ま え が き

本書は，微分積分学の入門書である。著者は医療系の総合大学で長年微分積分学を講義してきたが，本書はその内容をまとめたものである。医療系の学科には，高等学校で十分に数学を学ばないまま入学してくる学生も少なくない。それらの学科に一旦入学すれば，理工系の学生ほどではないが，最低限の数学の履修が必要となる。本書はそうした大学 1 年生向けの微分積分学の教科書である。

教育をめぐる環境も変わりつつある。2015 年度から，高等学校の新学習指導要領で学んだ学生が大学に入学してくる。彼らは中学までいわゆるゆとりカリキュラムで学び，高校から学習内容が膨らんだ新学習指導要領で育った年代である。さらに大学でも，教育の質向上を目指した改革が全国のいたるところで行われている。著者の勤める大学でも，2014 年度からカリキュラムの大改革が行われる。高等学校の学習指導要領が変わり，大学の教育課程が改革されれば，その変化に適応した新しい教科書が必要である。本書がそのような教科書の一つになるなら，著者の喜びはこれにまさることはない。

以下簡単に本書の内容を概説する。第 1 章は，一部を除き高等学校の復習である。第 2 章と第 3 章は，それぞれ微分法と積分法の基本的な計算法について解説した。第 4 章は，第 2 章と第 3 章では触れなかった微分積分法の理論的に重要な部分を解説し，合わせて微分積分法の応用について述べた。第 5 章は，2 変数関数の微分積分法についての基本的なことを解説した。

本書は，週 1 回通年の講義の教科書としてならちょうどよい分量であろう。ただし，これを週 1 回半期の講義の教科書として用いるなら，扱う事項・題材を教員の裁量で取捨選択することが望ましい。モデル・コースとしては，第 1 章から第 3 章までを学ぶ「基礎しっかりコース」，第 3 章までの一部を省略・簡略化して第 4 章まで学ぶ「1 変数微積分コース」，さらに第 4 章までの一部を省略・簡略化して第 5 章まで学ぶ「2 変数微積分コース」などが考えられる。

数学を学ぶには，基本的な問題を解いて理解を深めることが重要である。そこで本書では，本来定理や命題とすべき内容を，数多く例題として取り上げた。

これは，例題を通して学生に微分積分学の計算法を身につけ，その背後にある基本的な原理，概念を修得して欲しいと考えたからである。そして例題の後には類題を練習として配置し，習熟度を深められるようにした。章末にはまとめの問題を章末問題として配置し，より深い理解が得られるようにした。練習と章末問題は，巻末に詳しい解答例を付けたので，必ず紙と鉛筆（ペン）を用意し手を動かして解いていただきたい。例題・練習・章末問題の解答例を通じて，答案の書き方，ひいては論理的な文章の書き方を会得して欲しい。

本文中のグラフ・図の一部の作図には，Mathematica®7 を用いた。本書の執筆を勧めていただき，編集作業を通じ貴重な御意見を下さったコロナ社の方々に感謝いたします。

2014 年 1 月

桑野泰宏

本書の使い方

- 以下の項目をひとまとめにして，各章の中で通し番号を付している。
  - **定理・命題・補題・系**とは，定義等から論理的に証明された事柄をいう。これらの中で非常に重要なものを定理，重要なものを命題，命題等を証明するのに必要な補助命題を補題，命題等から容易に導かれるものを系としたが，その区別は厳密なものではない。
- 以下の各項目および重要な式には，それぞれ各章の中で通し番号を付してある。
  - **定義**とは，言葉の意味や用法について定めたものである。
  - **注意**とは，定義や定理・命題等に関する注意である。
  - **例**とは，定義や定理・命題等の理解を助けるための実例である。
  - 本文中の説明をわかりやすくするための図や，関数のグラフ等を**図**として表示した。
  - **例題**では，基本的な問題の解き方を丁寧に説明した。
  - **練習**は，（一部の例外を除き）例題の類題である。
- 各章の章末には，まとめの問題を**章末問題**として配置した。
- 探したい項目や式を見つけるには，それぞれの通し番号を参考にするとともに，目次や索引を活用して欲しい。

目　　　　次

1. 準　　　　備

2. 微　　分　　法

3.　積　　分　　法

4.　微分積分法の応用

5.　2 変数関数の微分積分

本書で用いる記号

本書では以下の記号を用いる。

(1) 自然数全体の集合を $\mathbb{N}$, 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$, 有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$, 実数全体の集合を $\mathbb{R}$, 複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ で表す。なお，本書では自然数を正の整数の意味で用いる。

(2) a が集合 A の構成要素であるとき，a が集合 A の**元**（**要素**）であるといい，$a \in A$ または $A \ni a$ と記す。a が集合 A の元ではないとき，$a \notin A$ または $A \not\ni a$ と記す。

(3) $P(x)$ を x に関する命題であるとき，$\{x|P(x)\}$ で，条件 P をみたす x 全体の集合を表す。また，集合 A の元が $a, b, c, d, \cdots$ のように列挙できる場合，$A = \{a, b, c, d, \cdots\}$ のように書くことがある。

(4) 集合 A, B に対し，$A \backslash B$ で A と B の差集合を表す。

$$A \backslash B = \{x | x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

例えば $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ は 0 以外の実数の集合を表す。

(5) A, B を集合とし，$x \in A$ ならつねに $x \in B$ が成り立つとき，A は B の部分集合であるといい，$A \subset B$ と記す。$A \subset B$ かつ $B \subset A$ が成り立つとき，$A = B$ が成り立つ。

(6) A, B を集合とし，f をすべての A の元 a から B の元 b をただ一通りに対応させる対応規則とするとき，f を**写像**といい

$$f : A \longrightarrow B$$

$$f : a \longmapsto b$$

のように書く。

(7) A, B が数の集合であるとき，写像 $f : A \longrightarrow B$ を A から B への**関数**という。特に $A, B \subset \mathbb{R}$ のとき，f を（実）1 変数関数という。

1 準　備

この章では，いくつかの基本的な論証方法や初等関数のさまざまな性質について述べる。この章の内容の一部は高等学校の数学 I・数学 II・数学 A・数学 B で学習したはずの内容である。既習事項の単なる復習ではなく，大学初年級の微分積分を学ぶための基礎となるよう，題材を工夫したつもりである。

1.1　いくつかの証明法

この節では，（**数学的**）**帰納法**と**背理法**という，後でしばしば用いる証明法について解説する。これらの二つの証明法は，一見あたり前の事実を証明する際の，数学における常套手段である。

1.1.1　数学的帰納法の原理

自然数とは，ものを数えるときに自然に登場する数であり，その際なにをやっているかをよく突き詰めてみれば結局のところ

$$1,\ 2=1+1,\ 3=2+1,\ 4=3+1,\ 5=4+1,\ \cdots \tag{1.1}$$

のように，1 から始めて，1 を順次加えることにほかならない。この「1 を順次加えて」ということを集合論的な手続きで言い換えると次のようになる。

定義 1.1　（**継承的集合**）　無限個の元を持つ集合 H が次の (1), (2) をみたすとき，H は継承的であるという。

(1)　$1 \in H$

(2)　$x \in H \Longrightarrow x+1 \in H$

このようにして定義された継承的集合は存在する。例えば $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ などは継承的である。このような継承的集合全体の集合を Γ とする。自然数の集合 $\mathbb{N}$ は最小の継承的集合である。この事実を言い換えたものが，数学的帰納法の原理と呼ばれるものである。

定理 1.1　**(数学的帰納法の原理)**　$\mathbb{N}$ の部分集合 H が継承的ならば，$H = \mathbb{N}$ である。

証明　H は $\mathbb{N}$ の部分集合 $(H \subset \mathbb{N})$ である一方，継承的だから $H \supset \mathbb{N}$ でもある。よって，$H = \mathbb{N}$ が従う[†1]。　□[†2]

系 1.2　**(定理 1.1 の系)**　自然数 n についての命題 $P(n)$ が次の (1), (2) をみたすとき，任意の自然数 n に対して $P(n)$ は真である。

(1)　$P(1)$ は真。

(2)　任意の自然数 n に対して，「$P(n)$ が真なら $P(n+1)$ が真」が成り立つ。

証明　命題 $P(n)$ が真となる $n \in \mathbb{N}$ の集合を H とすれば，(1), (2) により，H は継承的である。よって，定理 1.1 により，$H = \mathbb{N}$ となる。すなわち，任意の自然数 n に対して $P(n)$ は真である。　□

このようにして自然数についての命題を証明する方法を数学的帰納法という。

注意 1.1　系 1.2 の (2) を，「『任意の自然数 n に対して $P(n)$ が真』なら，『任意の自然数 n に対して $P(n+1)$ が真』」と読んではいけない。これでは単に証明すべきことを仮定しただけで，証明したことにはならない。(2) は「『$P(n)$ が真なら $P(n+1)$

---

†1　目次のあとに示した「本書で用いる記号」(5) を参照のこと。

†2　□ は証明終わりの記号である。

が真』が任意の自然数 n について成り立つ」という意味である。高等学校ではこの紛らわしさを回避するため，(2) を「$n = k$ のとき $P(n)$ が成り立つと仮定すると $n = k + 1$ のときにも $P(n)$ が成り立つ」としている。

例題 1.1　**(二項定理)**　任意の実数 a, b と任意の自然数 n に対して

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r a^r b^{n-r} \tag{1.2}$$

が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ。ここで ${}_nC_r$ は二項係数であり，階乗の記号 $n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$，$0! = 1$ を用いて

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

と表される。

証明

(1)　$n = 1$ のとき，式 (1.2) は $a + b = a + b$ となり，成り立つ。

(2)　n のとき式 (1.2) が成り立つことを仮定する。また，二項係数についての関係式

$${}_{n+1}C_r = {}_nC_r + {}_nC_{r-1} \tag{1.3}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) \\
&= \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r a^r b^{n-r}(a+b) \\
&= \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r (a^{r+1}b^{n-r} + a^r b^{n-r+1}) \\
&= \sum_{r=1}^{n+1} {}_nC_{r-1} a^r b^{n-(r-1)} + \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r a^r b^{n+1-r} \\
&= \sum_{r=0}^{n+1} {}_{n+1}C_r a^r b^{n+1-r}
\end{aligned}$$

となって，$n + 1$ の場合が導かれる。よって，すべての自然数に対して式 (1.2) が成り立つ。□

練習 1.1　式 (1.3) が成り立つことを示せ。

1.1.2 背　　理　　法

背理法は代表的な間接証明法である。すなわち，命題 P を証明したいときに，P の否定を仮定すると矛盾が導かれることを示すのである。具体例を用いて説明しよう。

例題 1.2　$\sqrt{2}$ は有理数ではない[†1]，すなわち，p/q（ただし，$p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$）という形では表せないことを示せ。

$\boxed{\text{証明}}$　$\sqrt{2}$ は 2 の正の平方根であり，$\sqrt{2} > 0$ である。もし $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると，ある自然数 p, q を用いて

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \tag{1.4}$$

と書ける。このとき分母分子の共通の約数があれば約分することにより，p, q はたがいに素[†2]，すなわち，p と q の最大公約数は 1 と仮定してよい。式 (1.4) の両辺を 2 乗して

$$2 = \frac{p^2}{q^2}, \text{すなわち } p^2 = 2q^2$$

p^2 は偶数だから，p も偶数である。そこで，$p = 2p'$ とおくと

$$(2p')^2 = 2q^2, \text{すなわち } q^2 = 2p'^2$$

よって，q^2 が偶数だから，q も偶数である。これで p も q も偶数となり，p と q がたがいに素という仮定に反する。これは，$\sqrt{2}$ を有理数と仮定したために起こった矛盾である。よって，$\sqrt{2}$ は有理数ではない。　□

練習 1.2　$\sqrt{3}$ が無理数であることを示せ。

例題 1.3　(連分数表示)　実数 x に対し，ある実数 n が存在して，$n \leqq x < n+1$ をみたす。この n を $[x]$ と記し，x の整数部分という[†3]。$x = [x] + x_1$ と書くと，$0 \leqq x_1 < 1$ である。もし $x_1 > 0$ なら $1/x_1 = [1/x_1] + x_2$ とお

[†1] 有理数ではない実数を無理数という。
[†2] p と q がたがいに素のとき，p/q を既約分数という。
[†3] 日本では $[x]$ をしばしばガウス記号と呼ぶ。

くと，$0 \leqq x_2 < 1$ となり，さらに $x_2 > 0$ なら $1/x_2 = [1/x_2] + x_3$ とおくと，$0 \leqq x_3 < 1$ となる。この操作を繰り返すと

$$
\begin{aligned}
x &= n + x_1 && (n = [x]) \\
&= n + \frac{1}{1/x_1} \\
&= 1 + \frac{1}{n_1 + x_2} && (n_1 = [1/x_1]) \\
&= n + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{1/x_2}} \\
&= n + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + x_3}} && (n_2 = [1/x_2]) \\
&= n + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ddots}}} && (n_3 = [1/x_3], \cdots)
\end{aligned}
$$

となる。これを実数 x の**連分数表示**という。途中で $1/x_k$ が整数となり，$x_{k+1} = 0$ となったら終了する。このとき，次の問に答えよ。

(1)　有理数 r の連分数表示は必ず有限回の操作で終了することを示せ。

(2)　$\sqrt{2}$ の連分数表示を求めよ。

解答例

(1)　r が有理数のとき，$r = m/p$ $(m \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N})$ とおける。ここで $m = pn + q$ $(0 \leqq q \leqq p-1)$ とおくと，$q = 0$ なら，$r = n$ で展開終わりなので，$q \geqq 1$ とする。このとき

$$
r = n + \frac{q}{p} = n + \frac{1}{p/q}
$$

となるので，$r_1 = p/q$ について同じことを繰り返す。$p = qn_1 + q_1$ とおくと，$0 \leqq q_1 \leqq q - 1$ で，$q_1 = 0$ なら展開終わりである。$q_1 \geqq 1$ のときは $r_2 = q/q_1$ について同じことを繰り返す。このようにして現れる余り $q, q_1, q_2, \cdots$ に注目すると，その作り方から，$p > q > q_1 > q_2 > \cdots \geqq 0$ であるから，有限回の操作で必ず，$q_k = 0$ をみたすような k が存在する。よって題意は示された。

(2)　$1 < \sqrt{2} < 2$ より，$\left[\sqrt{2}\right] = 1$ である。よって

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1 + (\sqrt{2} - 1) \\
&= 1 + \cfrac{1}{\sqrt{2} + 1} \\
&= 1 + \cfrac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)} \\
&= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2} + 1}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}
\end{aligned}
$$

を得る。　◆[†1]

注意 1.2　例題 1.3(1) の対偶[†2]を考えると，連分数表示が無限に続く数は無理数である。よって例題 1.3(2) は，$\sqrt{2}$ が無理数であるもう一つの証明を与える。

練習 1.3　$\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ の連分数表示を求めよ。ただし，繁分数[†3]の分子はすべて 1 となるようにせよ。

例題 1.4　**($\sqrt{2}$ の連分数表示とペル方程式)**　$\sqrt{2}$ は無理数なので，$p^2 - 2q^2 = 0$ をみたす自然数解はない。では，$p^2 - 2q^2 = \pm 1$ をみたす自然数解を求めよ。

解答例　例題 1.3(2) の $\sqrt{2}$ の連分数表示を有限ステップ（n ステップ）で切ったものを a_n とし，これを既約分数表示したものを p_n/q_n とおく。すると

$a_1 = 1$ より，$p_1 = 1$, $q_1 = 1$

$a_2 = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ より，$p_2 = 3$, $q_2 = 2$

---

†1　◆は解答例終わりの記号である。

†2　命題「A ならば B」に対して，命題「B でなければ A でない」を元の命題の対偶という。ある命題 P が真なら，P の対偶も真である。

†3　繁分数とは分子または分母が分数からなる分数のことである。

$a_3 = 1 + \dfrac{1}{2+(1/2)} = \dfrac{7}{5}$ より，$p_3 = 7,\ q_3 = 5$

$a_4 = 1 + \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+(1/2)}} = \dfrac{17}{12}$ より，$p_4 = 17,\ q_4 = 12$

$a_n = p_n/q_n$ の定義により

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n} = 1 + \frac{1}{1+(p_n/q_n)} = \frac{p_n+2q_n}{p_n+q_n}$$

すなわち

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + 2q_n \\ q_{n+1} = p_n + q_n \end{cases}$$

が成り立つ†。実は，$(1+\sqrt{2})^n = P_n + Q_n\sqrt{2}$（ただし，$P_n, Q_n$ は自然数）とおくと，$p_n = P_n,\ q_n = Q_n$ である。実際，$(1+\sqrt{2})^1 = 1+\sqrt{2}$ より，$P_1 = Q_1 = 1$ となる。また

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^{n+1} &= (P_n + Q_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) \\ &= (P_n + 2Q_n) + (P_n + Q_n)\sqrt{2}\end{aligned}$$

より

$$\begin{cases} P_{n+1} = P_n + 2Q_n \\ Q_{n+1} = P_n + Q_n \end{cases}$$

となる。これは，$p_n,\ q_n$ は $P_n,\ Q_n$ と同じ初期条件と**漸化式**をもつからである。同様の考察により，$(1-\sqrt{2})^n = p_n - q_n\sqrt{2}$ が成り立っている。よって

$$\begin{aligned}&(p_n + q_n\sqrt{2})(p_n - q_n\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n \\ &p_n^2 - 2q_n^2 = \{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})\}^n = (-1)^n\end{aligned}$$

が成り立つ。

ここでわかったことは，$\sqrt{2}$ の連分数表示からつくった $p_n,\ q_n$ が $p_n^2 - 2q_n^2 = \pm 1$ の自然数解を与えているということである。これ以外に解がないことは別途証明が必要であるが，ここでは省略する。◆

† 厳密には，p_n/q_n が既約分数なら $(p_n+2q_n)/(p_n+q_n)$ も既約分数であることを示す必要がある。これはユークリッドの互除法を用いて証明できる。

練習 1.4　**($\sqrt{5}$ の連分数表示とペル方程式)**　$p^2 - 5q^2 = \pm 1$ をみたす自然数解を求めよ。

1.2　三角関数とその性質

この節では三角関数の定義の復習から始めて，そのさまざまな性質を導こう。

定義 1.2　**(角度 $\boldsymbol{\theta}$ の点，三角関数)**　xy 座標平面で，原点を中心とする半径 1 の単位円 C を考える。$+x$ 軸から反時計回りに測って角度 θ となる C 上の点 P を角度 θ の点という（**図 1.1**）。また，このとき点 P の座標を $(\cos\theta, \sin\theta)$ とすることにより，**正弦関数** $\sin\theta$，**余弦関数** $\cos\theta$ を定義する[†]。また，$\cos\theta \neq 0$ のとき

$$\tan\theta = \mathrm{OP}\ の傾き = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

で，**正接関数** $\tan\theta$ を定義する。

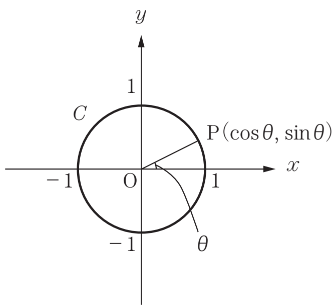

図 1.1　三角関数の定義

次に弧度法と一般角について説明しよう。本書では特に断りがない限り，角度は弧度法で測ることにする。弧度法では，半径 1 の扇形の弧の長さが θ のと

† *co*-とは，双対，余，共を意味する接頭辞で，例えば余弦（*co*sine）というのは余角（ある角に対し，合わせて直角となる角，または角度のこと）に対する正弦の意味である。

索　　　　　　　引

―― 著者略歴 ――

1988 年　東京大学理学部物理学科卒業
1993 年　東京大学大学院理学系研究科博士課程修了（物理学専攻）
　　　　博士（理学）
1993 年　京都大学数理解析研究所研修員（日本学術振興会特別研究員）
～98 年
1994 年　メルボルン大学数学科 Research Fellow (Level A)
～95 年
1998 年　鈴鹿医療科学大学講師（数学担当）
2005 年　鈴鹿医療科学大学助教授
2006 年　鈴鹿医療科学大学教授
　　　　現在に至る

基礎からの微分積分
Basic Calculus

© Yasuhiro Kuwano 2014

2014 年 3 月 28 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

著　　者　桑野泰宏（くわ の やす ひろ）
発 行 者　株式会社　コロナ社
　　　　　代 表 者　牛来真也
印 刷 所　三美印刷株式会社

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発行所　株式会社　コ　ロ　ナ　社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ　http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–06105–5　（松岡）　（製本：愛千製本所）
Printed in Japan

本書のコピー，スキャン，デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられております。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は，いかなる場合も認めておりません。
落丁・乱丁本はお取替えいたします