１章　まとめの Quiz

$\boxed{1}$　ベクトルとスカラー

単に大きさのみが意味を持つ物理量をスカラー量と呼ぶ。これに対して、大きさだけではなく方向を持っている物理量をベクトル量と呼ぶ。

$\boxed{2}$　座標系とベクトルの成分表示

（１）　右手座標系では、x 軸を y 軸の方に回転するとき、右ねじの進む方向を z 軸の正の方向にとる。

（２）　直角座標系における基本単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を用いて、3 次元空間における任意のベクトル量は、

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$$

と表される。このとき、A_x、A_y、A_z を、各々、ベクトルの x 成分、y 成分、z 成分と呼ぶ。このときベクトル $\boldsymbol{A}$ の大きさは、

$$A \equiv |\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

（３）点 P の座標を(x, y, z)とするとき、位置ベクトルは、

$$\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

と表すことができる。

（４）点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の方向を向く単位ベクトルは、

$\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$　である。　ただし、r は原点から点 P までの距離を表わす。

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

（５）空間の点 $\mathrm{P}(x_1, y_1, z_1)$ および点 $\mathrm{Q}(x_2, y_2, z_2)$ の位置ベクトルを、各々、

$$\boldsymbol{r}_1 = \overrightarrow{OP} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{r}_2 = \overrightarrow{OQ} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$$

とする。このとき、次の問に答えよ。点 P から点 Q へ向かうベクトルは、

$$\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{r}_{\boxed{2}} - \boldsymbol{r}_{\boxed{1}}$$

２点間の距離は、次式で与えられることを確かめよ。

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

点 P から点 Q の方向へ向かう単位ベクトルは、

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|}$$

$\boxed{3}$ ベクトルの内積

（１）ベクトルの内積（スカラー積）は、

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta$$

ここで、$|\boldsymbol{A}|$、$|\boldsymbol{B}|$は、各々、ベクトル $\boldsymbol{A}$ および $\boldsymbol{B}$ の大きさ、θはベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ とのなす角である。

（２）ベクトルの内積について、以下の法則が成り立つ。

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ （交換法則）

$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}$ （分配法則）

（３） ベクトル $\boldsymbol{A}$ の大きさは内積を用いて

$$|\boldsymbol{A}|^2 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}$$

また、ベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ が垂直であるとき、 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の内積は

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$$

（4）ベクトル$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$の成分が、各々、$A_x,A_y,A_z$および$B_x,B_y,B_z$で与えられるとき、

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

（5）ベクトル$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$とのなす角をθとするとき、

$$（ベクトル\boldsymbol{A}の\boldsymbol{B}方向成分）=\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|}=|\boldsymbol{A}|\cos\theta$$

$\boxed{4}$ ベクトルの外積

（1）ベクトル$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$との外積は、以下のように表記される。

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}$$

（2）ベクトル$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$との外積によって得られる量$\boldsymbol{C}$も、また、ベクトル量であり、その大きさと方向は、

大きさ：$|\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$

ただし、$|\boldsymbol{A}|$、$|\boldsymbol{B}|$は、各々、ベクトル$\boldsymbol{A}$および$\boldsymbol{B}$の大きさ、θ　はベクトル$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$とのなす角である。

方向　：ベクトル$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、両方に垂直な方向を向く。

（3）ベクトルの外積については、次の分配法則は成り立つが、

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$$

となり、交換法則は成り立たない。

（4）ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ とが平行なとき、

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$$

（5）ベクトル $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ の成分が、各々、A_x,A_y,A_z および B_x,B_y,B_z で与えられるとき、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=&\left(A_yB_z-A_zB_y\right)\boldsymbol{i}\\&+\left(A_zB_x-A_xB_z\right)\boldsymbol{j}\\&+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

（6）ベクトル $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ の成分が、各々、A_x,A_y,A_z および B_x,B_y,B_z で与えられるとき、外積は、行列式を用いて

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}$$

5 ベクトルの三重積

（1）ベクトル $\boldsymbol{A}$ とベクトル $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ との内積

$$\boldsymbol{A}\cdot\left(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}\right)$$

をスカラー三重積と呼ぶ。スカラー三重積は、幾何学的にはベクトル $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ および $\boldsymbol{C}$ によって囲まれる平行六面体の体積に等しい。

（2）スカラー三重積について以下の公式が成り立つ。

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\boldsymbol{C}$$

が成立する。

（4）以下の式で定義される三重積は、ベクトル量であり、上のスカラー三重積と区別して、ベクトル三重積と呼ばれる。

$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$

（5）ベクトル三重積について、以下の公式が成立する。

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$$

したがって、一般に $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ は成立しない。

２章　まとめの Quiz

1　微分の復習

（１）微分係数の定義

時間 t の関数 $f(t)$ を考える。時刻 t における $f(t)$ の微分係数は、次式で定義される。

$$\frac{df}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta t}\quad \text{ただし、}\quad \Delta f=f(t+\Delta t)-f(t)$$

（２）平均の速さ、瞬間の速さ

f として、時間 t における移動距離 $s(t)$ を考える。このとき、

$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$ は、Δt 間での平均的な速さを意味する。

$\dfrac{ds}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ は、時刻 t における瞬間の速さを意味する。

（３）微分係数の幾何学的意味

$f(t)$ の微分係数 df/dt は

“ 時刻 t における関数 $f(t)$ の接線の傾きを表わしている ”

（４）微分係数を用いた関数の近似：一次の Taylor 展開

Δt が十分小さいとき、次の近似式が成り立つ。

$$f(t+\Delta t)\approx f(t)+\frac{df(t)}{dt}\Delta t$$

2　ベクトルの微分

（１） 時間とともに変化するベクトル $\boldsymbol{A}(t)$ を時間で微分することは、次の極限をとることを意味する。

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}\quad \text{ただし、}\quad \Delta\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)$$

（２） ベクトル $\boldsymbol{A}(t)$ の (x,y,z) 成分を、A_x, A_y, A_z とすると、

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{dA_x}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dA_y}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dA_z}{dt}\boldsymbol{k}$$

（3）(x,y)平面内における質点の運動を考える。時刻tにおける点Pの位置ベクトルを$\boldsymbol{r}(t)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$、時間が$t$から$\Delta t$だけ進んだときの軌道上の点Qの位置ベクトルを$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)=(x+\Delta x)\boldsymbol{i}+(y+\Delta y)\boldsymbol{j}$で表わす。このとき、点Pにおける“瞬間”の速度ベクトル$\boldsymbol{u}$は、次の極限で定義される。

$$\boldsymbol{u}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

ただし、$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$

ここで、ベクトル$\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$の方向と大きさは、

方向　：$\Delta\boldsymbol{r}$ の方向

大きさ　：$\left|\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}\right|=\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$

ただし、Δsは、点Pと点Qとの距離であり、次式で与えられる。

$$\Delta s=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

（4）位置ベクトルが、$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$のとき、速度ベクトル$\boldsymbol{u}(t)$は、

$$\boldsymbol{u}(t)=\frac{dx(t)}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy(t)}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz(t)}{dt}\boldsymbol{k}$$

速度ベクトルの大きさ、すなわち、速さは、

$$u=|\boldsymbol{u}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

（5）加速度ベクトルは、速度ベクトルについて、次の極限をとることにより定義される。

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{u}}{\Delta t}$$

ただし、速度ベクトルの変化分は、$\Delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)$

（6）ニュートンの運動方程式は、速度ベクトルの微分を用いて

$$m\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\boldsymbol{F}$$

$\boxed{3}$ ベクトルの積の微分

[1] スカラーとベクトルとの積の微分

（1）　$$\frac{d(f\boldsymbol{A})}{dt}=\frac{df}{dt}\boldsymbol{A}+f\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}$$

（2）極座標系(r,θ)で、点Pの位置ベクトル$\boldsymbol{r}$は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{r}(t)=r(t)\boldsymbol{e}_r$$

ただし、$\boldsymbol{e}_r$は

$$\boldsymbol{e}_r=\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j}$$

これと垂直なθ方向の単位ベクトルは、

$$\boldsymbol{e}_\theta = -\sin\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j}$$

（3） $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta$ の時間微分は、

$$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e}_\theta,\quad \frac{d\boldsymbol{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e}_r$$

直角座標系の基本単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ と異なり、$\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ は、点Pの位置変化に伴い、時間的に変化する。

（4）極座標系で、速度ベクトル $\boldsymbol{u}$ は

$$\boldsymbol{u} = \frac{dr}{dt}\boldsymbol{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e}_\theta$$

（5）極座標系で、加速度ベクトルは

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\boldsymbol{e}_\theta$$

（6）したがって、運動方程式の r 方向および θ 方向の成分は、

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = F_r$$

$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = F_\theta$$

と書ける。ただし、F_r, F_θ は、各々、極座標における成分を表わす

[2] ベクトルの内積の微分

（1） $$\frac{d(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$$

（2）速度ベクトル $\boldsymbol{u}(t)$ の大きさ u が時間的に変化しないとき

$$\frac{du^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}) = 0$$

したがって、この場合、速度ベクトルと力とは常に垂直になる。

[3] ベクトルの外積の微分

（1） $\dfrac{d(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})}{dt} = \dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times\dfrac{d\boldsymbol{B}}{dt}$

（2）角運動量ベクトルは次式で定義される物理量である。

$$\boldsymbol{L} = r\times\boldsymbol{p}$$

ただし、$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル、 $\boldsymbol{p}$ は以下の運動量ベクトルを表わす。

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u}$$

角運動量ベクトルの時間微分は、

$\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$　ただし、$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}\times m\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$

（3） したがって、$\boldsymbol{r}\,//\,\boldsymbol{F}$ のとき、

$\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{0}$　つまり、$\boldsymbol{L} = mr^2\omega\boldsymbol{k}$ となり、角運動量は保存される。

３章　まとめの Quiz

$\boxed{1}$　スカラー場とベクトル場

（１）スカラー場の典型的な例として、
　　温度場 $T(x, y, z)$ や、ポテンシャル場・電位場などが上げられる。
（２）ベクトル場の典型的な例として、
　　流れの速度場 $\boldsymbol{u}(x, y, z)$ や、電磁場などが上げられる。
（３）場が空間座標だけではなく、時間にも依存するとき、非定常場と呼ぶ。
　　例えば、上の温度場の場合、$T(x, y, z, t)$ となる。

$\boxed{2}$　流束と流束密度

（１）　エネルギー流束

太陽光パネルに入射するエネルギーの例で考える。
パネルの面全体に単位時間当たりに入射するエネルギー
を太陽光の“ エネルギー ”の流束、あるいは、エネルギー流束と呼ぶ。

（２）　エネルギー流束密度ベクトル

$$\boldsymbol{h} = \frac{\Delta W_f}{\Delta S} \boldsymbol{e}_h$$

ただし、

ΔS ：面積,

ΔW_f ：面積 ΔS を単位時間当たりに通過するエネルギー

$\boldsymbol{e}_h$ ：流れの方向の単位ベクトル

すなわち、エネルギー流束密度ベクトルは、

方向　：流れの方向
大きさ：流れの方向に垂直な面を単位時間、単位面積当り通過するエネルギーで定義されるベクトル量と理解することができる。

（３）　面積ベクトル

空間のある点のまわりの面積要素 ΔS に、その法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の方向を持

たせ、新たにベクトル量$\Delta \boldsymbol{S}$を定義する。これを面積ベクトルと呼ぶ。すなわち、面積ベクトルは次式で定義される。

$$\Delta \boldsymbol{S} = \Delta S \boldsymbol{n}$$

大きさ：考える面の面積　ΔS
方向　：その面に対する法線ベクトル$\boldsymbol{n}$の方向

（４）エネルギー流束の内積による表現

エネルギー流束密度ベクトル $\boldsymbol{h}$ および 面積ベクトル $\Delta \boldsymbol{S}$ を用いて、面を横切るエネルギー流束ΔW_fは、次のように表現できる、

$$\Delta W_f = \boldsymbol{h} \cdot \Delta \boldsymbol{S}$$

（５）閉曲面の場合における法線ベクトルの向き

法線ベクトルを、閉曲面の“内側”から“外側”に向かうようにように選んだ場合（外向き法線）、空間のある点で、

流束密度ベクトルとの内積が“正”（$\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n} > 0$）ならば、エネルギーの流れは、この点で閉曲面の“内側”から“外側”に向かって“流出”している。

反対に、“負”（$\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n} < 0$）ならば、エネルギーは、“流入”していることになる。

（６） 流体の流束

ある面を単位時間当り通過する“流体の量（質量）”を “質量流束”、あるいは、単に“流束”と呼ぶ。

（７） 流体の流束密度ベクトル

空間の各点における流束密度ベクトルは、流体の流れに垂直な面を、単位時間、単位面積当り横切る流体の質量を、流束密度ベクトル$\boldsymbol{f}$と呼ぶ。その単位は、kg/(m^{2}s)である。質量流束密度ベクトル$\boldsymbol{f}$は、

$$\boldsymbol{f} = \rho \boldsymbol{v}$$

ρ：流体の密度
$\boldsymbol{v}$：流速ベクトル

と表される。$\boldsymbol{f}$ は、空間の各位置での密度 $\rho(x,y,z)$ および速度 $\boldsymbol{v}(x,y,z)$ に依存するベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z)$ と考えることができる。

（8）流束の内積による表現

ある面を通過する質量流束 ΔM_f は、エネルギー流束の場合と同様、流束密度ベクトル $\boldsymbol{f}$ と面積ベクトル $\Delta \boldsymbol{S}$ の内積を用いて、次のように表すことができる。

$$\Delta M_f = \boldsymbol{f} \cdot \Delta \boldsymbol{S}$$

４章　まとめの Quiz

$\boxed{1}$　偏微分

（1）偏微分係数

点 (x, y) における $f(x, y)$ の x に関する“偏微分係数”$\partial f/\partial x$ は、次式で定義される。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x+\Delta x,\ y\right) - f\left(x,\ y\right)}{\Delta x}$$

同様に、点 (x, y) における $f(x, y)$ の y に関する“偏微分係数”$\partial f/\partial y$ は、次式で定義される。

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\left(x,\ y+\Delta y\right) - f\left(x,\ y\right)}{\Delta y}$$

（2）全微分

関数 $f(x, y)$ の全微分 df は、x, y を同時に微小変化 dx, dy だけ変化させたときの、関数 $f(x, y)$ の変化分を表わし、次式で与えられる。

$$df = f(x+dx,\ y+dy) - f(x, y)$$

$$\to \qquad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$\boxed{2}$　ベクトル演算子

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$\boxed{3}$　スカラーの勾配

（1）スカラー場 $\varphi(x, y, z)$ の勾配

$$\nabla \varphi(x, y, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

（2）勾配の方向と大きさ

勾配の方向は考えている点のまわりで最も物理量の変化が大きい方向であり、常に、φ の等高線と垂直な方向を向く

勾配の大きさは、次式で与えられえる。

$$|\nabla\varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}$$

（3）原点からの距離に関する勾配

$$\nabla r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

ただし、$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

$\boxed{4}$　ベクトルの発散

（1）ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ の発散

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ベクトルの発散はスカラー量である。

（2）ベクトル場の流束と発散

空間の点における発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{h}$ と、この点を囲む微小体積の表面全体を通過する流束（図４．１４）

$$\sum_{i=1}^{6}\boldsymbol{h}_i\cdot\Delta\boldsymbol{S}_i$$

との間には、

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{h})\Delta V = \sum_{i=1}^{6}\boldsymbol{h}_i\cdot\Delta\boldsymbol{S}_i$$

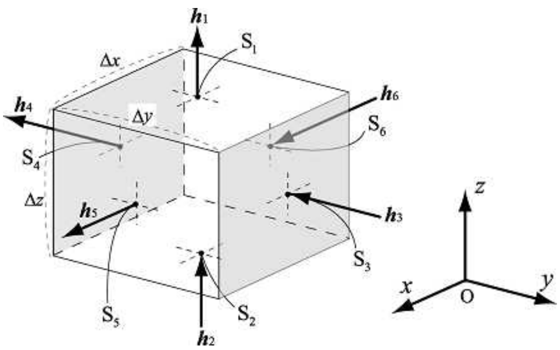


図４．１４

の関係が成り立つ。

また、この微小体積内のエネルギーQの時間変化と発散との間には

$$\therefore \quad \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\left(\nabla \cdot \boldsymbol{h}\right) \Delta V$$

の関係が成り立つ。したがって、が一定に保たれるとき、微小体積内でエネルギーの発生、消滅がなければ、発散はゼロである。これは、表面を通してのエネルギーの
流入と流出とがバランスしていることを意味する。

（3）密度連続の式

流体の空間中の密度および速度を$\rho(x,y,z,t)$、$\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$とする。空間の点(x,y,z)における密度の時間変化は、次の密度連続の式によって記述される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \boldsymbol{v}\right) = S_M$$

ただし、S_Mは空間の点における単位時間、単位体積当りの流体の湧き出し（吸い込み）量である。

（4）ベクトル$A(x,y,z)$とスカラー$\varphi(x,y,z)$との積φAの発散

$$\nabla \cdot (\varphi \boldsymbol{A}) = \varphi\left(\nabla \cdot \boldsymbol{v}\right) + \left(\nabla \cdot \varphi\right) \cdot \boldsymbol{v}$$

（5）位置ベクトルrに関係する量の発散

$$\nabla \cdot \boldsymbol{r} = 3$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = \frac{2}{r}$$

$$\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=0$$

$\boxed{5}$　ラプラシアン

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$\boxed{6}$　ベクトルの回転

（1）ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ の回転

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

ベクトルの回転は**ベクトル量**である。

（2）回転の行列式による表現

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

（3）剛体の回転

回転速度ベクトルは、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ と位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ とを用いて

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

(x,y) 平面内の回転を考える。角速度ベクトルの方向を z 軸に選ぶ（$\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$）と、速度ベクトルの各成分は、

$$\boldsymbol{v}(x,y)=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j},\quad v_x=-y\omega \quad v_y=x\omega$$

速度ベクトルの回転は、

$$\therefore\quad \nabla\times\boldsymbol{v}=2\omega\boldsymbol{k}$$

したがって、

$\nabla\times\boldsymbol{v}$ **の方向は、** $\boldsymbol{v}$ **の方向に垂直で、大きさは、** 2ω **となる。**

（４）ベクトル $A(x,y,z)$ とスカラー $\varphi(x,y,z)$ との積 φA の回転

$$\nabla\times(\varphi\boldsymbol{A})=(\nabla\varphi)\times\boldsymbol{A}+\varphi(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

（５）位置ベクトルに関連する量の回転

$$\nabla\times\boldsymbol{r}=0$$

$$\nabla\times(r\boldsymbol{r})=0$$

$$\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=0$$

$$\nabla\times\left(\frac{1}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=0$$

$\boxed{7}$ スカラーポテンシャルと勾配ベクトルの回転

（１）スカラーポテンシャル

ベクトル A **が、スカラー** φ **の勾配から導かれる場合**

$$\boldsymbol{A}=\nabla\varphi$$

このとき、スカラーφをベクトル$\boldsymbol{A}$の**スカラーポテンシャル**という。

（2）勾配ベクトルの回転に関する恒等式

$$\nabla\times(\nabla\varphi)\equiv 0$$

（3）スカラーポテンシャルの例

力$\boldsymbol{F}$と位置エネルギーUの間には、$\boldsymbol{F}=-\nabla U$の関係がある。

電場$\boldsymbol{E}$と静電ポテンシャルφの間には、$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$の関係がある。

$\boxed{8}$　ベクトルポテンシャルと回転により定義されるベクトルの発散

（1）ベクトルポテンシャル

ベクトル$\boldsymbol{B}$が、ベクトル$\boldsymbol{A}$の回転から導かれる場合

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

このとき、ベクトル$\boldsymbol{A}$をベクトル$\boldsymbol{B}$の**ベクトルポテンシャル**という。

（2）回転ベクトルによって定義される量の発散に関する恒等式

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\equiv 0$$

（3）ベクトルポテンシャルの例

磁束密度ベクトル$\boldsymbol{B}$の発散は、常に**0**であるから、磁束密度$\boldsymbol{B}$は、ベクトル$\boldsymbol{A}$の**回転**として、$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$のように表すことができる。

５章　まとめの Quiz

$\boxed{1}$. 線積分

（1）曲線 C に関するベクトル A の線積分

ベクトル $\boldsymbol{A}$ と曲線 C に沿った微小変位 $d\boldsymbol{r}$ との内積 $\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ について、曲線 C の始点 P から終点 Q まで積分することにより、線積分を定義する。このように定義される線積分を $\boldsymbol{A}$ および $d\boldsymbol{r}$ の成分を用いて表現すると、

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} \left(A_x dx + A_y dy + A_z dz\right)$$

（2）ベクトルがスカラーの勾配から導かれるときの線積分

線積分の値は始点 P と終点 Q におけるスカラーの値 $\varphi(\mathrm{P})$ および $\varphi(\mathrm{Q})$ の差にのみに依存し、

$$\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} \nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{r} = \varphi(Q) - \varphi(P)$$

（3）逆向きの積分路

曲線 C の始点 P と終点 Q とを入れ替えた逆向きの経路に沿う積分路を $-C$ で表すことにする。このとき、

$$\int_{-C} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$$

（4）積分路の分割

積分路 C の途中に点 R を考える。点 P から点 R までの積分路を C_1、点 R から点 P までの積分路を C_2 とすると、

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$$

（5）半径 a の円環 C に沿っての微小変位

円筒座標系 (r, θ, z) を用いると

$$d\boldsymbol{r} = ad\theta \boldsymbol{e}_\theta$$

ここで、$\boldsymbol{e}_\theta$ は θ 方向の単位ベクトルで、直角座標系の単位ベクトルと、以下の関係がある。

$$\boldsymbol{e}_\theta = -\sin\theta \boldsymbol{i} + \cos\theta \boldsymbol{j}$$

$\boxed{2}$. 面積分

（1）ベクトル $\boldsymbol{A}$ の面 S に関する面積分

$$\int_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$$

ここで、$d\boldsymbol{S}$ は、面積ベクトルを表す。$d\boldsymbol{S}$ の大きさを dS 、また、この面の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると、

$$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}dS$$

（2）エネルギー流束密度ベクトル $\boldsymbol{h}$ の面 S について面積分（$\boldsymbol{h}$ の流束）

$$\Phi_{W_f} = \int_s \boldsymbol{h} \cdot d\boldsymbol{S}$$

は、この面を単位時間当たり通過するエネルギーを意味する。

（3）　質量流束密度ベクトル $\boldsymbol{f}$ の面 S について面積分（$\boldsymbol{f}$ の流束）

$$\Phi_{M_f} = \int_s \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \rho \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}$$

は、この面を単位時間当たり通過する流体の質量を意味する。

ただし、$\rho, \boldsymbol{v}$ は、各々、流体の密度と流速ベクトルとを表す。

（4）円形のパイプ“断面”に対する微小面積ベクトル: $d\boldsymbol{S}$

円柱座標系 (r, θ, z) を用いると

$$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n} dS、\ \boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}、\ dS = r dr d\theta$$

ただし、$\boldsymbol{k}$ は z 方向の基本単位ベクトル。

（5）半径 r の円筒の“側面”に対する微小面積ベクトル: $d\boldsymbol{S}$

円柱座標系 (r, θ, z) を用いると

$$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n} dS、\ \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}、\quad dS = r d\theta dz$$

（6）半径 a の“球面”の微小面積ベクトル: $d\boldsymbol{S}$

球座標系 (r, θ, ϕ) を用いると

$$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n} dS、\ \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{a}}{a}、\ dS = a^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

（7）$\boldsymbol{r}/r^3$ の形を持つベクトルの球面に関する面積分

ベクトル $\boldsymbol{E}(x,y,z)$ が、空間の各点 (x,y,z) において

$$\boldsymbol{E}(x,y,z)=\frac{K}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right),\quad \boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\text{、}\ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\text{、}\ K=const.$$

で与えられるとき、半径 a の球面について、$\boldsymbol{E}(x,y,z)$ の面積分は

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=4\pi K$$

$\boxed{3}$. ガウスの定理

（1）ガウスの定理

空間の“閉”曲面を S、この内部の領域を V と表現する。ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対して、次のガウスの定理が成り立つ。

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{A}dV$$

閉曲面であることを明確に示すために、左辺は次のように表現することもある。

$$\oiint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$$

（2）定常的なエネルギーの流れ場

エネルギー流束密度ベクトル $\boldsymbol{h}$ の発散、$\nabla\cdot\boldsymbol{h}$ （ $=\mathrm{div}\boldsymbol{h}$ ） は、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{h}=S_W$$

ここで、右辺は、空間の各点におけるエネルギーの発生量を意味する。

空間中に閉曲面 S を考え、ガウスの定理を適用すると、

$$\int_S \boldsymbol{h}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{h}dV$$

したがって、定常的なエネルギーの流れにおいて、

閉曲面を通過するエネルギー流束＝この閉曲面が囲む体積中における
エネルギー発生量の合計

（３）定常的な流体の質量の流れ

質量流束密度ベクトル $\boldsymbol{f}$ の発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{f}$ （ $=\mathrm{div}\boldsymbol{f}$ ）は、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{f} = S_M$$

ここで、右辺は、空間の各点における流体の湧き出し量を意味する。

空間中に閉曲面 S を考え、ガウスの定理を適用すると、

$$\int_S \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{f}dV$$

したがって、定常的な流体の流れでは、

閉曲面を通過する質量流束 ＝ この閉曲面が囲む体積中での
流体の湧き出し量の合計
（単位時間当り）

（４）点源のデルタ関数による表現

原点に、点熱源がある。点熱源は、デルタ関数を用いて

$$S_W(\boldsymbol{r}) = S_0\delta(r)$$

と表現される。ただし、S_0 は熱源が空間に一様に分布しているとしたとき

の単位体積、単位時間当りの発熱量であり、$S_W(\boldsymbol{r})$ を原点を含む領域で積分すると、この点熱源の単位時間当りの発熱量になる。。ここで、デルタ関数は

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{r} \neq 0 \\ \infty & \boldsymbol{r} = 0 \end{cases}$$

$$\int_V \delta(\boldsymbol{r})dV = 1$$ （V：点 $\boldsymbol{r}=0$ を含む領域）

$$\int_V \delta(\boldsymbol{r})dV = 0$$ （V：点 $\boldsymbol{r}=0$ を含まない領域）

という性質をもつ。

（５）$\boldsymbol{r}/r^3$ の形を持つベクトル：原点を囲む任意の形の閉曲面に対する面積分

ベクトル $\boldsymbol{E}(x,y,z)$ が、空間の各点 (x,y,z) において

$$\boldsymbol{E} = K\frac{1}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$ ただし、$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，　$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 、$K = const.$

で与えられるとき、原点を囲む“**任意の形**”をした閉曲面 S について、“ベクトル $\boldsymbol{E}$ の流束”は

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = 4\pi K$$

4. ベクトルの循環

ベクトル $\boldsymbol{A}$ を空間中の“閉”曲線 C について線積分して得られる

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$$

をベクトル $\boldsymbol{A}$ の“**循環**”と呼ぶ。

5. ストークスの定理

（１）ストークスの定理

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が与えられたとき、閉曲線 C に沿ってのベクトル $\boldsymbol{A}$ の循環

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$$

と、ベクトル $\boldsymbol{A}$ の回転 $\nabla\times\boldsymbol{A}(=\mathrm{rot}\boldsymbol{A})$ を、この閉曲線 C が囲む曲面 S 全体にわたって積分した

$$\oint_C \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$$

との間には、次の関係が成立する。

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$$

（２）剛体の回転

z 軸を回転軸とし、角速度の大きさが ω で回転する剛体の角速度ベクトルは、

角速度ベクトル　$\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$

剛体の点 $\boldsymbol{r}(x,y,z)$ における速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ の方向は、

円の接線の方向を向く

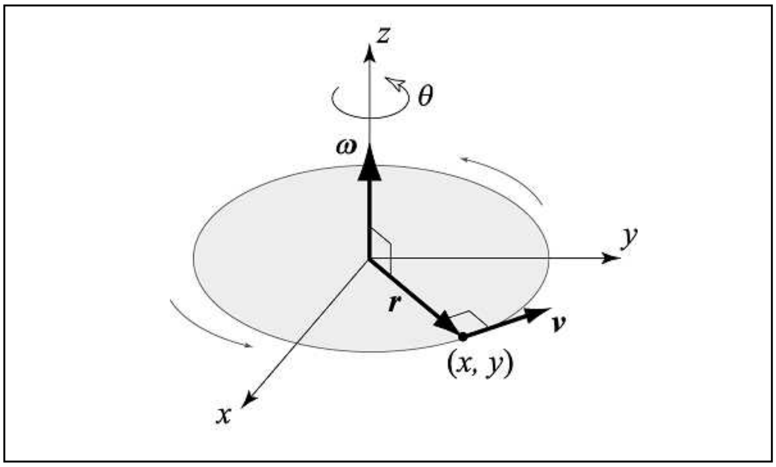
$\boldsymbol{v}$ の回転 $\nabla\times\boldsymbol{v}$ の方向は、

z 軸と平行の方向を向く

$\nabla\times\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{\omega}$ との間には、次の関係がある。

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{\omega}$$

したがって、$\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\omega}$ を図示すると、以下のようになる。



$\boxed{6}$. 渦なし場

ベクトル $\boldsymbol{E}$ がスカラー ϕ の勾配から次のように導かれる場合、

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \phi$$

空間のいたるところで、

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

任意の“閉”曲線 C について、

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

$\boxed{7}$. 湧き口なし場

ベクトル $\boldsymbol{B}$ が、ベクトル $\boldsymbol{A}$ の回転から導かれる場合

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

空間のいたるところで、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

任意の“閉”曲面 S について、

$$\oiint_S \nabla \times \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

６章　まとめの Quiz

$\boxed{1}$　直交曲線座標系

（１）曲線座標系 (u_1, u_2, u_3) において、

$$u_1(x,y,z)=C_1,\quad u_2(x,y,z)=C_2,\quad u_3(x,y,z)=C_3\qquad (C_1,C_2,C_3=const.)$$

は、空間の曲面の式を表す。先の円柱座標系の例（図６．２）で考えると、

$$r=r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}=C_1 \qquad ：円筒面$$

$$\theta=\theta(x,y)=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=C_2 \qquad ：平面$$

$$z=z=C_3 \qquad ：平面$$

を表す。

（２）曲線座標 (u_1, u_2, u_3) では、この３本の曲線の交点として、座標が定まる。とくに、これら３本の曲線（交線）の接線が、空間の任意の点で直交するとき、直交曲線座標系と呼ぶ。

（３）直交曲線座標系において、その基本単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ および $\boldsymbol{e}_3$ は、次の直　交関係を満たす。

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

（４）直交曲線座標系において、任意のベクトルは、これら基本単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ および $\boldsymbol{e}_3$ を用いて

$$\boldsymbol{f}(u_1,u_2,u_3)=f_1\boldsymbol{e}_1+f_2\boldsymbol{e}_2+f_3\boldsymbol{e}_3$$

と表すことができる。この場合、ベクトルの成分、 f_1, f_2 および f_3 は、次のように求めることができる。

$$f_j=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{e}_j\qquad (j=1,2,3)$$

（５）基本単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ および $\boldsymbol{e}_3$ は、 $\nabla u_1, \nabla u_2\ \nabla u_3$、スケールファクター $h_1, h_2\ h_3$ を用いて、

$$\boldsymbol{e}_1 = h_1 \nabla u_1, \quad \boldsymbol{e}_2 = h_2 \nabla u_2, \quad \boldsymbol{e}_3 = h_3 \nabla u_3$$

と表すことができる。

（６）曲線座標の微小変化 du_1, du_2, du_3 に対応する変位の大きさ ds_1, ds_2, ds_3 は、スケールファクター $h_1, h_2\ h_3$ を用いて、

$$ds_1 = h_1 du_1, \quad ds_2 = h_2 du_2, \quad ds_3 = h_3 du_3$$

（７）線素 ds_1, ds_2, ds_3 によって囲まれる微小体積要素の体積は、du_1, du_2, du_3 およびスケール $h_1, h_2\ h_3$ 次式で与えられる。

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$$

（８）円柱座標系のスケールファクターは、

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_z = 1$$

したがって、微小体積要素は、

$$dV = r dr d\theta dz$$

（９）球座標系のスケールファクターは、

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\phi = r \sin\theta$$

したがって、微小体積要素は、

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

2　直交曲線座標系における微分演算

直交曲線座標系において、その基本単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ および $\boldsymbol{e}_3$、スケールファクター h_1, h_2 および h_3 を用いて表す。

（１）勾配：この座標系におけるスカラー場 $f(u_1, u_2, u_3)$ の勾配は、以下のように表わされる。

$$\nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\boldsymbol{e}_3$$

したがって、

ｉ）円柱座標系では、

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

ii）球座標系では、

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_\phi$$

（2）発散：この座標系におけるベクトル場 $\boldsymbol{f}(u_1, u_2, u_3)$ の成分を、各々、f_1, f_2, f_3 とする。このとき、このベクトルの発散は、以下のように表わされる。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{f} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 f_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 h_1 f_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 f_3)\right]$$

ｉ）円柱座標系では

$$\nabla \cdot \boldsymbol{f} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r f_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

ii）球座標系では、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{f} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta f_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f_\phi}{\partial \phi}$$

（3）回転：この座標系におけるベクトル場 $\boldsymbol{f}(u_1, u_2, u_3)$ の成分を、各々、f_1, f_2, f_3 とする。このとき、このベクトルの回転は、以下のように表わされる。

$$\nabla\times\boldsymbol{f}=\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial\left(h_3f_3\right)}{\partial u_2}-\frac{\partial\left(h_2f_2\right)}{\partial u_3}\right]+\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_3h_1}\left[\frac{\partial\left(h_1f_1\right)}{\partial u_3}-\frac{\partial\left(h_3f_3\right)}{\partial u_1}\right]+\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1h_2}\left[\frac{\partial\left(h_2f_2\right)}{\partial u_1}-\frac{\partial\left(h_1f_1\right)}{\partial u_2}\right]$$

ｉ）円柱座標系では、

$$\nabla\times\boldsymbol{f}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f_z}{\partial\theta}-\frac{\partial f_\theta}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r+\left(\frac{\partial f_r}{\partial z}-\frac{\partial f_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(rf_\theta\right)}{\partial r}-\frac{\partial f_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_z$$

ⅱ）球座標系では、

$$\nabla\times\boldsymbol{f}=\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial\left(r\sin\theta f_\phi\right)}{\partial\theta}-\frac{\partial\left(rf_\theta\right)}{\partial\phi}\right]+\frac{\boldsymbol{e}_\theta}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial f_r}{\partial\phi}-\frac{\partial\left(r\sin\theta f_\phi\right)}{\partial r}\right]+\frac{\boldsymbol{e}_\phi}{r}\left[\frac{\partial\left(rf_\theta\right)}{\partial r}-\frac{\partial f_r}{\partial\theta}\right]$$

（４）ラプラシアン：この座標系におけるスカラー場 $f(u_1,u_2,u_3)$ **に対して、ラプラシアンを演算したものは、**

$$\nabla^2 f=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\right)\right]$$

したがって、

ｉ）円柱座標系では、

$$\nabla^2 f=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ⅱ）球座標系では、

$$\nabla^2 f=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)\right]+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$