ま え が き

本書の内容は「安定化フィードバック制御ならびに最適化フィードバック制御の理論」である。制御目的の根幹は安定化と最適化であり，その制御方式の本質はフィードバックということである。したがって，この本は制御問題の最も基本的な課題を取り扱っているといえる。線形システムの制御についてはすでに多くのテキストが出版されているので，本書では主として非線形システムのフィードバック制御を考える。この本は理論を主体に書かれているが，各章のテーマはみな具体的に制御則のシンセシスが可能であり，実際に応用可能なものばかりである。

本書の内容構成は以下のようになっている。1 章ではフィードバック制御の概要を述べる。2〜7 章は安定化フィードバック制御，8〜11 章は最適化フィードバック制御についての記述である。最後の 12 章では PID 制御とその拡張である P·SPR·D+I 制御を解説する。各章とも，主としてレギュレータ問題と設定点サーボ問題にテーマを絞り，ロバスト制御，適応制御などは割愛した。

以下，2 章以降の内容を簡単に紹介しよう。2 章では非線形制御システムの基礎理論として，まず非線形システムの線形化ならびに可安定性について説明する。つぎに非線形システムの性質として標準形と零ダイナミクス，最小位相系，厳密線形化などを解説し，状態フィードバックと高ゲイン出力フィードバックについて記述する。さらに，入出力安定性に関して L_p 安定を解説し，フィードバック系の入出力安定と小ゲイン定理を述べる。

3 章では非線形システムの安定性理論であるリアプノフ定理を紹介し，リアプノフ直接法に基づく安定化制御について述べる。また，リアプノフ直接法の一般化である LaSalle の不変性原理を説明する。さらに，最近の話題である制御リアプノフ関数やバックステッピング法を紹介する。

4 章では，システムの消散性と受動性を定義し，受動性理論に基づく非線形システムの安定化制御について考える。すなわち，受動性判別のための Kalman-Yakubovich-Popov 特性やフィードバック系の L_p 安定を与える受動定理やポポフの定理などを紹介する。

5 章では，直接勾配降下制御と呼ばれる関数空間における勾配降下法に基づく一般非線形システムの安定化制御法について述べる。直接勾配降下制御は最も一般性のある制御方式だが，簡便でわかりやすく，広く応用できる。

6 章は中心多様体理論に基づく漸近安定化制御の話である。よく知られているように，線形化システムが虚軸上に固有値を有するシステムは，その線形化システムからは局所的にも安定性すら論じることができない。しかし，中心多様体理論の導入によって，このようないわゆるクリティカルケースの安定化を解析できる。ここでは，中心多様体写像を用いて，標準の非線形レギュレータ問題ならびに非線形サーボ問題（非線形出力レギュレーション問題）を解く。

以上，2〜6 章は状態フィードバックを前提に論じたが，7 章は出力フィードバックによる安定化制御を考察する。初めに線形多変数システムの出力フィードバックによる任意固有値配置問題を考え，つぎにアフィン非線形システムの安定化制御のための高ゲイン出力フィードバック定理を述べる。

本書の後半では，非線形システムの最適化フィードバック制御について解説する。従来の最適制御の理論と計算法はほとんど開ループ系における最適制御入力を時間関数としてシンセシスするものであったが，ここでは制御入力を状態の関数として与える最適状態フィードバック制御則の研究に限って述べる。

8 章では，前段として，古典的な変分法に基づく最適制御理論を簡単に述べる。そして，ポントリャーギンの最小原理を紹介する。また制御入力に関する評価汎関数の勾配関数を導出し，直接的に最適性条件を誘導する理論を述べる。

9 章では，一般非線形システムにおける最適化フィードバック制御の最重要理論であるハミルトン-ヤコビ方程式について述べる。ハミルトン-ヤコビ方程式は Bellman のダイナミックプログラミング（動的計画法）から誘導される。そして，ハミルトン-ヤコビ方程式の解である値関数を使って最適化フィード

バック制御則を陽的に表現することができる。また，最適制御の基本的な必要条件であるハミルトン-ヤコビの正準系を誘導する。

10 章では，線形システムの線形 2 次形（LQ）最適レギュレータ問題と，そのリカッチ方程式に基づく最適化フィードバック制御則のシンセシスを説明する。

11 章では，非線形最適レギュレータ問題に対する定常ハミルトン-ヤコビ方程式の解析を行い，その可解性と安定化解の性質を解説する。また，ニューラルネットによるハミルトン-ヤコビ方程式の近似解法を述べる。

最後の 12 章では，現場で広く利用されている PID 制御を現代制御論の立場から論じる。従来からよく知られているスカラ系（1 入力 1 出力システム）の PID 制御の話は割愛して，主として線形多変数システムと非線形システムの PID 制御ならびに P·SPR·D+I 制御による安定化を解説する。ここでは，従来の P, I, D 機能に SPR（strict positive real; 強正実）機能を追加することによって，安定化機能を大幅に改善できることを示す。そして，線形多変数システムの PID 制御による固有値配置や P·SPR·D+I 制御による漸近安定化，さらに時間遅れシステムの P·SPR·D+I 制御やアフィン非線形システムの P·SPR·D 制御による安定化などを解説する。

以上が非線形システムの「安定化フィードバック制御ならびに最適化フィードバック制御の理論」のあらすじである。本書は理工学部専門課程と大学院の学生，ならびに第一線の制御技術者を対象に書かれた専門書である。内容的にかなり高度ではあるが，全般に自己充足的な記述になっており，微分方程式と線形代数の基礎知識ならびに線形制御理論の初等的な知識があれば理解できるように配慮されている。また，ほとんどの定理に証明を与えた。非線形制御全般を解説した和書は少ないので，現代制御論を活用して非線形システムの制御の研究・開発・応用を志す人々の参考書になれば幸いである。

本書の執筆にあたり，多々ご協力いただいた慶應義塾大学理工学部システム制御研究室の学生諸君ならびにコロナ社の諸氏に深く感謝の意を表します。

2013 年 9 月

たまプラーザにて　　志水　清孝

目　　　次

1.　フィードバック制御とは

2.　非線形制御システムの基礎理論

3.　リアプノフの安定理論に基づく安定化制御

4.　受動性理論に基づく安定化制御

5.　直接勾配降下制御

6.　中心多様体に基づく安定化制御

7.　出力フィードバックによる安定化制御

8.　最適制御の基礎理論

9.　最適制御とハミルトン–ヤコビ方程式

10. 線形最適レギュレータ問題とリカッチ方程式

11. 非線形最適レギュレータとハミルトン–ヤコビ方程式

12.　PID 制御と P·SPR·D+I 制御

1 フィードバック制御とは

1.1 フィードバック制御系の構成

システムの制御とは，システムをうまく操作することによってシステムの応答を「所望の値」に一致させることである。一般にシステムに入ってくる量（つまり変数）を入力，システムから出ていく量（変数）を出力と呼ぶ。システムを制御するとき操作できる量を**操作量**（manipulated variable）または**制御入力**（controlling input）といい，この入力によって決まるシステムの応答を**制御量**（controlled variable）または**制御出力**（controlled output）という。また，人為的に操作できないものを**外乱**（disturbance）という。

制御の基本的な目的は，システムの出力が**目標値**（reference）にできるだけ一致するようにシステムの入力の値を決めることである。システムの出力を時間的に変化する目標値に追従させるような制御を**追従制御**（tracking control）といい，どのような外乱が入ってきても，システムの出力を時間的に一定な目標値に一致させるような制御を**定値制御**（ constant-value control; regulation control）という。一般に機械を意のままに動かしたいサーボ系では追従制御が行われ，外乱が入ってきたり，制御対象の動特性が変化しても出力を一定値に保つことが望まれるプロセス制御では定値制御を行うことが多い。

自動制御のおもな目的は，以下の 4 点に絞られる[3)†]。

(a)　制御対象の安定化

† 肩付き番号は章末の引用・参考文献を示す。

(b)　出力の目標値への追従（定常状態および過渡状態）

(c)　外乱の影響の抑制

(d)　特性変動による影響の抑制

これらの目的を達成するために，いろいろな制御方式が考案されている。

目標値が与えられたとき，これを達成する制御入力を与える装置を**制御器**（controller）あるいは**補償器**（compensator）という。制御器は出力または状態を情報として利用し，望ましい制御入力を生成する。

実際の制御システムにおいては，**図 1.1** に示すように，制御入力（操作量）は制御器で生成される制御信号に基づき操作器（アクチュエータ）で作り出される。制御器は，制御対象（プラント）と操作器に関する知識のもとで，要求されるやり方で制御出力を目標値に一致させるための制御信号を決定し，操作器に伝える。制御信号は目標値と制御出力（制御量）の差，すなわち**偏差**（error）に基づいて決定される。

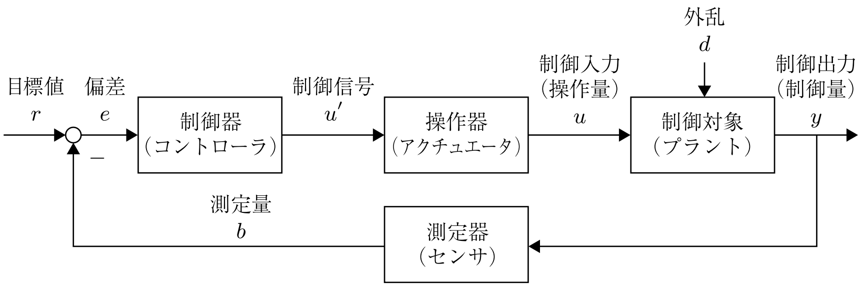

図 1.1　フィードバック制御系

制御対象の出力 $y(t)$ を測定し，この $y(t)$ の関数として目標値と制御出力が一致するように制御入力 $u(t)$ を決める方式を，一般的に**フィードバック制御**（feedback control）という。システムにおいては，目標値 $r(t)$ が変わったり，外乱 $d(t)$ が加わったり，システムのパラメータが変動したりするが，出力 $y(t)$ を測定し，これを用いて制御入力 $u(t)$ を決めれば，自動制御を実行できる。

目標値に制御出力を一致させるということは，言い換えると偏差を零にするということである。フィードバック制御は偏差を零にするように制御信号を作っ

ているので，目標値を突変して偏差が生じたり，外乱で制御信号が乱されても，けっきょくは偏差を零にすることができる。

本書はおもに制御の立場から自動制御を論じるので，操作器は制御器から見た制御対象の一部と考え，また測定器（センサ）を省略して，標準的な制御系として，**図 1.2** のような直結フィードバック制御系を考える。これは**直列補償法**（series compensation）と呼ばれる。

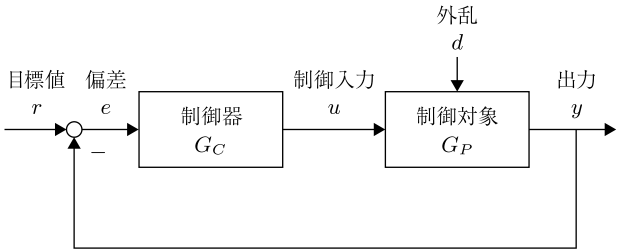

図 1.2　直列補償法（直結フィードバック制御系）

フィードバック制御系の基本構成は，図 1.2 のような制御対象に直列に制御器が配置された直列補償法と，**図 1.3** に示すような，制御器が内側ループに配置された**フィードバック補償法**（feedback compensation）である。ここで G_P は制御対象を表す作用素であり，G_C は制御器の作用素である。制御器 G_C としてどのような機能のものを選び，そのパラメータをどのように調整するかが制御系設計の課題となる。

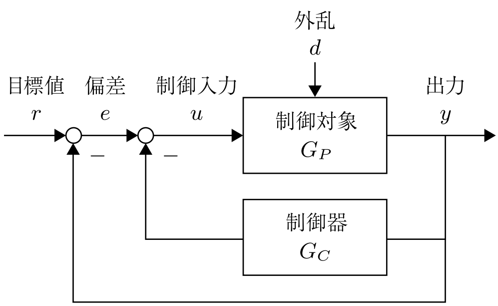

図 1.3　フィードバック補償法

よく用いられるフィードバック制御系の構成法として，直列補償法のほかに**直列フィードバック補償法**（series-feedback compensation）と呼ばれるものがある（**図 1.4** 参照）。これは，まず制御器 G_{C2} によって制御対象の特性を局所的に修正しておき，その上で，制御器 G_{C1} によってシステム全体をうまく制御している。

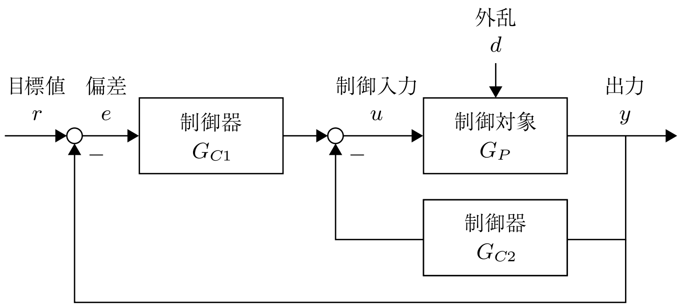

図 1.4　直列フィードバック補償法

以上のように，フィードバック制御とは，基本的には図 1.2 のような直結フィードバック構造を前提として，(a)〜(d) の多面的な要求をなんとか満足するように制御器を設計する方式のことである。

1.2　状態フィードバック制御と出力フィードバック制御

制御対象（プラント）である動的非線形システムは，状態方程式と出力方程式によって，つぎのように表現される。

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t)) \tag{1.2}$$

ここで $\boldsymbol{x}(t) \in R^n$，$\boldsymbol{u}(t) \in R^r$，$\boldsymbol{y}(t) \in R^m$ はそれぞれ状態ベクトル，制御入力ベクトル，出力ベクトルであり，$\boldsymbol{f} : R^n \times R^r \to R^n$，$\boldsymbol{h} : R^n \to R^m$ は滑らかな関数とする。

線形システムの場合には，プラントはつぎのようになる。

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t) \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t) \tag{1.4}$$

つぎに制御装置についてであるが，制御器への情報として状態 $\boldsymbol{x}(t)$ を用いるときは**状態フィードバック制御**といい，出力 $\boldsymbol{y}(t)$ を用いるときは**出力フィードバック制御という**。

状態フィードバック制御では制御入力を

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}_r(t) - \boldsymbol{x}(t)) \tag{1.5}$$

のように与える（**図 1.5** 参照）。$\boldsymbol{x}_r(t)$ は状態 $\boldsymbol{x}(t)$ の目標値で，$\boldsymbol{\alpha} : R^n \to R^r$ はフィードバック制御則を表す関数である。フィードバック制御則が線形の場合は

$$\boldsymbol{u}(t) = K(\boldsymbol{x}_r(t) - \boldsymbol{x}(t)) \tag{1.6}$$

となる。ここで $K \in R^{r \times n}$ はフィードバックゲイン行列である。

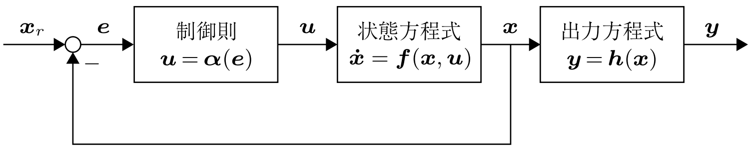

図 1.5　状態フィードバック制御

一般性を失うことなく，システムの平衡点である原点へ状態を遷移させ，閉ループ系（フィードバック系）を安定化したいときには，式 (1.5) または式 (1.6) は

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}(t)) \tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = -K\boldsymbol{x}(t) \tag{1.8}$$

で与えられる。

このような状態フィードバックによって，状態 $\boldsymbol{x}(t)$ を目標状態へ近づけることができ，閉ループ系（フィードバック系）を安定化させることができる。

しかし，状態 $\boldsymbol{x}(t)$ は実際には測定できないことが多く，このような場合には測定可能な出力 $\boldsymbol{y}(t)$ に基づく出力フィードバック制御

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{y}(t)) \tag{1.9}$$

を行う。ここで $\boldsymbol{r}(t)$ は出力の目標値であり，$\boldsymbol{\beta} : R^m \to R^r$ は出力フィードバック制御則を与える関数である（**図 1.6** 参照）。

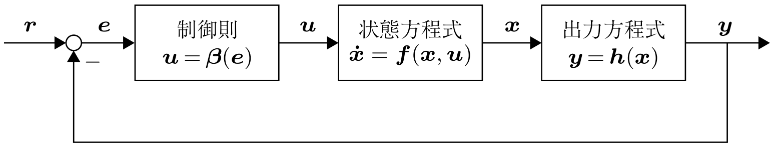

図 1.6　出力フィードバック制御

制御則が線形の場合は

$$\boldsymbol{u}(t) = F(\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{y}(t)) \tag{1.10}$$

となる。ここで $F \in R^{r \times m}$ は出力フィードバックゲイン行列である。しかしながら，多くの制御問題において，関数 $\boldsymbol{\beta}$ や F を適切に決めても，静的な出力フィードバックだけによって閉ループ系を安定化させることは一般には難しい。

そこで，出力 $\boldsymbol{y}(t)$ から制御入力 $\boldsymbol{u}(t)$ を決めるために，しばしばつぎのような**動的補償器**（dynamic compensator）または**動的制御器**（dynamic controller）が用いられる。

$$\frac{d\boldsymbol{z}(t)}{dt} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{z}(t), \boldsymbol{e}(t)) \tag{1.11}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{z}(t), \boldsymbol{e}(t)) \tag{1.12}$$

ここで，$\boldsymbol{z}(t)$ は動的補償器の内部状態，$\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{y}(t)$ は偏差を表し，$\boldsymbol{\alpha} : R^p \times R^m \to R^p$，$\boldsymbol{\beta} : R^p \times R^m \to R^r$ は滑らかな関数とする。$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ は制

御目的を達成できるような適当な関数形を与えなければならないが，ニューラルネットで近似する研究も行われている。

特に動的制御器が線形の場合には，式 (1.11), (1.12) は

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t) = D\boldsymbol{z}(t) + E\boldsymbol{e}(t) \tag{1.13}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = F\boldsymbol{z}(t) + G\boldsymbol{e}(t) \tag{1.14}$$

で与えられる。ここで，D, E, F, G はパラメータ行列である。追従制御や定値制御において閉ループ系を安定化するためには，動的制御器のパラメータ D, E, F, G の値を適切に決めなければならない。

さて，通常のフィードバック制御では，目標値との偏差信号 $\boldsymbol{e}(t)$ を情報として制御器は構成される。しかし，目標値への追従制御が主目的の場合，目標値信号と出力信号を独立に利用して制御則を構成するほうが自由度が多く，制御性能の改善が図れる。

その場合，動的制御器 (1.11), (1.12) は

$$\frac{d\boldsymbol{z}(t)}{dt} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{z}(t), \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{r}(t)) \tag{1.15}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{z}(t), \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{r}(t)) \tag{1.16}$$

のように与えられる。また式 (1.15), (1.16) は二つに分割して

$$\dot{\boldsymbol{z}}_1(t) = \boldsymbol{\alpha_1}(\boldsymbol{z}_1(t), \boldsymbol{r}(t)) \tag{1.17}$$

$$\dot{\boldsymbol{z}}_2(t) = \boldsymbol{\alpha_2}(\boldsymbol{z}_2(t), \boldsymbol{y}(t)) \tag{1.18}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{\beta_1}(\boldsymbol{z}_1(t), \boldsymbol{r}(t)) + \boldsymbol{\beta_2}(\boldsymbol{z}_2(t), \boldsymbol{y}(t)) \tag{1.19}$$

とも与えられるが，これは 1.4 節で述べるフィードバック+フィードフォワード制御方式である。

これらの動的制御器はいろいろな関数近似法，例えばニューラルネットによって構成できる[5)]。

索　　　引

—— 著者略歴 ——

1962 年　慶應義塾大学工学部計測工学科卒業
1964 年　慶應義塾大学大学院修士課程修了（計測工学専攻）
1967 年　ケース工科大学大学院博士課程修了（システム工学専攻）
1967 年　Ph.D.（ケース工科大学）
1972 年　慶應義塾大学助教授
1980 年　慶應義塾大学教授
2005 年　慶應義塾大学名誉教授

フィードバック制御理論　——安定化と最適化——
Feedback Control Theory　——Stabilization & Optimization——

2013 年 11 月 1 日　初版第 1 刷発行

検印省略

し　みず　きよ　たか
著　者　志　水　清　孝
発 行 者　株式会社　コ ロ ナ 社
代 表 者　牛 来 真 也
印 刷 所　三 美 印 刷 株 式 会 社

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発行所　株式会社　コ ロ ナ 社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–03208–6（新宅）（製本：牧製本印刷）G
Printed in Japan