高校数学でマスターする

現代制御とディジタル制御

——本質の理解から Mat@Scilab による実践まで——

博士(工学) 小坂 学 著

コ ロ ナ 社

ま　え　が　き

本書は，古典制御について書かれた『高校数学でマスターする制御工学』の続編で，現代制御とディジタル制御と現場の工夫について，前書と高校数学の知識でマスターできるように書かれています。本書を読めば，現代制御で制御器を設計し，それをディジタル化することができます。それをさらにプログラムに書けばマイコンなどで実際に制御実験を行うことができます。ぜひ読んでほしいのは，初めて制御系を設計する卒研生や企業の新人の方々です。前書と同様に，つぎの 3 編に分かれています。

(1) 【わかる（= 方法手順）編】：現代制御とディジタル制御，現場の技術の使い方を書いたマニュアル

(2) 【ナットク（= 理論証明）編】：高校数学で理解できる【わかる編】の理論的裏付け

(3) 【役立つ（= 応用例）編】：【わかる編】のマニュアルに沿った設計例（MATLAB を利用）

これら 3 編を通して，現代制御とディジタル制御をしっかりと自分のものにしてほしいと思います。

筆者は，企業の制御技術者として 10 年間，大学の制御工学の教員として 10 年以上の間，制御工学の研究と教育を続けています。この経験を生かして，わかりやすく，納得でき，そして企業の現場で役立つことを目指して執筆しました。前書と高校の数学の知識で制御系を設計できるように工夫し，懇切丁寧な説明を心掛け，式番号や図番号を参照するときはその式や図が載っているページ番号も並記しています。内容は，企業の現場で役立っているものに厳選し，実例を示しながら実際のモノのイメージが頭に浮かび，物理的な意味を把握できるようにしっかり説明しています。

実際の制御系設計では多くの場合，MATLAB（マトラブと読む）という制御系 CAD ソフトが使われています。本書でも MATLAB の使い方を紹介します。MATLAB の Control System Toolbox, System Identification Toolbox, Robust Control Toolbox を使用します。MATLAB に似たフリーソフトとして SCILAB（サイラブと読む）があります。これに Mat@Scilab（マト・アト・サイラブと読む）というフリーソフトを組み合わせると，本書で扱うすべての MATLAB コマンドを無料で実行して制御を実感することができます。

なお，本書の内容の一部は文部科学省私立大学戦略的研究基盤形成支援事業（平成 24 年～平成 26 年）の助成を受けました。

2015 年 7 月

小坂　学

目　　次

——Part I【わかる編】——

1.　現代制御を「わかる」

2.　ディジタル制御を「わかる」

3.　現場の制御技術を「わかる」

—— Part II【ナットク編】——

4. 【わかる編】を理論的裏付けして「ナットク」する

―― Part III【役立つ編】――

5. MATLABを活用した制御系設計を行って「役立つ」

——Part I【わかる編】——

1 現代制御を「わかる」

ここでは，現代制御理論を理解しよう。

1.1　状態空間表現によるシステムの解析

自転車を時速 20 km で走りたいとき，速度が遅ければペダルを強くこぎ，速すぎれば力をゆるめる。これがフィードバック制御の原理である。制御工学では，自転車を制御対象，ペダルを踏む力 $u(t)$ を**入力**，速度 $y(t)$ を**出力**と呼ぶ。$u(t)$，$y(t)$ の (t) は，時間 t の関数であることを表すが，本書ではまぎらわしくなければ略す。制御対象と入力と出力などのつながりを**システム**という。

古典制御では，伝達関数でシステムを表現して，制御系の解析と設計を行った[†1]。現代制御では，伝達関数の代わりに，状態空間でシステムを表現して制御系の解析と設計を行う。ここでは状態空間を学ぶ。

1.1.1　状態空間表現とは

古典制御では，システムの入力 $u(t)$ と出力 $y(t)$ の関係を表現するために，それぞれのラプラス変換 $U(s)$，$Y(s)$ を求め，その比である伝達関数 $G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}$ を利用した[†2]。現代制御では，$u(t)$ と $y(t)$ の関係を，つぎの連立 1 階微分方程式で表現する。

[†1] 前書『高校数学でマスターする制御工学』の内容は古典制御である。
[†2] 前書『高校数学でマスターする制御工学』の索引「伝達関数」を参照。

$$\text{状態表現}\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) & \leftarrow \text{状態方程式} \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) & \leftarrow \text{出力方程式} \end{cases} \tag{1.1}$$

この式を**状態方程式**，**状態空間表現**，または**状態表現**という。また，上の式を状態方程式，下の式を**出力方程式**と呼び，使い分けることもある。$\boldsymbol{x}(t)$ は縦長の列ベクトルで**状態**または**状態変数**といい，その要素の数 n を**システム次数**または**次数**という[†]。$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)$ は $\boldsymbol{x}(t)$ の時間微分である。$\boldsymbol{A}$ は n 行 n 列 ($n \times n$ と書く) 行列で**システム行列**という (ベクトルと行列の復習は p.117)。

$u(t)$ と $y(t)$ の要素数がどちらも 1 のとき，**1 入出力系** (**単一入出力系，1 入力 1 出力系**) といい，このとき $\boldsymbol{B}$ は縦長の $n \times 1$ 列ベクトル，$\boldsymbol{C}$ は横長の $1 \times n$ 行ベクトル，D は 1×1 の数（スカラ）となる。1 入出力系のとき，式 (1.1) の $\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，D の要素を明示するとつぎのようになる。

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}} u(t) \tag{1.2}$$

$$y(t) = \underbrace{[c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]}_{\boldsymbol{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}(t)} + Du(t) \tag{1.3}$$

a_{ij} は $\boldsymbol{A}$ 行列の i 行 j 列要素である。b_i，c_i，$x_i(t)$ はそれぞれ $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{x}(t)$ の第 i 要素である。状態空間表現の式 (1.1) を略して ($\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$) または

† 本書ではベクトルを矢印記号を用いた $\vec{a}$ ではなく，太字にして $\boldsymbol{a}$ と表す。行列は大文字の太字で $\boldsymbol{A}$ と表す。

$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}$ とも書く。

例題 1.1　**図 1.1** のシステムは質量 $m=0$ のとき，**ばね・ダンパ系**といい，つぎの運動方程式で表される。

$$\underbrace{u(t)}_{\text{外力}} = \underbrace{c\dot{y}(t)}_{\text{ダンパの力}} + \underbrace{ky(t)}_{\text{ばねの力}} \tag{1.4}$$

$u(t)$, $y(t)$ は外力と変位，c, k は粘性摩擦係数とばね定数である†。このシステムを状態空間表現で表そう。

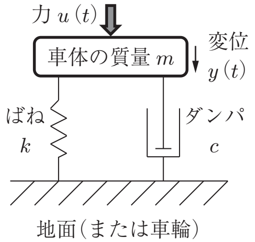

図 1.1　ばね・マス・ダンパ系

【解答】　状態変数 $x(t)$ を

$$x(t) = y(t) \tag{1.5}$$

として式 (1.4) に代入して，両辺を c で割る。

$$\dot{x}(t) = -\frac{k}{c}x(t) + \frac{1}{c}u(t) \tag{1.6}$$

式 (1.5), (1.6) をまとめてつぎの状態空間表現を得る。

$$\dot{x}(t) = \overbrace{-\frac{k}{c}}^{A}x(t) + \overbrace{\frac{1}{c}}^{B}u(t) \tag{1.7}$$

$$y(t) = \underbrace{1}_{C}\cdot x(t) + \underbrace{0}_{D}\cdot u(t) \tag{1.8}$$

式 (1.1) と比較すると，$(A,\ B,\ C,\ D) = \left(-\dfrac{k}{c},\ \dfrac{1}{c},\ 1,\ 0\right)$ である。　◇

例題 1.2　$\dot{y}(t) + 2y(t) = 3u(t)$ の状態空間表現 $(A,\ B,\ C,\ D)$ を $y(t) = x(t)$ として求めよう。

---

† 前書『高校数学でマスターする制御工学』の索引「ばね・ダンパ系」を参照。

【解答】　変形すると $\dot{y}(t) = -2y(t) + 3u(t)$ となる。$y(t) = x(t)$ を代入して $\dot{x}(t) = -2x(t) + 3u(t)$ が得られ，式 (1.1) と比較すると $A = -2,\ B = 3$ である。$y(t) = x(t)$ を式 (1.1) と比較すると $C = 1,\ D = 0$ である。　◇

■　**状態空間表現の伝達関数表現に対するメリット**　　状態空間表現の伝達関数表現に対するメリットはつぎのとおりである。

(1)　多入出力系をより簡単に表現できる。

(2)　伝達関数表現では信号の初期値をすべてゼロと仮定しなければならなかった (p.131 の式 (4.43))。状態空間表現では，その必要がない。

(3)　後述のオブザーバを用いて，状態 $\boldsymbol{x}(t)$ を計算（**観測**という）できる。

(1) について，$\boldsymbol{u}(t)$ と $\boldsymbol{y}(t)$ が複数あるシステムを**多入出力系**という。例えばロボットアームでは，肩，肘，手首のそれぞれの関節を動かすのはモータである。それらへ加える電圧が入力 $u_1(t)$，$u_2(t)$，$\cdots$，$u_m(t)$，それぞれの関節の回転角が出力 $y_1(t)$，$y_2(t)$，$\cdots$，$y_l(t)$ の多入出力系である。これを伝達関数表現で表すとつぎのようになり，伝達関数が $l \times m$ 個必要で多入出力系の扱いはたいへん複雑になる。

$$\left.\begin{aligned} y_1(s) &= G_{11}(s)u_1(s) + G_{12}(s)u_2(s) + \cdots G_{1m}(s)u_m(s) \\ y_2(s) &= G_{21}(s)u_1(s) + G_{22}(s)u_2(s) + \cdots G_{2m}(s)u_m(s) \\ &\ \vdots \\ y_l(s) &= G_{l1}(s)u_1(s) + G_{l2}(s)u_2(s) + \cdots G_{lm}(s)u_m(s) \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

一方，状態空間表現では，$u_1(t), u_2(t), \cdots, u_m(t)$ と $y_1(t), y_2(t), \cdots, y_l(t)$ を縦長の列ベクトルで表せば，式 (1.1) の $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$，$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$ で表現できるのである。つまり，状態空間表現を用いれば，多入出力系と単一入出力系を区別しなくても両者をほぼ同じように扱うことができる。多入出力系の状態方程式 (1.2), (1.3) はつぎのようになる。

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u}(t)} \tag{1.10}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_l(t) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{y}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & \cdots & c_{ln} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{l1} & \cdots & d_{lm} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u}(t)} \tag{1.11}$$

l は出力ベクトル $\boldsymbol{y}(t)$ の要素数，m は入力ベクトル $\boldsymbol{u}(t)$ の要素数である。$\boldsymbol{A}$ のサイズは $n \times n$，$\boldsymbol{B}$ は $n \times m$，$\boldsymbol{C}$ は $l \times n$，$\boldsymbol{D}$ は $l \times m$ である。$l = 1$，$m = 1$ の単一入出力系のとき，式 (1.10), (1.11) は，それぞれ式 (1.2), (1.3) になる。

1.1.2　状態空間表現 $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C},\ \boldsymbol{D})$ を伝達関数 $\boldsymbol{G}(s)$ に変換する

次式で状態空間表現 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ を伝達関数 $\boldsymbol{G}(s)$ に変換できる（p.130）。

$$\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \tag{1.12}$$

$\boldsymbol{I}$ は $\boldsymbol{A}$ と同じサイズ $(n \times n)$ の単位行列 (p.122) である。$\boldsymbol{G}(s)$ の分母多項式の s の次数は，システム次数 (A の行数または列数) n と等しい (p.129 の式 (4.39))。

例題 1.3　つぎの状態空間表現 $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C},\ D)$ を伝達関数 $G(s)$ に変換しよう。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{C} = [0 \quad 1],\ D = 0$$

【解答】　式 (1.12) に代入する。

$$\begin{aligned}
G(s) &= \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + D \leftarrow \boldsymbol{I}\ \text{は}\ \boldsymbol{A}\ \text{と同じサイズの単位行列 (p.122)} \\
&= [0 \quad 1]\left(s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \leftarrow \text{行列の定数倍は p.120} \\
&= [0 \quad 1]\begin{bmatrix} s-0 & 0-2 \\ 0-1 & s-(-3) \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{行列の引き算は p.119} \\
&= [0 \quad 1]\frac{1}{s(s+3)-(-2)(-1)}\begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ 1 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{逆行列は p.124 の式 (4.26)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [0 \quad 1] \frac{1}{s^2+3s-2} \begin{bmatrix} (s+3)\cdot 5 + 2\cdot 0 \\ 1\cdot 5 + s\cdot 0 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{行列の掛け算は p.121 の式 (4.16)} \\
&= \frac{1}{s^2+3s-2} [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 5\,(s+3) \\ 5 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s^2+3s-2} \left(0\cdot 5\,(s+3) + 1\cdot 5\right) \\
\therefore \quad & G\,(s) = \frac{5}{s^2+3s-2}
\end{aligned}
$$

◇

1.1.3　あるシステムを表す $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ の組合せは無限にある

あるシステムを表す伝達関数 $G\,(s)$ は，$G\,(s)$ の分子・分母が約分されていれば一つしかない。しかし状態表現の場合，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ の組合せは無限にあることをこれから示す。$\boldsymbol{A}$ と同じサイズで，要素が実数で定数の行列 $\boldsymbol{T}$ を導入する。$\boldsymbol{T}$ はその逆行列 $\boldsymbol{T}^{-1}$ が存在するように選ぶ (逆行列は p.124)。p.2 の式 (1.1) の状態方程式 $\dot{\boldsymbol{x}}\,(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\,(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\,(t)$ に $\boldsymbol{T}$ を左から掛ける。

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{x}}\,(t) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\,(t) + \boldsymbol{T}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\,(t) \\
&\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{x}}\,(t) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}\right)\boldsymbol{x}\,(t) + \boldsymbol{T}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\,(t) \qquad \leftarrow \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{I} \text{ より} \\
&\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{x}}\,(t) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}\,(t) + \boldsymbol{T}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\,(t) \qquad (1.13)
\end{aligned}
$$

式 (1.1) の出力方程式に $\boldsymbol{x}\,(t) = \left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}\right)\boldsymbol{x}\,(t)$ を代入する。

$$
\boldsymbol{y}\,(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}\,(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}\,(t) \qquad (1.14)
$$

式 (1.13) と式 (1.14) に

$$
\overline{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}\,(t) \ \leftarrow \overline{\boldsymbol{x}} \text{ はエックスバーと読む} \qquad (1.15)
$$

$$
\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1}, \quad \overline{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{B}, \quad \overline{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}^{-1} \qquad (1.16)
$$

を代入して，つぎの状態表現を得る。

$$\begin{cases} \dot{\overline{\boldsymbol{x}}}(t) = \overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{x}}(t) + \overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \overline{\boldsymbol{C}}\overline{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \end{cases} \tag{1.17}$$

この変換を**同値変換** (または線形変換，状態変数変換) という。システム $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ を $(\overline{\boldsymbol{A}}, \overline{\boldsymbol{B}}, \overline{\boldsymbol{C}}, \boldsymbol{D})$ に変換しても $\boldsymbol{u}(t)$ と $\boldsymbol{y}(t)$ はそのままで変わっていない。したがって，両者は $\boldsymbol{u}(t)$ と $\boldsymbol{y}(t)$ に関してまったく同じシステムである。$\boldsymbol{T}$ はその逆行列が存在すればどう選んでもよいので，あるシステムを表す状態表現 (式 (1.17)) は無限に存在する。

1.1.4　伝達関数 $G(s)$ を状態空間表現 $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C},\ D)$ に変換する

入力 $u(t)$ と出力 $y(t)$ の関係が，つぎの微分方程式で表される 1 入出力系を考える。

$$\begin{aligned} & y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) \\ &= b_k u^{(k)}(t) + b_{k-1}u^{(k-1)}(t) + \cdots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t) \end{aligned} \tag{1.18}$$

$y^{(i)}(t)$ は $y(t)$ の i 階微分，a_i，b_i は実数の定数であり，$n \geqq k$ である。古典制御では，このシステムをつぎの伝達関数 $G(s)$ で表した[†]。

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_k s^k + b_{k-1}s^{k-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{1.19}$$

$n > k$ のとき，このシステムの状態空間表現 $(\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u,\ y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + Du)$ の一つは次式で与えられる (p.131)。

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & & \boldsymbol{I} & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}} u(t) \tag{1.20}$$

† 前書『高校数学でマスターする制御工学』の 2.3.3 項を参照。

$$y(t) = \underbrace{[\overbrace{b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_k}^{k+1\text{ 個}} \quad \overbrace{0 \quad \cdots \quad 0}^{n-(k+1)\text{ 個}}]}_{\boldsymbol{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}(t)} \leftarrow D = 0 \qquad (1.21)$$

式 (1.20) の $\boldsymbol{A}$ 行列内の $\boldsymbol{I}$ は $(n-1)$ 次の単位行列 (p.122) である。式 (1.20), (1.21) の状態空間表現を 1 入出力系の**可制御正準形**（かせいぎょせいじゅんけい） (可制御標準形) という。この変換より，$G(s)$ の分母多項式の s の次数 n と，システム次数 ($\boldsymbol{A}$ の行数または列数) とは等しいことがわかる。ある状態表現 ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, D) を可制御正準形に変換する方法を p.140 で説明する。

$n = 3$ のときの式 (1.19)～(1.21) はつぎのようになる。

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \qquad (1.22)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad (1.23)$$

$$y(t) = [b_0 \quad b_1 \quad b_2] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \qquad (1.24)$$

このときのブロック線図を**図 1.2** に示す。積分記号 $\int$ のブロックは入力の時間積分を出力する。図より，可制御正準形は a_i と b_i がすべてゼロでも，$\boldsymbol{x}$ は u とつながっているため，u で $\boldsymbol{x}$ を動かすことができる。これの意味することの詳細を後述の可制御で説明する。

$n = 2$ のときの式 (1.19)～(1.21) はつぎのようになる。

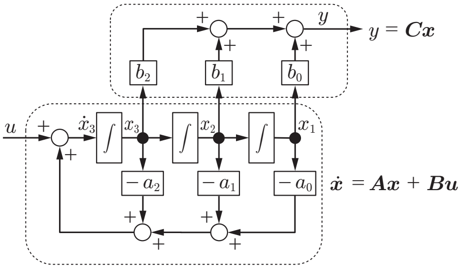

図 1.2　可制御正準形のブロック線図 (式 (1.23), (1.24))

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{1.25}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{1.26}$$

$$y(t) = [b_0 \quad b_1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{1.27}$$

$n = 1$ のときの式 (1.19)〜(1.21) はつぎのようになる。

$$G(s) = \frac{b_0}{s + a_0} \tag{1.28}$$

$$\dot{x}_1(t) = -a_0 x_1(t) + 1 \cdot u(t) \tag{1.29}$$

$$y(t) = b_0 x_1(t) \tag{1.30}$$

$n = k$ のときは，$G(s)$ の分母多項式の次数 n と分子多項式の次数 k が等しくなる。このとき式 (1.21) の $\boldsymbol{C}$，D をつぎのように置き換える。

$$\boldsymbol{C} = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n-1}] - b_n [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_{n-1}] \tag{1.31}$$

$$D = b_n \tag{1.32}$$

例題 1.4　つぎの伝達関数 $G(s)$ を，可制御正準形の状態表現 ($\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，D) に変換しよう。

(1)　$G(s)=\dfrac{4s^2+4s+8}{2s^3+4s^2+6s+1}$

(2)　$G(s)=\dfrac{2s^3+4s^2+4s+8}{2s^3+4s^2+6s+1}$

【解答】　(1)　式 (1.22) の分母多項式の最高次数の項 s^3 の係数は 1 である。$G(s)$ もそうなるように分子分母を 2 で割り，a_0, b_0 などを求める。

$$G(s)=\frac{\overbrace{2}^{b_2}s^2+\overbrace{2}^{b_1}s+\overbrace{4}^{b_0}}{s^3+\underbrace{2}_{a_2}s^2+\underbrace{3}_{a_1}s+\underbrace{0.5}_{a_0}}$$

a_0, b_0 などを式 (1.23), (1.24) に代入して ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, D) を求める。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-a_0&-a_1&-a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-0.5&-3&-2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=[b_0\quad b_1\quad b_2]=[4\quad 2\quad 2],\quad D=0$$

(2)　$G(s)$ の分母が (1) の $G(s)$ と同じなので $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ は同じである。$G(s)$ の分子・分母を 2 で割ると $b_3=1$ で, b_0, a_0 などは (1) と同じである。$G(s)$ の分子・分母の次数がどちらも 3 で等しいので, 式 (1.31), (1.32) に代入して $\boldsymbol{C}$, D を求める。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}&=[b_0\quad b_1\quad b_2]-b_3[a_0\quad a_1\quad a_2]=[4\quad 2\quad 2]-1\cdot[0.5\quad 3\quad 2]\\&=[4-0.5\quad 2-3\quad 2-2]=[3.5\quad -1\quad 0]\\D&=b_3=1\end{aligned}$$

◇

例題 1.5　つぎの運動方程式で表されるばね・マス・ダンパ系 (p.3 の図 1.1) を可制御正準形で表し，状態 $x(t)$ を得るために必要なセンサを考えよう。

$$\underbrace{u(t)}_{\text{外力}}=\underbrace{m\ddot{y}(t)}_{\text{慣性力}}+\underbrace{c\dot{y}(t)}_{\text{ダンパの力}}+\underbrace{ky(t)}_{\text{ばねの力}}$$

$u(t)$, $y(t)$ は外力と変位，m, c, k はそれぞれ質量，粘性摩擦係数，ばね定数である†。

---

† 前書『高校数学でマスターする制御工学』の索引「ばね・マス・ダンパ系」を参照。

索　　引

【の】

【は】

【ひ】

【ふ】

【へ】

【ほ】

【ま】

【む】

【め】

【も】

【ゆ】

【よ】

【ら】

【り】

【れ】

【ろ】

【わ】

【A】

【B】

—— 著 者 略 歴 ——

1989 年　大阪府立大学工学部電子工学科卒業
1991 年　大阪府立大学大学院工学研究科博士前期課程修了（電子工学専攻）
1991 年　ダイキン工業株式会社 電子技術研究所
～01 年
1999 年　大阪府立大学大学院工学研究科博士後期課程修了（電気情報系専攻）
　　　　博士（工学）
2001 年　近畿大学講師
2006 年　近畿大学助教授
2011 年　近畿大学教授
　　　　現在に至る

高校数学でマスターする　**現代制御とディジタル制御**
——本質の理解から **Mat@Scilab** による実践まで——
Modern Control and Digital Control Based on High School Math
——From the Essence to the Practice Using Mat@Scilab——

2015 年 9 月 25 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

著　者　小坂（こさか）　学（まなぶ）
発 行 者　株式会社　コ ロ ナ 社
　　　　代 表 者　牛 来 真 也
印 刷 所　三 美 印 刷 株 式 会 社

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発行所　株式会社　コ　ロ　ナ　社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ　http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–03218–5　（横尾）　（製本：愛千製本所）
Printed in Japan

落丁・乱丁本はお取替えいたします