(\theta - \alpha) \geq 0$ から $\cos(\theta - \alpha) \leq \cos\alpha/\xi \leq 1$ であるから，下図のように $\cos(x - \alpha) = \cos\alpha/\xi$ を満たす $0 \leq x - \alpha < \pi$ を用いれば，θ の積分範囲は $\theta \in [x,\ 2\pi + 2\alpha - x]$

である。式 (6.8) の積分の部分を実行すれば,

$$\int_x^{2\pi+2\alpha-x} \{\cos\alpha - \xi\cos(\theta-\alpha)\}\, d\theta = [\theta\cos\alpha - \xi\sin(\theta-\alpha)]_x^{2\pi+2\alpha-x}$$
$$= (2\pi + 2\alpha - 2x)\cos\alpha - \xi\{\sin(\alpha-x) - \sin(x-\alpha)\}$$
$$= 2\left\{\pi - \cos^{-1}\left(\frac{\cos\alpha}{\xi}\right)\right\}\cos\alpha + 2\xi\sin(x-\alpha)$$
$$= 2\cos^{-1}\left(-\frac{\cos\alpha}{\xi}\right)\cos\alpha + 2\sqrt{\xi^2 - \cos^2\alpha}$$

となり,最終的には式 (6.10) と同じ式を得る。



(2) $\xi < 1$ のとき,$\cos\alpha/\xi \geq 1$ ならば,条件 $\cos\alpha - \xi\cos(\theta-\alpha) \geq 0$ を変形した $\cos(\theta-\alpha) \leq \cos\alpha/\xi$ の条件は,θ の積分範囲を制約しない。したがって,式 (6.8) の積分の部分は,

$$積分 = [\theta\cos\alpha - \xi\sin(\theta-\alpha)]_0^{2\pi} = 2\pi\cos\alpha$$

となり,式 (6.9) が得られる。

$-\cos^{-1}(-\xi) \leq \alpha \leq -\cos^{-1}\xi$ または $\cos^{-1}(-\xi) \leq \alpha \leq \cos^{-1}(-\xi)$ ならば $-\xi \leq \cos\alpha \leq \xi$ だから,$-1 \leq \cos\alpha/\xi \leq 1$ となり,(1) の $\xi \geq 1$ のケースと同じ θ の積分範囲をもつから,結果も一致して式 (6.10) を得る。

$\alpha < -\cos^{-1}(-\xi)$ または $\alpha > \cos^{-1}(-\xi)$ ならば $\cos\alpha < -\xi$ であるから,$\cos\alpha - \xi\cos(\theta-\alpha) \leq \cos\alpha + \xi < 0$ となって,θ の積分範囲は空集合である。ゆえに,式 (6.11) を得る。

【2】微小時間区間 $[t, t+\Delta t]$ での捜索面積及び有効捜索率は,それぞれ $A(t)$,$Q(t)$ であるから,この時間区間での探知確率は $Q(t)\Delta t/A(t)$ である。したがって,$q(t)$ と $q(t+\Delta t)$ の関係式は,

$$q(t+\Delta t) = q(t)\left(1 - \frac{Q(t)\Delta t}{A(t)}\right)$$

となる。これを変形して $\Delta t \to 0$ とすれば,変数分離型の微分方程式

$$\frac{dq(t)}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t} = -q(t)\frac{Q(t)}{A(t)}$$

を得る。初期条件 $q(t_0) = 1$ の下で,これを解けば,

$$q(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{Q(t)}{A(t)}dt\right)$$

となるから，$[t_0, t_E]$ 間での探知確率は次式で与えられる。

$$p(t_0, t_E) = 1 - \exp\left(-\int_{t_0}^{t_E} \frac{Q(t)}{A(t)} dt\right)$$

特殊例：$A(t) = \pi(u_0 t)^2$, $Q(t) = Q$ であれば，

$$\int_{t_0}^{t_E} \frac{Q(t)}{A(t)} dt = \int_{t_0}^{t_E} \frac{Q}{\pi u_0^2 t^2} dt = \frac{Q}{\pi u_0^2}\left(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{t_E}\right)$$

から，式 (6.15) が得られる。

【3】円形正規分布の確率密度関数を半径 $Z = \sqrt{(Q/\pi)\log(t_E/t_0)}$ の円形領域で積分すれば，

$$\int_0^{2\pi}\int_0^Z \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) z dz d\theta = \left[-\exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right)\right]_0^Z = 1 - \exp\left(-\frac{Z^2}{2\sigma^2}\right)$$
$$= 1 - \exp\left(-\frac{Q}{2\pi\sigma^2}\log\frac{t_E}{t_0}\right) = 1 - \left(\frac{t_0}{t_E}\right)^{Q/2\pi\sigma^2}$$

となる。

【4】5.2.2 節でのやり方と同様にできる。半径 Z の円形領域に目標が存在した場合の時間区間 $[t_0, t_E]$ でのランダム捜索による探知確率は

$$1 - \exp\left(-\frac{Q\log(t_E/t_0)}{\pi Z^2}\right) \tag{6.A}$$

であり，半径 Z の円形領域に目標が存在する確率は

$$1 - \exp\left(-\frac{Z^2}{2\sigma^2}\right) \tag{6.B}$$

であるから，式 (6.A) と (6.B) を掛け合わせれば，式 (6.18) を得る。

上の探知確率を最大にする最適な半径 Z^* は，式 (5.22) と同様，上の 2 式が一致する場合である。つまり，

$$\frac{Q}{\pi Z^2}\log\frac{t_E}{t_0} = \frac{Z^2}{2\sigma^2}$$

の場合であり，

$$Z^* = \left(\frac{2Q\sigma^2}{\pi}\log\frac{t_E}{t_0}\right)^{1/4}$$

となる。それを式 (6.A) または式 (6.B) に代入すれば，式 (6.19) を得る。

【5】式 (6.20) による

$$\frac{W}{S} = \frac{1}{(\lambda-1)\xi}\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \tag{6.C}$$

を利用する。式 (5.4) は $S \le W$ のとき，すなわち，$1 \le W/S$ のときに，探知確率 $P = 1$ である。式 (5.5) は $W < S$ のとき，すなわち，$W/S < 1$ のときに，$P = W/S$ であるから，式 (6.21) が容易に導ける。

不完全定距離センサーでは，$W = 2r_0p_0$ を利用する。式 (5.6) に $k = 0$ を代入することで $P(S) = W/S$ を得る。このときの条件は，$0 \le W < p_0S$ のとき，すなわち，$W/S < p_0$ のときである。また，式 (5.7) に $k = 0$ を代入することで $P(S) = p_0^2 + (1 - p_0)\frac{W}{S}$ を得るが，その条件は $S/2 \le r_0 < S$ のとき，すなわち，$p_0 \le W/S < 2p_0$ のときである。以上から，式 (6.23) を得る。

式 (6.24) は，式 (5.13) の W/S に式 (6.C) を代入すればよい。

［7章］（ページ 153）

【1】(1) 輸送問題：　工場 i から需要地 j への輸送量を x_{ij} で定義すると，輸送経費最小化問題は次で定式化できる。

$$\begin{aligned}
\min_{x_{ij}} \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i,\ i = 1, \cdots, m \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j,\ j = 1, \cdots, n \\
& x_{ij} \ge 0,\ i = 1, \cdots, m,\ j = 1, \cdots, n
\end{aligned}$$

(2) 食材購買問題：　食材 j の購入量を x_j で定義する。

$$\begin{aligned}
\min_{x_j} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i,\ i = 1, \cdots, m \\
& x_j \ge 0,\ j = 1, \cdots, n
\end{aligned}$$

(3) ナップサック問題：　品物 i をナップサックに入れる場合は 1 を，そうでなければ 0 をとる 0-1 変数を x_i で定義する。

$$\begin{aligned}
\max_{x_i} \quad & \sum_{i=1}^{n} c_ix_i \\
s.t. \quad & \sum_{i=1}^{n} w_ix_i \le G \\
& x_i \in \{0, 1\},\ i = 1, \cdots, n
\end{aligned}$$

(4) 数独：　変数 x_{ijk}: i 行 j 列のマスに数字 k を入れる場合は 1 を，入れない場合は 0 をとる 0-1 変数。目的関数は適当に設定する。

$$\max \quad \sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{9}\sum_{k=1}^{9} x_{ijk} \tag{7.A}$$

$$
\begin{aligned}
s.t. \quad & \sum_{i=1}^{9} x_{ijk} = 1,\ j,k = 1,\cdots,9, & \text{(7.B)}\\
& \sum_{j=1}^{9} x_{ijk} = 1,\ i,k = 1,\cdots,9, & \text{(7.C)}\\
& \sum_{k=1}^{9} x_{ijk} = 1,\ i,j = 1,\cdots,9, & \text{(7.D)}\\
& \sum_{i=3s+1}^{3s+3} \sum_{j=3t+1}^{3t+3} x_{ijk} = 1,\quad k = 1,\cdots,9,\quad s,t = 0,1,2, & \text{(7.E)}\\
& x_{ijk} \in \{0,1\},\ i,j,k = 1,\cdots,9, & \text{(7.F)}\\
& x_{117} = 1,\ x_{142} = 1,\cdots. & \text{(7.G)}
\end{aligned}
$$

式 (7.A) の目的関数は適当に設定する。制約条件は次を意味する。式 (7.B) は，任意の列では，各数字は一カ所のみに入る。式 (7.C) は，任意の行では各数字は一カ所のみに入る。式 (7.D) は，任意のマス目には数字 $1,\cdots,9$ の 1 つのみが入る。式 (7.E) は，任意のブロックの中には，各数字は一カ所のみ入る。式 (7.G) は，すでにマス目に数字が挿入されている場合に指定する。

【2】双対変数 y_1, y_2, y_3, y_4 に対し，双対問題は次で定式化される。

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 20y_1 + 30y_2 + 5y_3 + 10y_4\\
s.t. \quad & 2y_1 + 3y_2 \qquad + y_4 \geq 2\\
& 8y_1 - 2y_2 + y_3 - 2y_4 \geq 1\\
& -3y_1 - 3y_2 + 3y_3 - 3y_4 = -4\\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

【3】$\partial f/\partial x = 3x^2 + 3y = 0,\ \partial f/\partial y = 3x + 3y^2 = 0$ の連立方程式の解 $\boldsymbol{x}_1 = (0,0),\ \boldsymbol{x}_2 = (-1,-1)$ のうち，$\boldsymbol{x}_2$ のみ，任意の z_1, z_2 に対し

$$
(z_1, z_2) \cdot \nabla^2 f(\boldsymbol{x}_2) \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = -6(z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2) \leq 0
$$

を成り立たせるから，局所最適解であり，極大値は $f(\boldsymbol{x}_2) = 1$ である。

【4】$p_1, \cdots, p_m$ には，制約 $\sum_{i=1}^m p_i = 1,\quad p_i \geq 0\ (i = 1,\cdots,m)$ がある。等式のみを制約としてラグランジュ関数を

$$
L(p_1,\cdots,p_m;\lambda) \equiv -\sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^{m} p_i - 1 \right)
$$

により定義して，連立方程式

$$
\frac{\partial L}{\partial p_i} = -\log p_i - 1 + \lambda = 0,\ i = 1,\cdots,m
$$

を解けば，一様分布 $p_i^* = 1/m$ が導出できる。この p_i^* は非負性も満たす。また $\partial^2 f/\partial p_i \partial p_j$ は，$i = j$ のとき $-1/p_i$ であるが，$i \neq j$ のときはゼロとなるから，任意の $x_1, \cdots, x_m$ に対し $(x_1, \cdots, x_m) \cdot \nabla^2 f(\boldsymbol{p}^*) \cdot (x_1, \cdots, x_m)^t$ は非正となる。したがって，一様分布がエントロピーを最大にする。

【5】数学的帰納法により，問いの主張が証明できる。

(1) $n = 1$ の場合は明らかである。

(2) 変数の数 $k - 1$ に対し主張が正しいとすれば，

$$f_{k-1}(v_{k-1}) = \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{v_{k-1}}{k-1} \right)^2 = \frac{v_{k-1}^2}{k-1} \tag{7.H}$$

となる。

(3) 漸化式

$$f_k(v_k) = \max_{0 \le x_k \le v_k} \left\{ f_{k-1}(v_k - x_k) + x_k^2 \right\}$$

に式 (7.H) を代入すれば，

$$\begin{aligned} f_k(v_k) \quad &= \min_{0 \le x_k \le v_k} \left\{ \frac{(v_k - x_k)^2}{k-1} + x_k^2 \right\} = \min_{0 \le x_k \le v_k} \frac{k x_k^2 - 2 v_k x_k + v_k^2}{k-1} \\ &= \min_{0 \le x_k \le v_k} \left\{ \frac{k}{k-1} \left(x_k - \frac{v_k}{k} \right)^2 + \frac{v_k^2}{k} \right\} = \frac{v_k^2}{k} \end{aligned}$$

となり，$x_k = q/k$ のとき最小になる。このとき $x_1 + \cdots + x_{k-1} = v_k - x_k = (k-1)v_k/k$ であり，最小値 $f_{k-1}(v_k - x_k)$ を与える $x_1, \cdots, x_{k-1}$ は仮定から等分割であるから，$x_1 = \cdots = x_{k-1} = v_k/k$ である。以上から，変数の数が k のときも主張は正しい。

【6】総和 a の n 個の最適分割による最大値を $f_n(a)$ と表す。2 つに分割する問題 $\max\limits_{0 \le x \le a} x(a - x)$ の最適解は $x = a/2$ であることから，一般的に『等分割が最適解である』と言えそうなので，この主張を数学的帰納法により証明してみよう。

(1) 上で証明したように，$n = 2$ の場合は明らかである。

(2) 変数の数 $k - 1$ に対し主張が正しいとすれば，$f_k(v) = (v/k)^k$ と書ける。この式を用いて，動的計画法による漸化式

$$f_{k+1}(v) = \max_{0 \le x \le v} \left[x f_k(v - x) \right] = \max_{0 \le x \le v} \left[x \left(\frac{v - x}{k} \right)^k \right]$$

の最適化を実行しよう。目的関数を $g(x) = x \left\{ (v - x)/k \right\}^k$ とおくと，

$$g'(x) = \left(\frac{v - x}{k} \right)^{k-1} \frac{v - (k+1)x}{k}$$

となるから，関数 $g(x)$ は $x \in [0, v]$ に対し単峰形であり，$x^* = v/(k+1)$ のときに最大値 $g(x^*) = \{v/(k+1)\}^{k+1}$ をとる。この式は総和 v の等分割により実現されるから，上記の主張は $k + 1$ 個の分割のときも正しい。

【7】DP による定式化のため，次の最適値の値を定義する。k 番目のミサイルが飛来して以降，手持ち数 z の迎撃用ミサイル (SAM) の最適割当により得られる最大の期待破壊危険度を $f_k(z)$ で表す。実際には，最初のミサイルが飛来して以降に撃破できる最大の総危険度 $f_1(m)$ を求めたい。k 番目ミサイルの飛来時に SAM の手持ち量が z である状態で，このミサイルへ y 発割り当てた場合，次の $k+1$ 番目のミサイル飛来時には手持ちの SAM の数は $z-y$ 発となっていることから，次の漸化式が成り立つ。

$$f_k(z) = \max_{y=0,\cdots,z} \left[v_k\{1-(1-p_k)^y\} + f_{k+1}(z-y)\right],\ z=0,1,\cdots,m \tag{7.I}$$

第 1 項は y 発の SAM を指向させた場合の破壊できる期待危険度である。
最終の飛来ミサイルに対しては，残り SAM は全発指向させるべきであるから，

$$f_n(z) = v_n\{1-(1-p_n)^z\},\ z=0,1,2,\cdots,m \tag{7.J}$$

となる。
数値計算は，右表のように，式 (7.J) の初期値から，漸化式 (7.I) を使って $k = n, n-1, \cdots, 1$ の順序で，また各 k においては，$z=0,1,\cdots,m$ の順序で計算を積み重ね，最終的に $f_1(m)$ を求めることができる。k と z の各状況での指向させるべき SAM の数は，漸化式 (7.I) での最大値を実現させる y をとればよい。

計算の順序

k	z			
	0	1	$\cdots$	m
n	0	$*$	$\longrightarrow$	$*$
			$\swarrow$	
$n-1$	0	$*$	$\longrightarrow$	$*$
$\vdots$	$\vdots$		$\swarrow$	$\vdots$
1	0	$*$	$\cdots$	$*$

【8】 (1) この場合は $f(x,y,y') = n_1\sqrt{1+y'^2}$ で，式 (7.76) が適用できるケースであるから，

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{n_1 y'}{\sqrt{1+y'^2}} = const$$

が成立し，$y' =$ 定数，つまり $y(x)$ は直線である。

(2) 式 (7.66) で $n(x,y) = n(y)$ とおいて，$f(x,y,y') = n(y)\sqrt{1+y'^2}$ とする。この場合は式 (7.75) が適用できるから，

$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = n(y)\sqrt{1+y'^2} - n(y)y'\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{n(y)}{\sqrt{1+y'^2}} = const \tag{7.K}$$

が成立する。屈折率 n_1 の $y>0$ の領域と n_2 の $y \le 0$ の領域では，直線 $y' = const$ であり，前者の領域では $y' = \tan\theta_1$，後者の領域では $y' = \tan\theta_2$ と表せるから，式 (7.K) を用いれば，

$$\frac{n_1}{\sqrt{1+\tan^2\theta_1}} = n_1\cos\theta_1 = const = \frac{n_2}{\sqrt{1+\tan^2\theta_2}} = n_2\cos\theta_2$$

が成り立つ。

【9】汎関数 $I[y] = \int_a^b f(x,y,y',\cdots,y^{(n)})dx$ に対し，最適な関数 $y_0(x)$ から少し変化した関数 $y(x) = y_0(x) + \varepsilon\eta(x)$ を考える。変数 ε に対する微分は

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} f(x,y,y',\cdots,y^{(n)})dx = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta' + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\eta^{(n)}\right)dx \tag{7.L}$$

となるが，その k 項は，一般に

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\eta^{(k)}dx &= \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\eta^{(k-1)}\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\right)\eta^{(k-1)}dx = -\int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\right)\eta^{(k-1)}dx \\ &= -\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\right)\eta^{(k-2)}\right]_a^b + \int_a^b \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\right)\eta^{(k-2)}dx \\ &= \cdots = (-1)^k \int_a^b \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\right)\eta dx\end{aligned}$$

とできる。したがって，式 (7.L) は

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_a^b \left\{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)\right\}\eta(x)dx$$

となり，式 (7.71) からオイラー・ラグランジュ方程式を導いたと同様に，最適な関数に関する必要条件式 (7.81) が得られる。

［8章］（ページ 174）

【1】目標分布 $p(r,\theta)$ に θ は含まれていないから $p(r)$ と書く。極座標 (r,θ) の二次元平面上でのこのクープマン問題は，

$$\max_{\varphi(r)} \ 2\pi\int_0^\infty p(r)\left\{1-\exp\left(-\alpha(r)\varphi(r)\right)\right\} rdr \quad s.t. \ \ 2\pi\int_0^\infty \varphi(r)rdr = \Phi, \quad \varphi(r) \geq 0$$

と書けるが，式 (8.3) を求めたやり方と同様にして，最適資源配分

$$\varphi^*(r) = \frac{1}{\alpha(r)}\left[\log\frac{\alpha(r)p(r)}{\lambda}\right]^+ \tag{8.A}$$

が得られる。

式 (8.A) に $p(r)$ の具体的な式と $\alpha(r)=\alpha$ を代入すると，

$$\varphi^*(r) = \frac{1}{\alpha}\left[\log\frac{\alpha}{2\pi\sigma^2\lambda} - \frac{r^2}{2\sigma^2}\right]^+ \tag{8.B}$$

となる。ここで，

$$\frac{R^2}{2\sigma^2} \equiv \log\frac{\alpha}{2\pi\sigma^2\lambda} \tag{8.C}$$

なる定数 R を導入すれば，式 (8.B) は

$$\varphi^*(r) = \frac{1}{2\alpha\sigma^2}\left[R^2-r^2\right]^+ = \begin{cases} R^2-r^2, & r \leq R \text{ のとき}, \\ 0, & r > R \text{ のとき} \end{cases} \tag{8.D}$$

と書ける。ここで，定数 R，あるいはラグランジュ乗数 λ は，等式

$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{1}{2\alpha\sigma^2}\left(R^2-r^2\right) rdrd\theta = \frac{\pi}{\alpha\sigma^2}\left[R^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi}{4\alpha\sigma^2}R^4$$

から，次式により決定できる。

$$R^2 = \sqrt{\frac{4\alpha\sigma^2\Phi}{\pi}}$$

最適資源配分 $\varphi^*(r)$ による最大探知確率を計算すると，次式となる。

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R p(r)\left\{1-\exp(-\alpha\varphi^*(r))\right\} rdrd\theta = 1-\left(1+\frac{R^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right)$$
$$= 1-\left(1+\sqrt{\frac{\alpha\Phi}{\pi\sigma^2}}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha\Phi}{\pi\sigma^2}}\right)$$

【2】$\psi(x) \equiv c(x)\varphi(x)$ と置くと，目的関数は

$$\int p(x)\left\{1-\exp\left(-\frac{\alpha(x)}{c(x)}\psi(x)\right)\right\} dx$$

で，制約は

$$\int \psi(x) = C, \quad \psi(x) \geq 0$$

となり，クープマン問題 (K_c) においてパラメータ $\alpha(x)$ を $\alpha(x)/c(x)$ に置換した問題に他ならないから，最適配分の式 (8.3) が $\psi^*(x) = c(x)/\alpha(x)\left[\alpha(x)p(x)/(c(x)\lambda)\right]^+$ となる。したがって，最適配分 $\varphi^*(x)$ は

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{\alpha(x)}\left[\log\frac{\alpha(x)p(x)}{c(x)\lambda}\right]^+$$

で，ラグランジュ乗数 λ は,

$$\int \psi^*(x)dx = \int_{\{x|\alpha(x)p(x)-c(x)\lambda\geq 0\}} \frac{c(x)}{\alpha(x)}\log\frac{\alpha(x)p(x)}{c(x)\lambda} = \Phi$$

により決まる。

同様に，コスト制約下でのクープマン問題 (K_c) の最適資源配分は,

$$\varphi_i^* = \frac{1}{\alpha_i}\left[\log\frac{\alpha_i p_i}{c_i\lambda}\right]^+$$

で書け，ラグランジュ乗数 λ は,

$$\sum_{\{i|\alpha_i p_i - c_i\lambda\geq 0\}} \frac{c_i}{\alpha_i}\log\frac{\alpha_i p_i}{c_i\lambda} = C$$

で決まる。

【3】生存確率を考慮した期待利得は

$$
\begin{aligned}
R_T(\varphi) &= \sum_i p_i \left[\int_0^T \{(1-D_i(t))R_i - Ct\} \frac{dP_i^t(\varphi)}{dt} dt - CT\left(1-P_i^T(\varphi)\right)\right] \\
&= \sum_i p_i \left[\Big[\{(1-D_i(t))R_i - Ct\} P_i^t(\varphi)\Big]_0^T + \int_0^T (d_i(t)R_i + C) P_i^t(\varphi) dt \right. \\
&\qquad \left. -CT\left(1-P_i^T(\varphi)\right)\right] \\
&= \sum_i p_i \left[(1-D_i(T))R_i P_i^T(\varphi) + \int_0^T (d_i(t)R_i + C) P_i^t(\varphi) dt\right] - CT \qquad (8.E)
\end{aligned}
$$

第1式の [ ] 内の第1項は，各時点 t で探知があった場合の利得で，目標が生存しているときのみ目標価値 R_i が得られるが，それまでの捜索コストが掛かり，そこで捜索は終了する。第2項は時間 $[0,T]$ で探知がない場合の利得であり，捜索コスト CT が消費されて終了する。この結果から，$\varphi^* = arg\max_\varphi R_T(\varphi)$ の最適解 φ^* からの変分量 $\delta\varphi^*$ による利得の変分は

$$
\delta R_T(\varphi^*) = \sum_i p_i \left[(1-D_i(T))R_i \delta P_i^T(\varphi^*) + \delta \int_0^T (d_i(t)R_i + C) P_i^t(\varphi^*) dt\right]
$$

となるが，$\delta P_i^T(\varphi^*)$ と $\delta \int_0^T (d_i(t)R_i + C) P_i^t(\varphi^*) dt$ に式 (8.33) と (8.34) を使えば，

$$
\begin{aligned}
\delta R_T(\varphi^*) &= \sum_i p_i \alpha_i \int_0^T \left[(1-D_i(T))R_i \left(1-P_i^T(\varphi^*)\right)\right. \\
&\qquad \left. + \int_t^T (R_i d(\tau) + C)(1-P_i^\tau(\varphi^*)) d\tau\right] \delta\varphi^*(i,t) dt
\end{aligned}
$$

となる。これに，各時点での等式制約 (8.31) を満たす変分を考えれば，最適資源配分に関する次の条件が得られる。

(1) $\varphi^*(i,t) > 0$ なる任意のセル i に対し，$A_{it}^T(\varphi^*) = \lambda(t)$。

(2) $\varphi^*(i,t) = 0$ なる任意のセル i に対し，$A_{it}^T(\varphi^*) \le \lambda(t)$。

ただし，$A_{it}^T(\varphi^*)$ は次式で与えられる。

$$
A_{it}^T(\varphi^*) \equiv \frac{p_i \alpha_i}{c_i}\left[(1-D_i(T))R_i\left(1-P_i^T(\varphi^*)\right) + \int_t^T (R_i d(\tau) + C)(1-P_i^\tau(\varphi^*)) d\tau\right]
$$

次に最終時点 T に関する変分を考える。式 (8.E) から，

$$
\delta_T R_T(\varphi^*) = \sum_i p_i \left[\delta_T \left\{(1-D_i(T))R_i P_i^T(\varphi)\right\} + \delta_T \int_0^T (d_i(t)R_i + C) P_i^t(\varphi) dt\right] - C\delta T
$$

式 (8.38) 導出時における $\delta_T P_i^T(\varphi^*)$ や $\delta_T \int P_i^t(\varphi^*) dt$ の導出法を参考にすれば，

$$
\begin{aligned}
&\delta_T \left\{(1-D_i(T))R_i P_i^T(\varphi)\right\} = (1-D_i(T))R_i \delta_T P_i^T(\varphi^*) - d_i(T)R_i P_i^T(\varphi^*)\delta T \\
&\quad = (1-D_i(T))R_i \alpha_i (1-P_i^T(\varphi^*)) \int_0^T \delta\varphi^*(i,t) dt \\
&\qquad +(1-D_i(T))R_i \varphi^*(i,T)(1-P_i^T(\varphi^*))\delta T - d_i(T)R_i P_i^T(\varphi^*)\delta T
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta_T \int_0^T (d_i(t)R_i + C)\, P_i^t(\varphi) dt \\
&\quad = (R_i d_i(T) + C) P_i^T(\varphi^*) \delta T + \int_0^T \left\{ \int_t^T \alpha_i (R_i d_i(\tau) + C)(1 - P_i^\tau(\varphi^*)) d\tau \right\} \delta\varphi^*(i,t) dt
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
&\delta_T R_T(\varphi^*) \\
&= \sum_i \int_0^T \frac{p_i \alpha_i}{c_i} \left\{ (1 - D_i(T)) R_i (1 - P_i^T(\varphi^*)) + \int_t^T (R_i d_i(\tau) + C)(1 - P_i^\tau(\varphi^*)) d\tau \right\} c_i \delta\varphi^*(i,t) dt \\
&+ \left[\sum_i \frac{p_i \alpha_i}{c_i} (1 - D_i(T)) R_i (1 - P_i^T(\varphi^*)) c_i \varphi^*(i,T) + \sum_i C p_i P_i^T(\varphi^*) \right] \delta T - C \delta T \\
&= \sum_i \int_0^T A_{it}^T(\varphi^*) c_i \delta\varphi^*(i,t) dt + \left[\sum_i A_{iT}^T(\varphi^*) c_i \varphi^*(i,T) - C\,(1 - P_T(\varphi^*)) \right] \delta T
\end{aligned}
$$

最終式の第１項は，式 (8.38) と同じくゼロであり，第２項は，$\varphi^*(i,T) > 0$ ならば $A_{iT}^T(\varphi^*) = \lambda(T)$ であるから，次式を得る。

$$
\delta_T R_T(\varphi^*) = C \left\{ \lambda(T) - (1 - P_T(\varphi^*)) \right\} \delta T \qquad (8.\mathrm{F})
$$

式 (8.F) から本文の式 (8.40) と同じ条件を導出でき，その条件は次のように書き換えられる。

$$
\frac{R_i \alpha_i}{c_i} (1 - D_i(T)) \frac{p_i (1 - P_i^T(\varphi^*))}{1 - P_T(\varphi^*)} = 1
$$

この式は，最終時点 T で目標を探知していないという条件の下で，単位捜索資源を投入した場合の生存目標の探知により得られる期待限界利得が消費コスト c_i と同じになるように各セルでの資源量を調整し，この調整した費用対効果の率が１より小さければ捜索は停止する，という捜索方針を示している。

［１０章］（ページ 229）

【1】まず，最小化 $\min_{-2 \le y \le 2} f(x,y) = xy^2 + (x+1)y + 3$ を実行しよう。

$$
f(x,y) = x \left(y + \frac{x+1}{2x} \right)^2 - \frac{x^2 - 10x + 1}{4x}
$$

の変形から，次のように分類できる。

(1) $x > 0$ のとき，２次曲線の軸が $y_0 \equiv -(x+1)/(2x) = -2$ となる x は $1/3$ であることから，
  (i) $\frac{1}{3} \le x$ ならば，$y^* = y_0$ のとき最小値 $f(x, y_0) = -\frac{x^2 - 10x + 1}{4x}$ となる。
  (ii) $0 < x < \frac{1}{3}$ ならば $y_0 < -2$ となるから，$y^* = -2$ のとき最小値 $f(x, -2) = 2x + 1$ となる。

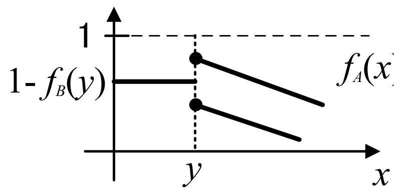
(2) $x = 0$ のとき，$f(0, y) = y + 3$ は $y^* = -2$ のとき最小値１をとる。

(3) $x < 0$ のとき，$x \geq -1$ から $y_0 = -(x+1)/(2x) \geq 0$ である。したがって，$y^* = -2$ のとき最小値 $f(x,-2) = 2x+1$ をとる。

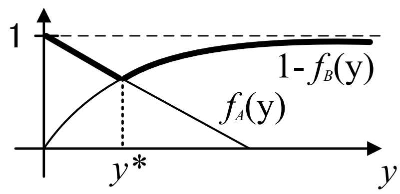
以上をまとめると，$-1 \leq x < 1/3$ ならば $\min_y f(x,y) = 2x+1$，$1/3 \leq x$ ならば $\min_y f(x,y) = g(x) \equiv -(x^2 - 10x + 1)/(4x)$ である。直線 $y = 2x+1$ は単調増加，$y = g(x)$ も区間 $1/3 \leq x \leq 1$ で単調増加であるから，$\max_x \min_y f(x,y)$ は $x^* = 1$ で最大値 $g(1) = 2$ をとる。このマックスミニ値 2 は，ミニマックス値と一致する。均衡解は $x^* = 1,\ y^* = -1$ である。

【2】 (1) (i) $x < y$ の場合，プレイヤー B が先に発砲するから，それが外れればプレイヤー A が勝つ。したがって，$v(x,y) = 1 - f_B(y)$ である。(ii) $x > y$ の場合，先に発砲したプレイヤー A の弾が B に当たれば A が勝つから，$v(x,y) = f_A(x)$ である。

(2) y をパラメータとして扱えば，図から，$\max_x v(x,y) = \max\{1 - f_B(y),\ f_A(y)\}$ である。



(3) y の関数 $\max\{1 - f_B(y),\ f_A(y)\}$ は図のとおり描けるから，$\min_y \max_x v(x,y)$ は $1 - f_B(y) = f_A(y)$ なる交点により与えられる。つまり，プレイヤー B のミニマックス戦略は $f_A(y) + f_B(y) = 1$ なる交点 y^* であり，ミニマックス値は $f_A(y^*)$ である。



(4) 上と同様にして，$\min_y v(x,y) = \min\{f_A(x),\ 1 - f_B(x)\}$ であるから，マックスミニ戦略は $f_A(x) + f_B(x) = 1$ なる交点 x^* で与えられ，マックスミニ値は $f_A(x^*)$ となる。これまでの議論で分かったように，ミニマックス値とマックスミニ値は一致し，プレイヤー A と B の最適戦略も $x^* = y^*$ で一致する。

［１１章］（ページ 275）

【1】 $f_i(x) = 1 - \exp(-\alpha_i x)$ による $f_i^{-1}(\mu) = -(1/\alpha_i)\log(1-\mu)$ 及び $f_i'(x) = \alpha_i \exp(-\alpha_i x)$ を定理 11.1 に適用する。

$$\sum_{i \in N} c_i f_i^{-1}(\mu) = -\left(\sum_i \frac{c_i}{\alpha_i}\right) \log(1-\mu) = C$$

から

$$\mu^* = 1 - \exp\left(-\frac{C}{\sum_i c_i/\alpha_i}\right) \tag{11.A}$$

であるので，最適捜索資源配分は，

$$\varphi_i^* = f_i^{-1}(\mu^*) = -\frac{1}{\alpha_i}\log(1-\mu^*) = \frac{C/\alpha_i}{\sum_j c_j/\alpha_j}$$

となり，目標の最適存在確率は次式で与えられる。

$$p_i^* = \frac{c_i/f_i'(\varphi_i^*)}{\sum_j c_j/f_j'(\varphi_j^*)} = \frac{c_i/\alpha_i}{\sum_j c_j/\alpha_j}$$

また，均衡の探知確率は次のようになる。

$$\sum_i p_i f_i(\varphi_i^*) = \mu^* = 1 - \exp\left(-\frac{C}{\sum_i c_i/\alpha_i}\right)$$