まえがき

本書は，工学部の大学初年次（1～2 年生），また高等専門学校の学生を対象に書かれた常微分方程式の入門書である。また，これから微分方程式を学ぼうとする，または過去に学んだものの多くを忘れてしまった技術者が自習できる構成にもなっている。

読み進めるために必要な知識は，できる限り高等学校の数学のみを前提としており，大学 1 年生がつまずくことなく読み進められるように工夫して書かれている。しかしながら，部分的には理工系大学初年次の微積分学や複素関数論の知識が必要となる。そのような基本的な数学については，付録に簡単にまとめてある。

意識したことは，力学や回路理論を今後学ぶための基礎数学として，微分方程式を取り扱ったことである。これらは機械・電気系の工学における基本的な内容であるが，高等学校で微分方程式を扱わなくなってからは，基本的な微分方程式の取り扱いでつまずく学生が多い。筆者は電気電子工学（信号処理）を専門とする工学研究者であるが，数学の伝統的なトピックである常微分方程式に関する本を著した理由がここにある。

工学においては，無限よりは有限，発散（不安定）よりは収束（安定）が重要である。本書に出てくる例は，工学的応用を強く意識したものを選んでいるだけでなく，単純な計算問題であっても，その式が工学的に意味をもつものをできるだけ選んでいる。また，非斉次方程式の解法としては，演算子法に最も力を入れている。演算子法の扱い方に関しても，今後フーリエ解析や回路解析，振動解析，また制御工学や信号処理論を学んでいくだろうことを強く意識している。特に，解法に何度も出てくるオイラーの公式と部分分数分解は，工学的応用が幅広いが，不慣れな読者のために付録を設けているので参照されたい。

基本的な構成としては，例と例題を交互に配置してある。例題はすべて穴埋め式になっており，直前に示した例を見ながら解法を習得できるようにしてある。したがって，授業の教科書として使えるだけでなく，できるだけ予習・自習できるように書かれている。また，すべての章には章末問題を配した。すべての問題を解くことで，常微分方程式の基本的な解き方がマスターできるようになっている†。

また，紙面上の都合と初年度学生の負担を考慮して，完全微分方程式における積分因子と，

† 本書穴埋めの解答と付録内練習問題，章末問題の詳細な解答はコロナ社の web ページに示されている。
http://www.coronasha.co.jp/np/isbn/9784339061062/
なお，コロナ社の top ページから書名検索でもアクセスできる。ダウンロードに必要なパスワードは付録と章末問題の解答のページに記した。

べき級数法における確定特異点に関しては触れていない。必要であれば，巻末の参考文献を参考にされたい。

これから工学の専門的な内容に進むための準備として，本書が微分方程式の理解の一助になれば，存外の喜びである。最後に，このトピックで本を書くことを，数学を専門とするわけでもない筆者に勧めていただいたコロナ社の皆さん，また内容についてコメントをくれた東京農工大学の学生たちに感謝申し上げる。

2014 年 2 月

田中 聡久

本書を教科書とする講義担当者の方へ

本書を常微分方程式の教科書として半期 15 回（1 回 90 分）で教授する場合の目安を以下に示す。

- 1 年生，特に高等学校卒業直後の前学期であれば，章，または節に*がついている項目はスキップし，その代わりに巻末付録のオイラーの公式や部分分数分解を取り扱えばよい。
- 基礎的な微分積分学や線形代数学を履修済みであれば，本書を一通り学べるはずである。時間的な制約がある場合は，演算子法は基本的な事項にとどめ，ラプラス変換法を扱えばよい。

○ 本書の関数表記上の注意点 ○

本書では原則として，関数の変数は t で表し，関数 $x(t)$ や $y(t)$ はそれぞれ x, y と表記する。例や例題中で，関数に x や y 以外の文字を使う場合，また 6 章のラプラス変換においては，混乱を避けるために変数の t を明記する場合がある。

目　　　次

1.　微分方程式の基礎

2.　1 階線形常微分方程式

3.　2 階斉次線形常微分方程式

4.　2 階非斉次線形常微分方程式

5.　高階線形常微分方程式と連立常微分方程式

6.　ラプラス変換法*

付　録

1 微分方程式の基礎

物理的な現象は，多くの場合において微分方程式で記述できる。立式した微分方程式を解くことで，物理的対象の振る舞いを知ることができる。ここでは，まず，微分方程式とは何かということから始めて，じつは高等学校の科目「物理」で扱う内容は，ほとんど微分方程式で記述できるということを説明する。微分方程式が解けるようになると，さまざまな物理的な現象，工学における問題を記述できるようになるのである。いわばこの章は，もっぱら見るからに美味しそうな料理を並べているようなもので，その材料やレシピを知るには 2 章以降を学べばよい。

1.1 微分方程式とは

$y' = t$ や $y' = y$ のように[†]，等式の中に，ある関数の微分が入っているものを**微分方程式**（differential equation）と呼ぶ。

例 1.1 質量 m の質点の自由落下運動の運動方程式

$$ma = -mg \tag{1.1}$$

は微分方程式である。式 (1.1) は一見，関数の微分が入っていないように見えるが，加速度 a は，速さ v を時間 t で微分したものだから

$$a = \frac{dv}{dt}$$

であり，式 (1.1) は

$$m\frac{dv}{dt} = -mg \tag{1.2}$$

と書けるので，これは微分方程式なのである。

微分方程式を満たす「ある関数」を見つけることを,「微分方程式を解く」という。

† （関数表記上の注意点） 本書では原則として，関数の変数は t で表し，関数 $x(t)$ や $y(t)$ はそれぞれ x, y と表記する。例や例題中で，関数に x や y 以外の文字を使う場合，また 6 章のラプラス変換においては，混乱を避けるために変数の t を明記する場合がある。

例 1.2　微分方程式 $y'(t) = -y(t)$ の解（の一つ）は，$y = e^{-t}$ である。
$y = e^{-t}$ を微分すると，$y' = -e^{-t}$ となる。これと $y = e^{-t}$ をもとの微分方程式に代入してみると，左辺と右辺はともに $-e^{-t}$ となり，一致する。

例題 1.1　a を定数とする。$y = ae^{-t}$ も，微分方程式 $y' = -y$ の解であることを示しなさい。

【解答】　$y' =$ ① [　　　] である。一方，$-y =$ ② [　　　] であり，両辺の一致を確認できる。　◇

このように，微分方程式の解は無数にあるのが普通である。**図 1.1** は，a の値によって，$y' = -y$ の解がどのように変わるかを示している。a はいかなる値をもとり得るので，$y' = -y$ の解は無数にある。これが，代数方程式（$5x = 2$ や $x^2 - x - 2 = 0$ のように高等学校までで習う方程式のこと）と大きく違う点である。ここに現れる a は，**任意定数**（arbitrary constant）と呼ばれる。解を微分して解に含まれる任意定数をうまく消すことで，逆に微分方程式を作ることができる。

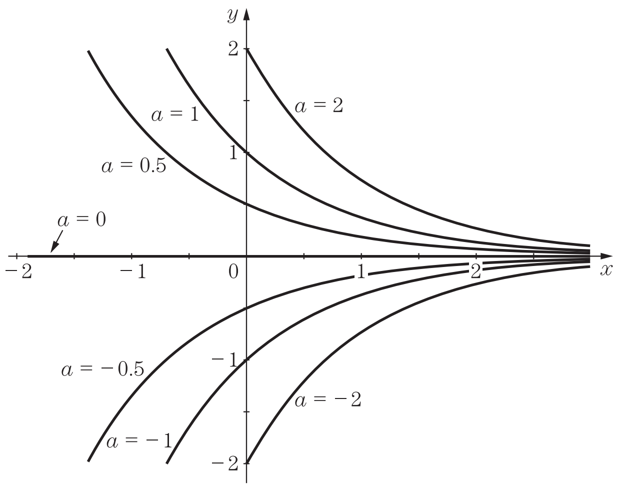

図 1.1　無数にある微分方程式の解

例 1.3　$y = a \sin \omega t$ が解となるように微分方程式を作ってみよう。y を微分すると $y' = \omega a \cos \omega t$ である。また，もう一度微分すれば，$y'' = -\omega^2 a \sin \alpha\omega t$ である。$a \sin \omega t$ は y なので，微分方程式 $y'' = -\omega^2 y$ を得る。

例題 1.2　$y = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$ も $y'' = -\omega^2 y$ の解であることを確かめなさい。

【解答】　y を微分することで

$$y' = \boxed{\text{①}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$y'' = \boxed{\text{②}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

となるため $y'' = -\omega^2 y$ を得る。　$\diamondsuit$

1.2　微分方程式でわかること

関数 $y(t)$ の微分とは，高校数学で学んだように

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \tag{1.3}$$

で決まるのであった。ここで Δ は「数の増減」を表現するために，物理や工学では広く使われる記号である。$\Delta y(t)$ は，$\Delta y(t) = y(t+\Delta t) - y(t)$ を表している。つまり微分は，微小時間 Δt のあいだに $y(t)$ が変化した量を表現している。

例えば，放射性の核種は時間が経つと次々に崩壊していくことが知られている。そして，原子の崩壊のスピード（単位時間にいくつ崩壊するか）は，現時点での原子の数に比例することが知られている。時刻 t における原子数を $N(t)$ とすると，$\Delta N(t) = N(t+\Delta t) - N(t)$ であり，この原子数の減少量が現時点での原子の数に比例するのだから，これは $-\lambda N(t) \Delta t$ である。ただし，λ を比例定数とした。したがって

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = -\lambda N(t) \tag{1.4}$$

という式が成り立ち，$\Delta t \to 0$ と極限をとることで，微分方程式

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) \tag{1.5}$$

を得る。したがって，この微分方程式を $N(t)$ について解くことができれば，時刻 t における原子の数 $N(t)$ を知ることができる。

ここで大切なのは，方程式を立てた時点では，「ある瞬間の情報」を使っていることである。しかし，微分方程式を解くことで「過去から未来にわたる任意の次点での情報」を得ることができる。例えば，物体の速度 v がわかれば，時刻 t における位置を知ることができる。これは，速度は距離（変位）を時間で微分したもの，つまり $\dfrac{dx}{dt}$ だからである。

1.3　高校物理再訪

高校物理の教科書には，四角で囲った「公式」がやたらに出てきた。あまりにも多すぎて，それらの関連性をつかむのに四苦八苦した経験をもつ人も多いと思う。高校物理の教科書は，微分方程式を使わずに書かれているので，結果だけが四角で囲まれている。しかし，微分方程式と物理は兄弟みたいなもので，これらはともに影響しながら発展してきた。

それではまず，高校物理の「公式」を復習してみよう。

例 1.4　初速度 v_0〔m/s〕で質量 m〔kg〕の質点を鉛直方向に放り上げた。t 秒後の質点の位置 x〔m〕は $x=-\dfrac{1}{2}gt^2+v_0t$ となる（g は重力加速度）。

高校の教科書には，四角囲みで記載されている。

この式はどのようにして導出されたのであろうか。

公式というものには，必ず導出がある。じつは，ニュートンが考えた運動の基本法則（**運動方程式**（equation of motion））

$$ma=F \tag{1.6}$$

は微分方程式なのである。F を決めると，速度 v も変位 x も**微分方程式を解くことで求めることができる。**

例 1.4 のような質点を放り上げる問題では，質点にかかる力は重力 $F=-mg$ だけなので，運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-mg \tag{1.7}$$

または，速度 v を使って

$$m\frac{dv}{dt}=-mg \tag{1.8}$$

となる。ここで，運動方程式が微分方程式であることを意識するために，式 (1.6) を $a=\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{dv}{dt}$ で書き換えた。加速度は変位の 2 階微分であることに注意されたい。あとはこの微分方程式を解けばよい。

例 1.5　微分方程式 $\dfrac{dv}{dt}=-g$ の解を求めよう。

v を微分すると $-g$ になることから，$-g$ を積分すれば v が求められるはずである。し

たがって

$$v = \int -g dt = -gt + C$$

ここで，C は任意定数である。

これは任意定数を含む一般解である。C は，物理の世界では**初速度**（initial velocity）に対応するもので，一般的に v_0 などと書かれる。つまり一般解において，$t = 0$ のとき $v = v_0$ という条件（これを**初期条件**（initial condition）という）を与えることで，$C = v_0$ を得る。このようにして得た $v = -gt + v_0$ は 1.5 節で述べるように，**特殊解**（particular solution）と呼ばれるものである。

以上により，高校物理に出てきた「自由落下運動」の速度に関する式を導出することができた。同様にして，$v = \dfrac{dx}{dt}$ であることを使えば，例 1.5 から次の問題を得る。

例題 1.3　微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} = -gt + v_0$ の解を求めなさい。

【解答】　t で微分すると $-gt + v_0$ になるものは，$-gt + v_0$ を t で積分すれば得られる。したがって

$$x = \int (-gt + v_0) dt = \boxed{} + C$$

となる。ここで，C は任意定数である。ここで，初期条件 $x(0) = 0$ (つまり，初期変位が 0) によって得られる特殊解が，高校で習ったおなじみの形（例 1.4）である。　◇

次に，自由落下の例を考えよう。

例 1.6　質量 m〔kg〕の質点を自由落下させる。空気抵抗を考えると，十分な時間が経った後，速度はどうなるだろうか。

これは，よく教科書の「発展」に出てくる内容である。答は「一定になる」である。これを数学的に表せば，t 秒後の速度 v〔m/s〕を，$t \to \infty$ としたとき，$v \to C$ (定数) ということである。

空気抵抗は速度に比例することがわかっているので，その比例定数を k とすれば，運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \tag{1.9}$$

となる。ここで，$a = \dfrac{dv}{dt}$ に注意されたい。また，鉛直下方向を正にとっている。

例 1.6 は微分方程式の最も基本的な形であり，2 章で取り扱う。これを解けば速度が一定になるカラクリがわかる。したがって，解き方さえ学べばよいことがわかる。

似た例として，次の例 1.7 がある。

例 1.7　滑らかな水平面上に，質量 m〔kg〕の質点を初速度 v_0〔m/s〕で滑らせた。空気抵抗は速度に比例するとして，十分に時間が経つと質点の速度はどうなるだろうか。

そのうち止まるというのがわれわれの直感であろう。しかし，きちんと定式化すれば，そのことを確かめることができる。運動している質点には，空気抵抗しか作用していないので，比例定数を k とおけば，運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -kv \tag{1.10}$$

となる。これを v について解けばよい。

式 (1.10) は，式 (1.9) の特別な形であり，これも微分方程式の解法を学べば解くことができる。

次に単振動の例を挙げる。

例 1.8　滑らかな水平面上でばねに質量 m〔kg〕の質点をつなげた。つりあいの位置を原点にとり，そこから x_0〔m〕だけ引っ張り，手を離すとどうなるだろうか。

高校物理の教科書には，こういう場合に質点は単振動をするとある。そして，四角の囲みで次のように出ているであろう。まず，振動の周期は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{1.11}$$

であり，変位は

$$x = x_0 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \tag{1.12}$$

なる公式が出ているはずである。しかし，どのように導出されたのであろうか。

素直に運動方程式を立てると

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{1.13}$$

となる。手から離れているので，弾性力 kx 以外は質点に作用していない。

この微分方程式は 3 章で取り扱う。これを解けば式 (1.12) 導出のカラクリは明らかになる。

このように，物理現象は微分方程式で記述でき，それを解くことで任意の時間における状態がわかるようになるのである。しかし，式 (1.12) は恐ろしい式で，一度手を離すと永遠に

振動し続ける状況を表している。こんな非現実的な運動はありえない。そこで，例 1.9 に示すような，より現実的な状況を考えるべきであろう。

例 1.9　例 1.8 において，実際は質点にはばね内部や空気から逆向きの抵抗が掛かる。

こちらのほうがより現実的な問題である。この抵抗力が速度 v〔m/s〕に比例するとすれば，t 秒後の変位 x〔m〕はどうなるだろうか。そこで比例定数を b として運動方程式をたてると

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} \tag{1.14}$$

となる。

このタイプの微分方程式も 3 章で取り扱う。

もっと複雑な状況を考えよう。ばねが動いているものにぶら下がっているとどうなるだろうか。

例えば，車のサスペンションを考えよう。サスペンションとは，車が過度に揺れることで乗り心地を損なわないように取り付けられているばねのことである。車は等速運動をしているが，ところどころ段差があって，車のサスペンションが上下に揺れる。

例 1.10　例 1.9 のばねが外部から振動する力 $mF\sin\omega t$ を受けるとする。このとき，変位 x〔m〕はどうなるだろうか。

ここまで来ると，はるかに高校物理を逸脱している。さらにいうと，**公式の暗記では歯が立たない**レベルに来ている。それでもめげずに立式をしてみよう。外力が増えるだけなので，運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + mF\sin\omega t \tag{1.15}$$

である。

このタイプの微分方程式は 4 章で取り扱う。本書ではこの式が解けることを目標にする。

このように，物理では運動方程式を立てて，それを解くという形で運動や現象を理解することが基本である。物理は暗記ではないのである。そして，工学の分野でも多くの場合，どのように立式するか，立てた方程式をどうやって解くかが大切になる。その方程式とは，多くの場合は微分方程式の形をとる。

次に電気回路の例を示そう。

索　　　　引

―― 著 者 略 歴 ――

1997年　東京工業大学工学部電気・電子工学科卒業
2000年　東京工業大学大学院理工学研究科修士課程修了
2002年　東京工業大学大学院理工学研究科博士後期課程修了
　　　　博士（工学）
2002年　理化学研究所脳科学総合研究センター研究員
2004年　東京農工大学講師
2006年　東京農工大学助教授
2007年　東京農工大学准教授
　　　　現在に至る

書き込み式　工学系の微分方程式入門
Practical Elementary Differential Equations for Engineers

2014 年 4 月 25 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

著　　者　田　中　聡　久
発 行 者　株式会社　コ ロ ナ 社
　　　　　代 表 者　牛来真也
印 刷 所　三美印刷株式会社

112-0011　東京都文京区千石 4-46-10
発行所　株式会社　コ　ロ　ナ　社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)
ホームページ http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978-4-339-06106-2　（松岡）（製本：愛千製本所）
Printed in Japan