

回転体力学の基礎と制振

工学博士 石田 幸男 共著
工学博士 池田 隆



コロナ社

ま え が き

2001年にコロナ社から、著者らの所属した名古屋大学の研究を中心として回転機械の振動に関する内容をまとめた専門書「回転機械の力学」と題する本を出版した。幸い、多くの技術者や学生に読んでいただいたが、内容が専門的で、数学と力学の予備知識がないと十分理解できないとの声があった。さらに、特に企業の技術者からは、製品開発の観点から、回転機械の制振方法について勉強したいとの希望が出ていた。そこで初心者の学習を念頭において基礎的な事項をていねいに説明するとともに、各種の制振方法を解説した。その構成は、3次元空間内でのロータの運動を理解するために必要な数学と一般力学について記述し、それらを身に付けた後に回転機械の振動の基礎を学習する形式とした。そのような基礎事項は説明の流れから当然前著と重複する部分もあるが、新しい切り口から説明を加えたつもりである。前著と併せて読んでいただくと、回転体の振動に関する理解がさらに深まると思う。さらに回転機械の制振法については、著者らの研究も含め、各種の学術雑誌などで報告されている内容をまとめた。回転体の制振法に関する書籍はあまり見当たらないので、本書が振動でお困りの技術者の皆様のお役に立てれば、著者らの望外の喜びである。

最後に、本書の出版に関してお世話になったコロナ社の皆様に、厚く御礼申し上げます。

2016年3月

著 者

目 次

1. 力学と数学の予備知識（その1）

1.1	ニュートンの法則	1
1.2	質点の運動方程式	4
1.3	剛体の運動方程式	4
1.3.1	固定軸まわりの回転運動	5
1.3.2	平行軸の定理	7
1.3.3	剛体の平面運動	10

2. 2自由度系のたわみ振動

2.1	無減衰系の振動	12
2.1.1	運動方程式	12
2.1.2	自由振動と固有角振動数	15
2.1.3	強制振動	20
2.2	減衰系の振動	24
2.2.1	運動方程式	25
2.2.2	減衰自由振動	25
2.2.3	強制振動	26
2.2.4	軸受部に減衰が作用する系の強制振動	28
2.3	危険速度通過時の非定常振動	29
2.3.1	運動方程式	30
2.3.2	一定角加速度で危険速度を通過する場合	30

3. 力学と数学の予備知識 (その2)

3.1	ベクトルとその演算	33
3.1.1	ベクトルの定義	33
3.1.2	ベクトルの加法と減法	34
3.1.3	ベクトルの内積 (スカラー積)	34
3.1.4	ベクトルの外積 (ベクトル積)	35
3.1.5	基本ベクトル	36
3.2	行列と行列式	38
3.2.1	行列の定義	38
3.2.2	行列の演算, その他	39
3.3	座標軸の回転 (2次元)	43
3.4	剛体の自由度と剛体の傾き角	44
3.4.1	オイラー角	44
3.4.2	射影角と回転角	46
3.5	質点の角運動量	46
3.5.1	角運動量	46
3.5.2	回転に関する運動方程式	47
3.6	質点系の運動方程式	51
3.6.1	各質点の運動方程式	51
3.6.2	重心の運動	52
3.6.3	重心まわりの全角運動量	52
3.7	剛体の運動方程式	54

4. 2 自由度系の傾き振動

4.1 無減衰系の自由運動	56
4.1.1 運動方程式	56
4.1.2 自由振動と固有角振動数	63
4.1.3 ジャイロモーメント	64
4.2 無減衰系の強制振動	71

5. 4 自由度系と多円板系

5.1 たわみと傾きが連成する4自由度系の振動	80
5.1.1 運動方程式	80
5.1.2 自由振動	83
5.1.3 強制振動	86
5.2 剛性ロータを柔らかいばねで支持した系	87
5.2.1 運動方程式	87
5.2.2 自由振動と振動モード	89
5.3 複数の円板をもつ系の危険速度の簡易計算法	90
5.3.1 レイリーの方法(エネルギー法)	91
5.3.2 ダンカレーの公式	92

6. 機械要素に起因する振動

6.1 玉軸受に起因する振動	93
6.1.1 転動体の直径の不ぞろいに起因する共振	94
6.1.2 転動体通過による振動	97
6.2 軸受台の剛性の方向差に起因する振動	99

7. 釣 合 せ

7.1 釣合せの原理 (剛性ロータ).....	104
7.1.1 一面釣合せ.....	104
7.1.2 二面釣合せ.....	105
7.2 釣合い試験機 (剛性ロータ).....	107
7.2.1 釣合い試験機 (ハード型).....	108
7.2.2 釣合い試験機 (ソフト型).....	108
7.2.3 不釣合いのさまざまな表現, その他.....	113
7.3 弾性ロータの釣合せ.....	116
7.3.1 問題点と基本的な考え方.....	116
7.3.2 モード釣合せ法.....	118
7.3.3 影響係数法.....	123

8. 自 励 振 動

8.1 自励振動の基本的性質 (1自由度系).....	129
8.1.1 乾性摩擦が作用する系.....	129
8.1.2 安定性解析.....	132
8.2 内部摩擦 (履歴減衰).....	133
8.2.1 回転機械に発生する各種の摩擦.....	133
8.2.2 履歴減衰と自励力の発生.....	134
8.2.3 自励振動の解析 (履歴減衰).....	136
8.3 内部摩擦 (構造減衰).....	139
8.3.1 構造減衰と自励力の発生.....	139
8.3.2 自励振動の解析 (構造減衰).....	141
8.4 ラビング.....	145

8.4.1	ラビングの種類	145
8.4.2	ラビングのモデルと運動方程式	146
8.4.3	数値シミュレーション	147
8.4.4	実験結果	150

9. 回転機械の制振

9.1	振動の種類と制振	155
9.1.1	強制振動とその制振	155
9.1.2	自励振動とその制振	156
9.2	強制振動の制振	157
9.2.1	回転体の釣合せ	157
9.2.2	共振の回避	157
9.2.3	粘性ダンパを利用した制振	157
9.2.4	防振ゴムによる制振	158
9.2.5	重ね板ばねによる制振	160
9.2.6	動吸振器の定点理論を用いた制振	163
9.2.7	スクイズフィルムダンパ軸受を用いた制振	166
9.2.8	不連続ばね特性を利用した制振	167
9.2.9	ボールバランスを利用した制振	172
9.3	自励振動の制振	178
9.3.1	乾性摩擦に起因する自励振動の制振	178
9.3.2	接触到り起因するラビングの制振	182

10. 振動計測データの処理

10.1	計測データの表示法	186
10.2	FFTによる周波数分析	191

10.2.1	フーリエ級数	192
10.2.2	離散フーリエ級数	199
10.2.3	FFT分析を行う際の注意点	207
10.3	波形データ処理の回転軸系への応用	211
10.3.1	周波数分析における実数データから複素数データへの拡張	211
10.3.2	複素数データを用いたFFT分析による周波数成分の分離処理	214
参 考 図 書		220
引用・参考文献		221
索 引		225

9.2.9 ボールバランサを利用した制振

〔1〕 **基本的な特性** 1950年、Thearleは、円板内に二つのボールを入れ、自動的に回転体のバランスをとる装置を考案した。この装置は多くの研究者によってその特性が詳しく調べられている（井上ら，1967，1979，1983など）。**図9.16**に、ボールバランサを設置したロータの理論モデルを示す。二つのボールがジェフコットロータのディスクに設けた空洞の中に入っている。この回転体の応答曲線とボールの角位置を**図9.17**に示す（太田ら，1991）。一つの回転速度に対して、複数の定常解が存在する。そのうち、実線が安定解、破線が不安定解を示す。危険速度より低速側では、記号①で示された安定解が現れる。この解では、二つのボールがロータの偏重心と同じ側に位置し、そのため振幅が増加する。危険速度より高速側の $\omega = 1.121$ 以上では、ボールは偏重心とは反対側に位置し、振幅零の安定解⑦が現れる。この安定解⑦に対応して、二つのボールの位置は2本の曲線⑦で与えられる。このように、高速側では $\omega = 1.121$ 以上で自動バランスが達成される。なお、ボールがない場合の応答曲線は③、⑥の曲線とほぼ一致し、その応答曲線は安定となる。

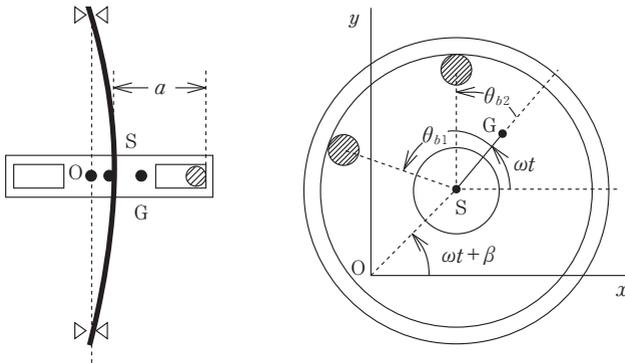


図9.16 ボールバランサの理論モデル

このように、理論的には危険速度の高速側で自動バランスが達成されるが、実際にはこのような完全バランスを実現することは難しい。図9.16の理論モデルと似た構造をもつ実験装置で得られた実験結果を**図9.18**に示す。この実

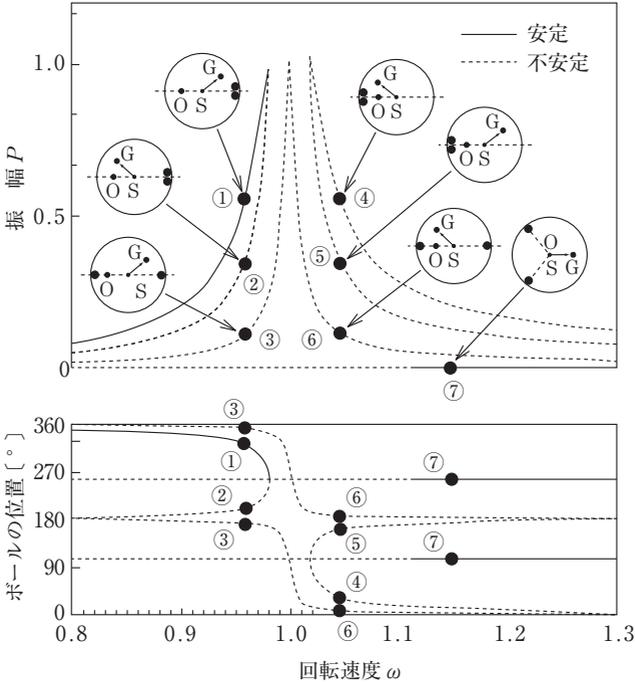


図 9.17 応答曲線（理論解析結果）（太田ら，1991）

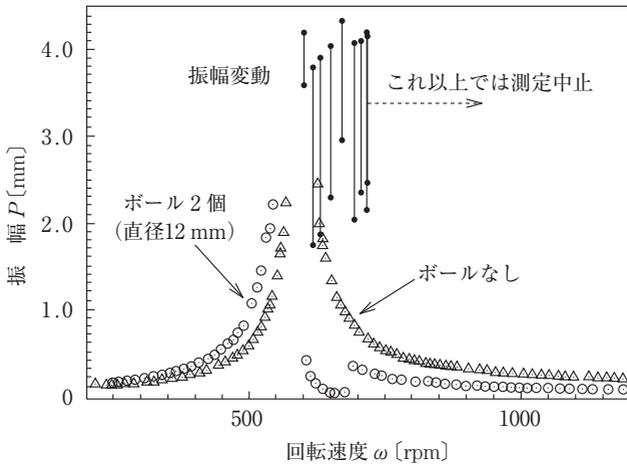


図 9.18 応答曲線（実験結果）（Ishida ら，2011）

験装置では、直径 260 mm、厚さ 30 mm の円板が、長さ 700 mm、直径 12 mm の弾性軸の中央に取り付けられている。銅製のボールの直径は 12 mm である。△印はボールがない場合、○印は 2 個のボールを入れた場合の応答曲線を表す。この図からわかるように、このボールバランサは制振性能を低下させる二つの欠点をもっている。その第 1 の問題は、自励振動の発生である。共振点を越えたすぐの高速側ではボールが空洞内を転がり、その結果、変動する振幅をもつ大きなふれまわり運動が発生する。振幅の変動範囲は上下に・印をもつ細い線で表されている。この自励振動は最初、井上ら (1979) によって報告された。

第 2 の問題は、ボールと軌道面の間で生じる摩擦の影響である。図 9.17 の理論結果と異なり、図 9.18 の実験結果では危険速度を超えた回転速度領域で振幅が零となっていない。これは避けがたい摩擦のため、ボールが最適な位置へ到達できないからである。この現象は、実機ではハンドグラインダにおいて観察されており (Lindell, 1996)、また理論的には、クーロン摩擦 (Van de Wouwe ら, 2005)、乾性摩擦 (Yang ら, 2005)、転がり摩擦 (Chao ら, 2005) などを考慮して調べられている。ボールバランサは非常に特徴のある制振装置であるが、これまであまり普及しなかったのは、この二つの問題が原因である。

〔2〕 **問題に対する対策** ボールバランサを用いるためには、これら二つの問題点を克服することが必要である。共振点付近の自励振動に対する対策として、空洞を油で満たす方法 (井上ら, 1983; Wettergren, 2002)、空洞にパーティションを入れる方法 (陣内ら, 1993) などがある。しかし、油漏れの心配や、パーティションにボールが衝突するときの音の発生という問題が残る。

摩擦のためにバランス精度が下がる問題に対する対策としては、ボールバランサの代わりに振り子バランサを用いる方法がある (Horvath ら, 2008)。これは、振り子バランサでは振り子を支えているヒンジの部分に摩擦が働くため、この原理でその影響が小さくなるからである。

摩擦の影響を小さくするため、複数の軌道面をもつボールバランサを用いることも有効である (Ishida ら, 2011)。彼らは、最初に、一つの軌道面に二つのボールを入れたボールバランサを用いて、約 1 100 rpm 付近で 30 回の実験

を繰り返し、現れた振幅の度数分布を調べた。その結果を図 9.19(a) に示す。元の系に対応するボールがない場合の応答を△印で、ボールがある場合の応答を○印で示した。それらの振幅 P [mm] が、零と元の系の振幅の間に分布していることがわかる。図(b)は、これらのデータの度数分布を棒グラフで示している。この度数分布はつぎのようにして求めた。元の振幅として 1060 rpm における振幅 0.24 mm を採用し、これを 12 分割する。そして、例えば 0.10 mm と 0.12 mm の間に 8 個のデータがあるので、振幅がこの間に入る確率は $8/30 = 26.7\%$ とした。いま、図(b)の度数分布を、図中の曲線で示した確率密度関数 $A\{1 - \cos 2\pi(P/0.24)\}$ で近似する。なお、 A の値は確率密度関数の積分値が 100% になるように決定した。以上の結果から、ボールバランスを用いた場合の振幅の平均値は元の振幅の約半分になることがわかる。このことは、ボールが転動する軌道を複数にすれば、各軌道内のボールが順次止まって、その相乗効果 ($0.5 \times 0.5 \times 0.5 \times \dots$ など) で不釣合いを小さくできると期待される。

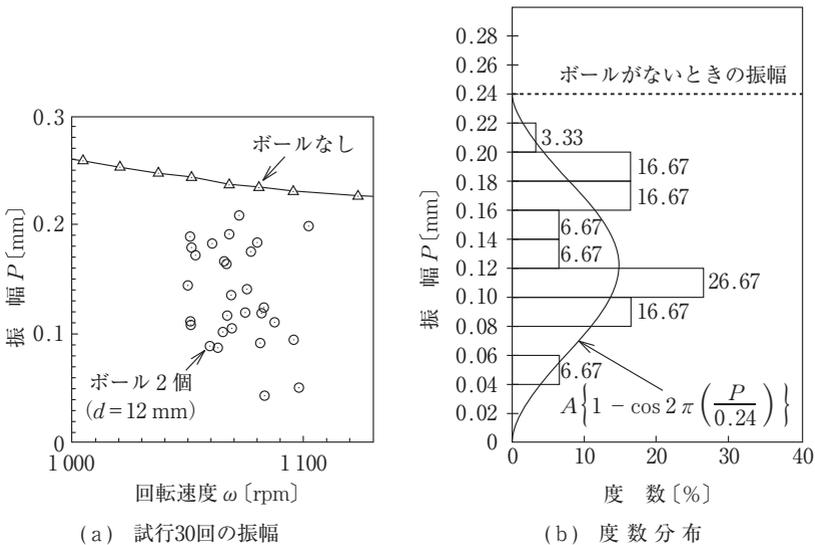


図 9.19 振幅の度数分布 (Ishida ら, 2011)

仮に、元の振幅を 100 として、この近似に従って 30 回の試行が 1~100 を間隔 5 で区切った中に収まる度数分布を **図 9.20** に示す。以下、このようにして求めた分布を理論分布と称する。図 (a) は軌道面が一つの場合の理論分布である。つぎに、図 (b) のように軌道を二つ設けた場合、一つ目の軌道に入った二つのボールが止まると、振幅は図 (a) の棒グラフの一つに収まる。つぎに、二つ目の軌道にボールが止まる場合の振幅は、一つ目の軌道にボールが止まったときの振幅に図 (a) の理論分布を掛けることによって決まる。その結果、図 (b) を得る。さらに、軌道を三つ設けた場合には、図 (c) を得た。このように、軌道の数を増やすとバランスが向上するが、実験によると三つ以上増やしても効果はあまり向上しないようである。

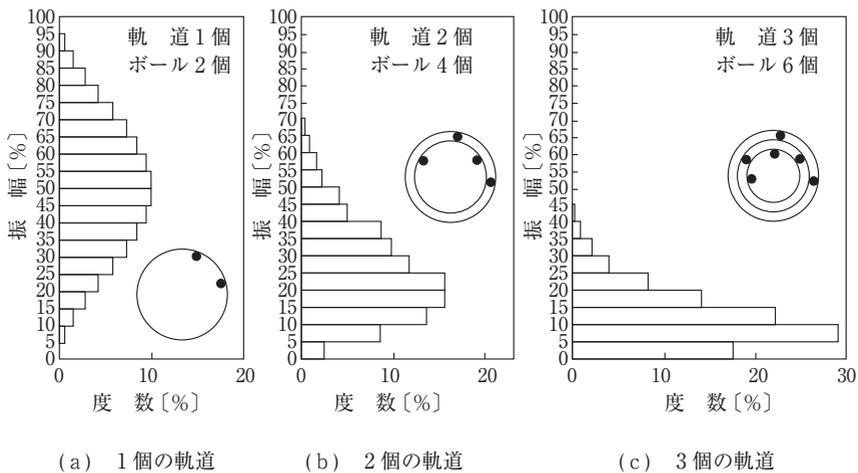


図 9.20 軌道が 1, 2, 3 個の場合の比較 (理論) (Ishida ら, 2011)

図 9.21 は、三つの軌道をもったボールバランスを用いたときの応答曲線の一例を示している。図 9.18 と比べると、高速側の応答はかなり改善されている。なお、自励振動防止のためにこの制振装置へさらにパーティションを設けても、それによってこのバランス効果が低下しないことが確認されている (Ishida ら, 2011)。

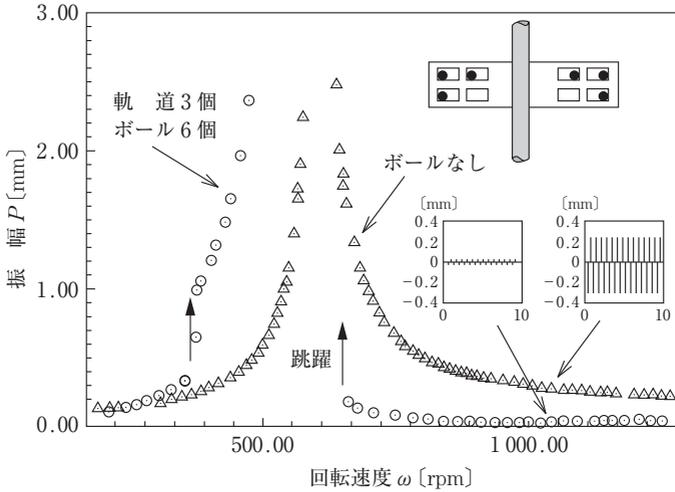
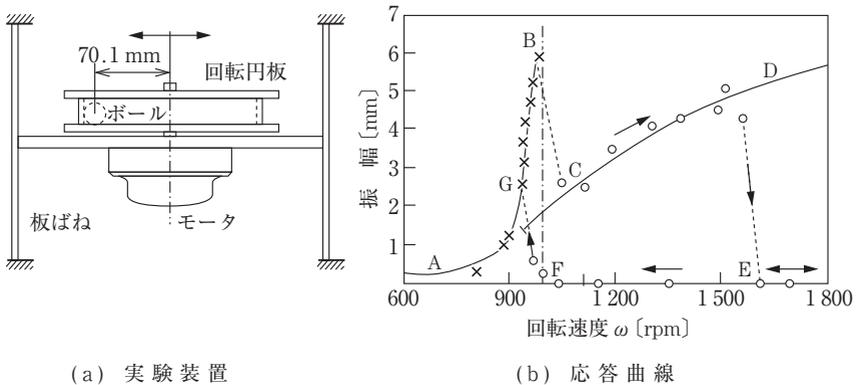


図 9.21 3 個の軌道をもつボールバランサ (実験結果) (Ishida ら, 2011)

摩擦が妨げになってボールバランサによって完全に釣合いがとれない問題を解決する他の方法として、支持剛性に方向差を与える方法がある (井上ら, 1979)。図 9.22 (a) に示す実験装置では、水平な板の上にモータが取り付けられている。板は両端でそれぞれ 3 枚の板ばねによって支持されているので、ロータは左右方向にのみ直線運動をする。モータの軸にはボールバランサが取



(a) 実験装置

(b) 応答曲線

図 9.22 移動方向を拘束した回転機械に適用した場合 (井上ら, 1979)

り付けられている。実験結果を図(b)に示す。危険速度以下で振幅が大きくなること、および共振ピークより高速側のある回転速度範囲で自励振動が発生することは同様であるが、危険速度より高速側ではボールバランスの効果が現れ、しかもその振動の振幅が零となっている。

図9.18において図9.17における振幅零の安定解⑦に対応する実験結果が得られていないのは、大きな遠心力によってボールが半径方向に押し付けられ、その結果、接触点に摩擦力が生まれ、ボールの移動が妨げられるからである。しかし、図9.22のように直線運動に拘束することによってボールを周方向の最適位置へ動かすことができる。図9.22の実験装置においても、図9.17の振幅零の安定解⑦は存在するので、ボールは最適な位置に移動し、完全に近い自動バランスが達成されている。

9.3 自励振動の制振

8章で述べたように、自励振動は広い回転速度範囲で発生するので、ロータの寸法を変えて共振を避けるような対策は不可能である。基本的には、自励振動の発生メカニズムを壊すことで対応する。したがって、自励振動の種類によって制振対策はまったく異なる。

9.3.1 乾性摩擦に起因する自励振動の制振

〔1〕 **構造変更による制振** 8.3節で示した自励振動は、軸と取付部品間の摩擦に起因するので、はめあい部ですべらないような構造にすれば発生しづらくなる。例えば、はめあいの強さを強くすれば、自励振動は発生しづらくなる。また、例えば、図9.23(a)ははめあい部ですべりやすい構造と言えるが、これを図(b)のようにはめあい部の軸を太くすれば、軸と取付部品間ですべりにくくなり、自励振動は発生しなくなる。

〔2〕 **重ね板ばねによる制振** (石田・劉, 2004a) 図8.8に、乾性摩擦が作用する軸の復元力特性はヒステリシスループ特性をもち、そのループ内の面

索 引

【あ】	角速度	15	固定軸	5
アンチエイリアシングフィ	重ね板ばね	160	固有角振動数	16
ルタ	慣性系	1, 22	コリオリの力	23
	慣性主軸	10	【さ】	
【い】	乾性摩擦	129	歳 差	75
位相スペクトル	慣性モーメント	6	歳差運動	65, 75
一面釣合せ	【き】		サラスの方法	41
	危険速度	21	サンプリング	200
【う】	基本ベクトル	36	サンプリング周期	207
ウォータフォール線図	逆行列	42	サンプリング周波数	207
後ろ向きふれまわり運動	逆フーリエ変換	198	サンプリング定理	207
うなり	逆離散フーリエ変換	202	残留不釣合い	114
運動方程式	キャンベル線図	191	【し】	
運動量	行	38	ジェフコットロータ	15
	行ベクトル	39	軸 受	93
【え】	行 列	38	持続振動	143
影響係数	行列式	39	質 点	1
影響係数法	極慣性モーメント	10	質点系	51
エイリアシング	許容残留不釣合い	114	自動調心性	22
遠心力	許容不釣合い	114	縮まりばめ	139
円錐モード	【く】		ジャイロ効果	65
	偶不釣合い	113	ジャイロモーメント	67
【お】	クラメルの解法	40	自由度	4
オイラー角	クーロン摩擦	130	周波数スペクトル	193
応答曲線	【け】		小行列式	40
折り返し歪み	ケルビン・フォークトモ		章 動	75
	デル	134	自励振動	129
【か】	【こ】		振動数方程式	18
外 積	剛性ロータ	104	振幅スペクトル	193
回転速度	構造減衰	134	【す】	
回転半径	高速フーリエ変換	202	スカラー積	35
外部摩擦	剛 体	4	スクイズフィルムダンパ	
外 力			軸受	166
角運動量				
角振動数				

【せ】		【に】		【ほ】	
静釣合せ	104	二面釣合せ	107	防振ゴム	158
静不釣合い	13	ニュートンの運動の法則	1	ボールバランサ	172
成分	4, 38	【ね】		【ま】	
【た】		ねむりごま	74	前向きふれまわり運動	19
単位行列	42	粘性ダンパ	157	窓関数	209
単位ベクトル	36	【は】		【も】	
ダンカレの公式	90	ハニング窓	209	モード	118
弾性ロータ	104	バランシング	104	漏れ誤差	209
【ち】		【ひ】		【ゆ】	
直径に関する慣性モーメント	10	比不釣合い	113	有向線分	33
【つ】		標本化	200	【よ】	
釣合い良さ	115	【ふ】		余因子	40
釣合い良さの等級	115	複素フーリエ級数	192	余因子展開	41
釣合せ	104	複素フーリエ係数	193	要素	38
【て】		不釣合い	113	【ら】	
定点理論	163	不釣合いベクトル	113	ラビン	145
転置行列	41	不釣合い力	14	【り】	
【と】		フーリエ逆変換	198	リーケージエラー	209
動吸振器	163	フーリエ級数	192	リサーチユ図形	187
動釣合せ	104	フーリエ係数	192	離散フーリエ級数	200
動的釣合い試験機	107	フーリエ変換	198	離散フーリエ変換	202
動不釣合い	114	ふれまわり運動	12	履歴減衰	134
トラッキング線図	190	不連続ばね特性	167	【れ】	
【な】		【へ】		レイリーの方法	90
ナイキスト周波数	207	平行軸の定理	8	列	38
内積	35	平行モード	90	列ベクトル	39
内部摩擦	133	ベクトル	33	【ろ】	
内力	51	ベクトル積	36	ロータ	12
		偏角	56		
		偏重心	12		

【欧文】

	DFT	202	N面モード釣合せ法	119
	FFT	202	N+2面モード釣合せ法	123
DFS	IDFT	202	SFD軸受	166

— 著者略歴 —

石田 幸男 (いしだ ゆきお)

1970年 名古屋大学工学部機械工学科卒業

1975年 名古屋大学大学院博士課程修了

(機械工学専攻)

工学博士

1975年 名古屋大学助手

1976年 名古屋大学講師

1982年 名古屋大学助教授

1994年 名古屋大学教授

2012年 名古屋大学名誉教授・特任教授

現在に至る

池田 隆 (いけだ たかし)

1975年 名古屋工業大学工学部機械工学科卒業

1977年 名古屋工業大学大学院修士課程修了

(生産機械工学専攻)

1977年 名古屋大学助手

1982年 工学博士 (名古屋大学)

1989年 名古屋大学講師

1989年 広島大学助教授

1997年 島根大学教授

2009年 広島大学教授

現在に至る

回転体力学の基礎と制振

Fundamentals of Rotordynamics and Vibration Suppression

© Yukio Ishida, Takashi Ikeda 2016

2016年5月27日 初版第1刷発行



検印省略

著者 石田 幸男

池田 隆

発行者 株式会社 コロナ社

代表者 牛来真也

印刷所 萩原印刷株式会社

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844・電話 (03) 3941-3131 (代)

ホームページ <http://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-04645-8

(金) (製本: 愛千製本所)

Printed in Japan



本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられております。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めておりません。

落丁・乱丁本はお取替えいたします