

量子力学や相対論を代表とする近代物理の前の、連続体力学・電磁気学といった古典物理は、さまざまな数理の手法の発展を促し、一方、数理の理論の構築は、古典物理の新しい扱い方をもたらした。この物理と数理の蜜月ともいえる時代は、第3の研究手法である数値計算によって終焉した。コンピュータの発展とともに、それ以前は想像もできなかった数の物理の問題が、数理の手助けを直接借りることなく解けるようになったのである。

現在、工学分野で数理が果たすべき役割は、物理を記述することと、物理と数値計算を橋渡しすることである。記述という役割は従来からあるが、橋渡しという役割は新しい。数値計算を正しく行い、結果を正しく解釈するために不可欠である。本書では、物理的な現象を数の世界に対応させるという観点に立って、この二つの役割を説明する。記述と橋渡しという役割は異なるものの、この観点に立てば、これらの二つの役割は、物理現象を数として表し、実際に計算できるようコンピュータに数を与える、ということである。

コンピュータは、所詮、四則演算しかできない。物理現象を解釈することも理解することもけっしてできない。このようなコンピュータを利用するためにわれわれがすべきことは、物理現象を四則演算ができる数の世界に対応させ、そして実際に計算させるコードを書くことである。物理現象を数として記述し、実際に計算するために、コンピュータに数を与える、という数理の二つの役割はまさにこのためである。

本書は物理的な現象を数の世界に対応させるという観点に立つ。そこで、本書の構成もこの観点に従う。まず、ベクトル量と関数という古典物理の基本的

な対象が、まったく同じ方法を使うことで、数の空間に対応することを説明する。ベクトル量の拡張としてテンソル量、関数の高度な問題として微分方程式を説明する。つぎに、古典物理の問題をコンピュータを使って解く際に基本となる、マトリクス方程式と数値微分・数値積分を説明する。最後に、古典物理に関わる若干高度な内容を説明する。具体的には、安定・不安定、分岐、摂動、確率の四つである。それぞれ内容は異なるが、物理的な現象を数の世界に対応させるという共通の観点に立った説明を心がける。

2012年7月

著 者

## 第 I 部 準 備

### 1 章 計測の観点からみた線形空間

---

- 1.1 計 測 3
- 1.2 ベクトル量と関数の計測 4
- 1.3 線形空間と数の空間の同一視 5

### 2 章 ベクトル量とベクトル

---

- 2.1 ベクトル量の復習 8
- 2.2 ベクトル量の線形空間と同一視される数の空間 9
- 2.3 線形空間の基底 11
- 2.4 ベクトル量の座標変換 12
- 2.5 線形作用素とマトリクス 14
- 演 習 問 題 16

### 3 章 関数とフーリエ級数展開

---

- 3.1 フーリエ級数展開の導入 18
- 3.2 線形空間の枠組みでみたフーリエ級数展開 20
- 3.3 フーリエ級数展開と微分作用素 22
- 演 習 問 題 26

## 第 II 部 テンソル量

**4** 章 ベクトル量とテンソル量

- 4.1 計測の観点からみたベクトル量とテンソル量 29  
4.2 ベクトル量とテンソル量の座標非依存性 31

**5** 章 テンソル量とテンソル

- 5.1 テンソル量に対応するテンソル 36  
5.2 テンソルの座標変換 37  
5.3 テンソル量の座標非依存性 39  
5.4 ベクトル量の勾配とテンソル量の発散 41  
演 習 問 題 44

## 第 III 部 微分方程式

**6** 章 微分方程式の基礎

- 6.1 微分方程式の概要 49  
6.2 微分方程式の解法 50  
6.3 微分方程式の解の性質 53  
6.4 微分方程式の拡張 57  
演 習 問 題 60

**7** 章 常微分方程式

- 7.1 関数の離散化 62  
7.2 微分作用素の離散化 65  
演 習 問 題 69

## 8 章 偏微分方程式

---

- 8.1 偏微分方程式の概要 71
- 8.2 フーリエ級数展開を使った偏微分方程式の解法 72
- 8.3 関数空間に基づく偏微分方程式の解法 74
- 8.4 グリーン関数 78
- 演習問題 79

### 第 IV 部 数値計算の話題

## 9 章 マトリクス方程式の解法

---

- 9.1 1 次マトリクス方程式の解法 83
  - 9.1.1 直接法 83
  - 9.1.2 定常反復法 85
  - 9.1.3 非定常反復法 87
- 9.2 固有値問題の解法 90
- 演習問題 92

## 10 章 数値微分と数値積分

---

- 10.1 数値微分 95
- 10.2 数値積分 97
  - 10.2.1 ニュートン-コーツ型数値積分 97
  - 10.2.2 ガウス-ルジャンドル型数値積分 98
  - 10.2.3 モンテカルロ型数値積分 101
- 演習問題 102

## 第 V 部 高度な話題

**11** 章 安定・不安定

- 11.1 時間に関する微分方程式 107  
 11.2 一定値をとる解の安定・不安定 108  
 11.3 初期値問題の解の安定・不安定 113  
 演習問題 114

**12** 章 分 岐

- 12.1 解の唯一性 116  
 12.2 梁-柱の座屈問題 117  
 12.3 座屈問題の解の分岐 119  
 演習問題 122

**13** 章 摂 動

- 13.1 漸近展開 124  
 13.2 摂動展開 125  
 13.3 特異摂動展開 127  
 演習問題 131

**14** 章 確 率

- 14.1 ばらつきの評価の観点からみた確率 133  
 14.2 確率変数の組み 134  
 14.3 確率関数 140  
 演習問題 144

引用・参考文献 146

演習問題解答 148

索 引 175

# 1 章

## 計測の観点からみた線形空間

### ◆本章のテーマ

物理量には、さまざまなものがある。共通するのは計測できる点である。数理では、計測できる物理量を適当な線形空間の要素としてまったく同じように扱う。物理量を計測するという観点からみた、数理の概念である線形空間を説明する。

### ◆本章の構成（キーワード）

#### 1.1 計測

具体的な物理量，抽象的な数

#### 1.2 ベクトル量と関数の計測

スカラー量，ベクトル，関数，マトリクス

#### 1.3 線形空間と数の空間の同一視

線形空間，数の空間

### ◆本章を学ぶと以下の内容をマスターできます

- ☞ 計測できる量には線形性があること
- ☞ ベクトル量や関数の線形空間と数の空間は同一視できること

## 1.1 計 測

土木工学・環境工学の基礎学問の一つである物理学は、計測できる量を対象とした学問である。計測とは、もちろん量を測ることである。計測する量は、長さや重さなど、物理次元の異なる量であり、異なる道具を使って測ることになる。長さを測るためには物差し、重さを測るためには秤を使う。しかし、計測の道具は異なるものの、いったん量を計測して得られた数に対しては、足し算やかけ算など、共通の処理を施すことができる。

数の処理は、土木工学・環境工学の基礎学問の一つである数学で培われた方法である。暗算や筆算のように頭や紙と鉛筆を使う数の処理もあるが、電卓やコンピュータのような道具を使う場合もある。ここで注意しなければならない点は、量を計測するための道具は対象に応じて選ばなければならないものの、いったん量を計測して得られた数の処理は、特に道具を選ばないことである。電卓やコンピュータは、長さや重さの計測された量に対して共通で用いることができる。長さ用の電卓や重さ用のコンピュータというものはない。

異なる道具で計測された物理量に対して共通の道具を使って数の処理を施せることは、当たり前といえば当たり前であるが、よく考えてみると単純ではない。じつは高度な抽象化が行われているのである。「3mの棒に5mの棒を足せば、棒の長さは8mになる」ということと、「桶にある3kgの水に5kgの水を足すと、8kgである」ということは、当然すぎるくらい当然であるが、じつは、実体のある物理量を、共通の数に変換する操作が陰で行われている。この数は、棒の長さや桶の水の重さのような物理量に対応しているだけで、実体はない。この意味で、実体のある物理量を具体的な量とすれば、数は抽象的な量と考えることができる。

具体的な物理量を抽象的な数に換えて処理を施すことは、ピンとは来ないかもしれないが、計測の観点でみれば、じつは重要である。数の処理の結果はつねに正しいからである。3mの棒に5mの棒を足せば、その長さは8mなのである。再度、継ぎ足された棒を計測する必要はない。必要があるとすれば、そ



れはもとの棒が確かに3mと5mであることを確認するための計測である。重さも同様で、3kgの水に5kgを加えれば、再度計測することなく、桶にある水は8kgなのである。

## 1.2 ベクトル量と関数の計測

計測できる物理量には、長さや重さのようなスカラー量だけではなく、風速のようなベクトル量も含まれる。ベクトル量を計測すると、計測の結果として数のベクトルが得られる。一度ベクトル量である風速を計測して数のベクトルとしておけば、数の処理を施すことで、絶対に間違いのない予想をすることができる。なお、風速が物理量であることを強調するため、本書では「量」を付けて「ベクトル量」と称し、数のベクトルはそのままベクトル (vector) と称することにする。

上記の区別は厳密すぎるかもしれない。実際、土木工学・環境工学の分野で、物理量であるベクトル量と数のベクトルを区別することは稀である。しかし、本書ではあえてこの区別を行う。区別はするが、計測によってベクトル量をベクトルに対応させることができるという考え方をする。計測の観点に立てば、この考え方は自然である。

さて、同じベクトル量である風速に対しても、異なる人が計測すると結果は異なる。これは、計測する人は、おのおのの前後・左右という方向で風速の成分を測る場合を想定しているためである。前後・左右という計測者によって異なる方向を使う混乱を避けるため、通常は東西・南北という方向に成分を変換するが、風速の自然な測り方は計測者の前後・左右という方向である。

計測できる物理量には、時間や空間によって変化する関数も含まれる。室温や風速のように時間変化する関数や、地価や物流のように空間変化する関数である。同じ関数という名前を使うが、計測できる関数は、多項式のような関数とは違い、計測して初めてわかる関数である。関数の計測結果はもちろん、数の組みみであるベクトルとなるのである。本書では、この意味で、計測によって

関数をベクトルに対応させるという考え方をする。いったんベクトルに対応させれば、ベクトル量の場合と同様に、共通の数の処理を施すことができる。数の処理の結果、再度計測しなくとも、物理量を推測することができるのである。

ベクトル量と違い、関数に対しては、微分のような演算をすることがある。実際、土木工学・環境工学で使われる物理法則は、計測できる関数の微分方程式という形で表記されている。関数に対してベクトルが対応するように、関数の演算に対しても対応するものがある。微分であれなんであれ、関数の演算が線形であれば、それは関数に対応したベクトルに適当なマトリクスをかけることに対応する。線形の詳細な説明は後にするが、線形の演算に対しては、マトリクスが対応するのである。これは、じつは大きな意義を持つ。ベクトルとマトリクスの演算はコンピュータがきわめて得意とする演算なのである。例えば、著者がベクトルとマトリクスの積を計算する場合、筆算では2次元のベクトルと $2 \times 2$ のマトリクスの積の計算が限界である。3次元のベクトルと $3 \times 3$ のマトリクスの積の計算には電卓が必要である。しかし、コンピュータを使うと、100万を超える次元のベクトルとマトリクスの積も秒単位で計算できる。

### 1.3 線形空間と数の空間の同一視

本書では、計測できる物理量を要素とする集合を線形空間 (linear space) と称する。例えば、棒の長さの線形空間  $V$  とは、要素が棒の長さとなっている集合である。この線形空間に数の空間  $R$  を対応させることが計測である。 $V$  と  $R$  を使って記述し直すと、つぎのようになる。 $V$  の二つの要素  $a$  と  $b$  に対して長さを計測すると  $3\text{m}$  と  $5\text{m}$  である場合、 $a$  と  $b$  は  $R$  の要素  $x = 3$  と  $y = 5$  に対応することになる。 $z = x + y$  とすると  $z = 8$  であるから、 $R$  の空間の  $z$  に対応する  $V$  の空間の要素  $c$  は長さ  $8\text{m}$  である。すなわち、 $a$  と  $b$  を継ぎ足すと長さ  $8\text{m}$  の棒  $c$  となるのである (図 1.1 参照)。

重要な点は、継ぎ足した棒の長さを再度計測する必要はないことである。線形空間の要素を数の空間の要素である数に対応させると、数の処理をするだけ

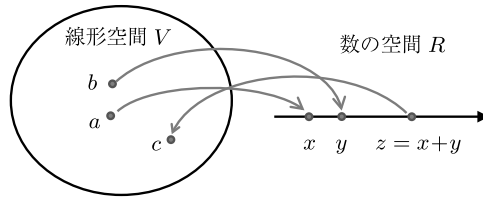


図 1.1 棒の線形空間  $V$  と対応する数の空間  $R$

で、もとの線形空間での要素がわかる。そして、再計測の手間を省くことができるのである。

上の例はきわめて単純であり、さほどの利点があるようには思われない。しかし、前節で述べたように、ベクトル量や関数のような物理量に対しても線形空間を考えることができ、その線形空間の要素を数の空間の要素に対応させることができるのである。もちろんこの数の空間は、図 1.1 に示された数直線、すなわち  $R$  ではなく、数のベクトルを要素とする高次元の数の空間である。しかし、計測によって、物理量の線形空間の要素に対し、ベクトルを対応させることはできるのである。本書は、これを「物理量の線形空間と数の空間を同一視する」と称する。具体的な物理量を抽象的な数の空間と同一視し、数の空間において数の処理を使うことで、計測していない物理量や計測できない物理量を推測できるようになる。面倒な計測の省略は大きな利点である。なお、数の処理に必要とされる計算量は、特に関数の場合、人間の手に余ることがある。しかし、コンピュータを利用することで、大規模な計算が必要となる数の処理もこなせるようになってきている。

# 索引

<b>【お】</b>		<b>【さ】</b>		線形空間	
オイラーの公式		座標変換		linear space	5, 8, 31
Euler's formula	53	coordinate transformation	14	線形作用素	
<b>【か】</b>		差分		linear operator	14, 23
確率関数		finite difference	50	前進差分	
probability function	141	<b>【し】</b>		forward difference	95
確率変数		実数		前進消去	
random variable	134	real number	110	forward elimination	85
関数空間		写像 (作用素を使った —)		<b>【そ】</b>	
functional space	18	mapping	14	相関係数	
<b>【き】</b>		縮約		correlation coefficient	135
基底		contraction	36	<b>【た】</b>	
base	10	主成分		対角マトリクス	
共役勾配法		principal component	33	diagonal matrix	67
conjugate gradient method	87	常微分方程式		台形公式	
境界条件		ordinary differential equation	62	Trapezoidal rule	98
boundary condition	72	初期条件		単位ベクトル	
境界値問題		initial condition	50	unit vector	9
boundary value problem	22	初期値問題		<b>【ち】</b>	
<b>【く】</b>		initial value problem	50	中心差分	
グリーン関数		<b>【す】</b>		central difference	96
Green's function	78	数値積分		直交性	
<b>【こ】</b>		numerical integration	97	orthogonality	12
後退差分		数値微分		<b>【て】</b>	
backward difference	95	numerical differentiation	95	テイラー展開	
後代入		<b>【せ】</b>		Taylor expansion	56, 95
backward substitution	85	摂動展開		テンソル	
勾配		perturbation expansion	126	tensor	29
gradient	41	漸近展開		テンソル積	
固有値問題		asymptotic expansion	124	tensor product	32
eigenvalue problem	90	線形		転置	
固有ベクトル		linear	53	transpose	9
eigenvector	39				

	<b>【と】</b>	微分方程式 differential equation	49	偏微分 partial differential	42
特異摂動 singular perturbation	128	ピボット pivot	85	偏微分方程式 partial differential equation	71
	<b>【な】</b>	<b>【ふ】</b>		<b>【ま】</b>	
内積 inner product	21	フーリエ級数展開 Fourier series expansion	17	前処理 preconditioning	89
	<b>【は】</b>	複素数 complex number	110	マトリクス方程式 matrix equation	83
発散 divergence	42	分岐 bifurcation	115	<b>【り】</b>	
反復法 iterative method	83			離散化 discretization	62
	<b>【ひ】</b>	<b>【へ】</b>		<b>【れ】</b>	
非線形 nonlinear	53	べき乗法 power method	91	連続体力学 continuum mechanics	29
微分作用素 differential operator	23	ベクトル vector	4		
		変数分離 separation of variables	122		

—— 著者略歴 ——

堀 宗朗 (ほり むねお)

1984 年 東京大学工学部土木工学科卒業

1985 年 ノースウエスタン大学大学院土木  
工学科修士課程修了

1987 年 カリフォルニア大学サンディエゴ校  
応用力学基礎工学科博士課程修了  
Ph.D. (Applied Mechanics)

1990 年 東北大学講師

1992 年 東京大学助教授

2001 年 東京大学教授  
現在に至る

市村 強 (いちむら つよし)

1998 年 東京大学工学部土木工学科卒業

1999 年 東京大学大学院工学系研究科修士  
課程修了 (社会基盤工学専攻)

2001 年 東京大学大学院工学系研究科博士  
課程修了 (社会基盤工学専攻)  
博士 (工学)

2001 年 東北大学助手

2005 年 東京工業大学助教授

2009 年 東京大学准教授  
現在に至る

## 土木・環境系の数学

— 数学の基礎から計算・情報への応用 —

Introduction to Mathematics of Civil and Environmental Engineering

© Muneo Hori, Tsuyoshi Ichimura 2012

2012 年 9 月 3 日 初版第 1 刷発行

検印省略

著 者 堀 宗 朗

市 村 強

発 行 者 株式会社 コロナ社

代 表 者 牛 来 真 也

印 刷 所 三 美 印 刷 株 式 有 限 公 司

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発 行 所 株式会社 コロナ社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844・電話 (03)3941-3131 (代)

ホームページ <http://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-05602-0 (中原) (製本:愛千製本所) G

Printed in Japan



本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上の例外を除き禁じられております。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めておりません。

落丁・乱丁本はお取替えいたします