刊行のことば

わが国において，制御工学が学問として形を現してから，50 年近くが経過した。その間，産業界でその有用性が証明されるとともに，学界においてはつねに新たな理論の開発がなされてきた。その意味で，すでに成熟期に入っているとともに，まだ発展期でもある。

これまで，制御工学は，すべての製造業において，製品の精度の改善や高性能化，製造プロセスにおける生産性の向上などのために大きな貢献をしてきた。また，航空機，自動車，列車，船舶などの高速化と安全性の向上および省エネルギーのためにも不可欠であった。最近は，高層ビルや巨大橋梁の建設にも大きな役割を果たしている。将来は，地球温暖化の防止や有害物質の排出規制などの環境問題の解決にも，制御工学はなくてはならないものになるであろう。今後，制御工学は工学のより多くの分野に，いっそう浸透していくと予想される。

このような時代背景から，制御工学はその専門の技術者だけでなく，専門を問わず多くの技術者が習得すべき学問・技術へと広がりつつある。制御工学，特にその中心をなすシステム制御理論は難解であるという声をよく耳にするが，制御工学が広まるためには，非専門のひとにとっても理解しやすく書かれた教科書が必要である。この考えに基づき企画されたのが，本「システム制御工学シリーズ」である。

本シリーズは，レベル 0 (第 1 巻)，レベル 1 (第 2 〜 7 巻)，レベル 2 (第 8 巻以降) の三つのレベルで構成されている。読者対象としては，大学の場合，レベル 0 は 1，2 年生程度，レベル 1 は 2，3 年生程度，レベル 2 は制御工学を専門の一つとする学科では 3 年生から大学院生，制御工学を主要な専門としない学科では 4 年生から大学院生を想定している。レベル 0 は，特別な予備知識なしに，制御工学とはなにかが理解できることを意図している。レベル 1 は，少

し数学的予備知識を必要とし，システム制御理論の基礎の習熟を意図している。レベル 2 は少し高度な制御理論や各種の制御対象に応じた制御法を述べるもので，専門書的色彩も含んでいるが，平易な説明に努めている。

1990 年代におけるコンピュータ環境の大きな変化，すなわちハードウェアの高速化とソフトウェアの使いやすさは，制御工学の世界にも大きな影響を与えた。だれもが容易に高度な理論を実際に用いることができるようになった。そして，数学の解析的な側面が強かったシステム制御理論が，最近は数値計算を強く意識するようになり，性格を変えつつある。本シリーズは，そのような傾向も反映するように，現在，第一線で活躍されており，今後も発展が期待される方々に執筆を依頼した。その方々の新しい感性で書かれた教科書が制御工学へのニーズに応え，制御工学のよりいっそうの社会的貢献に寄与できれば，幸いである。

1998 年 12 月

編集委員長　池　田　雅　夫

□□□□□□□□□ ま え が き □□□□□□□□□

本書は，制御理論の基本的ツールである状態空間表現について，その作り方，解き方，読み方，使い方の基礎となる概念と手法を解説するものである。状態空間表現は，1960～80 年にかけて盛んに研究された現代制御理論における動的システムの表現手段の一つである。現代制御理論はこのモデルを用いて R. E. Kalman により提案され，可制御性，可観測性という重要な概念を軸にして，状態フィードバック，極配置，最適制御，オブザーバ，カルマンフィルタ，内部モデル原理など，制御理論や制御工学の分野に不可欠な概念と有用な問題解決手段を数多く提供した。それらは線形システム理論としてまとめられ，和書，洋書を問わず多くの名著が出版され現在でも広く読まれている。それまでの主たる制御系設計手法であった古典制御が，図形操作や試行錯誤を伴う経験的な設計手法であったのに対して，現代制御理論は，数学的モデル上で数値計算手法を駆使し，より明確な根拠のもとに解決策が提示できた。このため，現代制御理論は産業界に歓迎され，制御系解析設計用 CAD の普及とも相まって広く利用されるようになった。

しかし，1980 年代に入って，厳密なモデルを前提とする問題点が指摘され，研究の中心はロバスト制御理論に移行した。そのため，状態空間表現の意味付けに多少の変化が見られた。ロバスト制御理論はモデルのあいまいさを許容する問題解決法を数理的手段で提供するための理論であり，古典制御で用いられた伝達関数と現代制御理論の状態空間表現を自在に組み合わせた解析・設計手段を提供する。そこでは，問題の記述には周波数領域の表現である伝達関数が用いられ，時間領域表現である状態空間表現には，解析・設計の計算手法としての位置付けが強調された。例えば，状態空間表現に物理的実体だけではなく，設計仕様や仮想モデルなど抽象的なシステムを組み込むことは，ごく普通に行

われるようになった。また，リカッチ方程式は，最適制御則の計算手段という意味だけではなく，ノルムの評価や繰り返し計算の終了判定などにも使用される。こうして，状態空間表現の位置付けの変化に伴い，線形システム理論のテキストに対しても，ロバスト制御理論以前の内容を見直した新しいものが切望されるようになった。

浅学非才の著者には重荷であったが，今回の執筆にあたり，線形システム理論のテキストでは従来あまり扱われなかった項目も，いくつか取り上げた。

1 章では，状態空間表現の定義と作り方に続いて，その自然な拡張表現形式であるデスクリプタシステムについて詳述している。2 章では，状態方程式の解とその意味について説明している。特に周波数領域の解である伝達関数との関連について丁寧に記述している。3 章では，状態方程式による線形システムの解析を，モードの概念を使って統一的に解説している。これにより，4 章で取り上げるデスクリプタシステムが，状態空間表現の自然な拡張として容易に理解できる。5 章では，可制御性，可観測性など動的システムの重要な諸概念の解説を行い，6 章では，制御系設計への足掛かりとして出力零化問題や零点について述べ，さらに 7 章では，従来の制御系設計問題のデスクリプタシステムによる表現について触れている。

CAD の発達によりシステムの解析や制御系設計が容易に行える今日では，ソフトウェアが提示する種々の回答の理論的根拠をしっかり理解していることは，非常に重要である。本書が理工系の学生諸君のみならず，機械や電気などシステムの解析や設計に携わる多くの方々の一助になれば幸いである。

最後に，本書をまとめるにあたりご尽力いただいたシステム制御工学シリーズ編集委員，コロナ社の方々，および原稿の校正に協力いただいた熊本大学の学生諸君に感謝いたします。

2011 年 2 月

汐月哲夫

目　　次

1.　状態空間表現とモデリング

2.　状態方程式の解

3.　モードと振る舞い

4.　デスクリプタシステムとインパルスモード

5.　可制御性・可観測性とシステムの構造

6.　零点と出力零化モード

7.　制御問題のデスクリプタシステムによる表現

付　　　録

1 状態空間表現とモデリング

本章では，状態空間表現の定義とその意味を，数式表現，信号の流れ，物理システムのモデリングという観点から解説する。特に，状態空間表現の拡張であるデスクリプタシステムを紹介し，それらの関係から状態空間表現が線形システムの数式表現の中でどのようなクラスを網羅しているかを説明する。

1.1 状態空間表現の定義

本書の主役は，行列を用いた 1 階微分方程式

Σ_{ss}：状態空間表現

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \tag{1.1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{1.2}$$

である。

t は時間を表す変数で，実数の値をもつ。このことを，実数の集合を表す $\mathbf{R}$ と，集合の要素であることを意味する $\in$ を用いて， $t \in \mathbf{R}$ で表すこととする。以後，ベクトルのサイズと成分を表すのにこの表現を用いる。

$u(t)$，$y(t)$，$x(t)$ は実数の値をとる関数を成分とする列ベクトルであり，それぞれ**入力変数** (input variable)，**出力変数** (output variable)，**状態変数** (state variable）と呼ばれる。各列ベクトルの次数をそれぞれ m, p, n とすると，その要素による表現はつぎのとおりである。

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

また，集合の記号を使うと，$u(t) \in \mathbf{R}^m$，$y(t) \in \mathbf{R}^p$，$x(t) \in \mathbf{R}^n$ となる。ここで，$\mathbf{R}^n$ は n 次元ベクトルの集合である。

$$\frac{d}{dt}x = \dot{x} = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \tag{1.4}$$

は時間 t に関するベクトルの導関数を表す。つまり，記号「 $\dot{}$ 」（dot）は時間 t に関する微分演算を表す。ベクトルの差（スカラ倍）は各成分の差（スカラ倍）のベクトルで定義されるので，ベクトルの導関数はつぎのように導関数のベクトルとなる。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}, \quad \dot{x}_i(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x_i(t+h) - x_i(t)}{h} \tag{1.5}$$

式 (1.1) を**状態方程式**（state equation），式 (1.2) を**出力方程式**（output equation）と呼ぶ。この方程式の組は**状態空間表現**（state space representation）と呼ばれるが，本書ではこれを Σ_{ss} と表記することにする。

式 (1.1), (1.2) の A, B, C, D はそれぞれ適合するサイズの実定数行列で，システムのパラメータと呼ぶ。A 行列が n 行 n 列の実行列であることを表すのに，$A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ の表記を用いる。この表記に従うと，その他のパラメータ定数行列は，$B \in \mathbf{R}^{n \times m}$，$C \in \mathbf{R}^{p \times n}$，$D \in \mathbf{R}^{p \times m}$ のように表される。変数が時間の関数であることを明示する必要がない場合には，記号 (t) を省略する。

システム表現の中に現れる微分演算や積分演算の個数を，システムの**動的次数**（order of dynamics）という。状態空間表現 Σ_{ss} の動的次数は，式 (1.5) か

らわかるように，状態変数ベクトルのサイズ n に一致する。x_0 はシステムの**初期状態**（initial state）と呼ばれる。

$m > 1$ または $p > 1$ であるシステム Σ_{ss} を，**多入出力系**または **MIMO**（multi input multi output）系という。これに対して，$m = p = 1$ の場合には，Σ_{ss} は **1 入力 1 出力系**または **SISO**（single input single output）系と呼ばれる。SISO 系であることに意味がある場合には，特に B, C, D を小文字 b, c^T, d とし，式 (1.6), (1.7) のように表記する[†] 。

$\Sigma_{\mathrm{ss-SISO}}$：状態空間表現（1 入力 1 出力系）

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0 \tag{1.6}$$

$$y(t) = c^T x(t) + du(t) \tag{1.7}$$

$m = 0$ の場合，つまり入力をもたないシステム

Σ_{ss0}：状態空間表現（オートノマス系）

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \tag{1.8}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{1.9}$$

は，**オートノマス系**（autonomous system）と呼び，Σ_{ss0} と書く。このとき，B, D はそれぞれサイズが $n \times 0$，$p \times 0$ の空行列であると解釈し，$B \in [\,](n, 0)$，$D \in [\,](p, 0)$ や，$B \in \mathbf{R}^{n \times 0}$，$D \in \mathbf{R}^{p \times 0}$ と書くこともある。

1.2　ブロック線図による表現

状態空間表現 Σ_{ss} を**図 1.1** のように入力 u から出力 y への信号の流れとして読み取るには，状態方程式 (1.1) の両辺を 0 から t まで積分して

$$x(t) = \int_0^t (Ax(\tau) + Bu(\tau))d\tau + x(0) \tag{1.10}$$

---

† c^T は行列 c の**転置**（transpose）を表す。付録 A.3 節参照。

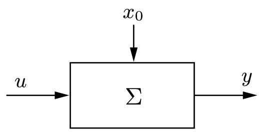

図 1.1　入出力関係とシステム

のように表現すると，理解の助けになる。**図 1.2** はブロック線図の基本要素である定数（行列）倍 (a)，積分器 (b) を表すブロックと，加算点 (c) である。これらを用いて $\Sigma_{\rm ss}$ を表すと**図 1.3** となる。すなわち加算点 S_1 が式 (1.1)，加算点 S_2 が式 (1.2) に対応している。

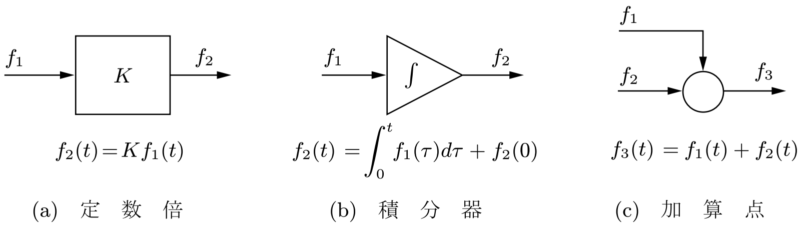

図 1.2　ブロック線図の基本要素 (1)

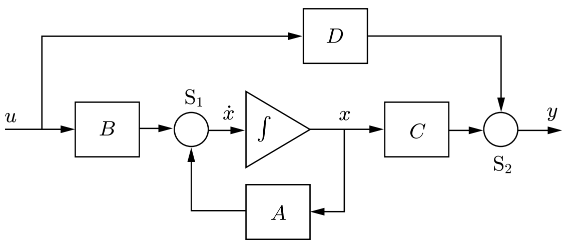

図 1.3　状態空間表現のブロック線図 (1)

これ以外にも多様な表現方法が考えられる。パラメータ行列 $\{A, B, C, D\}$ や変数ベクトル $\{x, y, u\}$ を一つにまとめた**拡大行列**（augmented matrix），**拡大ベクトル**（augmented vector）を用いると

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

というシステム表現が得られる。信号ベクトルの拡大，分割を**図 1.4** のように表現すると，式 (1.11) に対応するブロック線図として**図 1.5** が得られる。

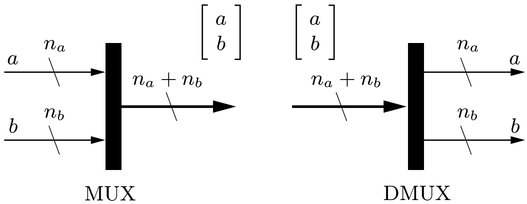

図 1.4　ブロック線図の基本要素 (2)：信号ベクトルの拡大と分割

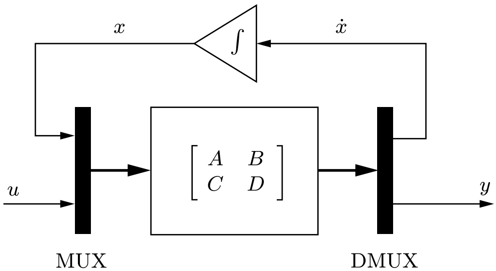

図 1.5　状態空間表現のブロック線図 (2)

また，行列の掛け算を微分・積分演算と同類の線形写像として扱うと

$$\begin{bmatrix} A - \dfrac{d}{dt}I & B & 0 \\ C & D & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = 0 \tag{1.12}$$

の陰形式の表現が得られる。これは**インプリシットシステム**（implicit system）表現と呼ばれる。

1.3　デスクリプタシステム表現

状態空間表現を拡張した以下の 1 階微分方程式を，デスクリプタシステム（descriptor system）表現という。

$\Sigma_{\rm dsys}$：デスクリプタシステム表現

$$E\dot{x}_D(t) = Ax_D(t) + Bu(t), \quad Ex_D(0) = Ex_{D0} \tag{1.13}$$

$$y(t) = Cx_D(t) + Du(t) \tag{1.14}$$

ここで，$x_D \in \mathbf{R}^{n_D}$ はデスクリプタ変数と呼ばれる n_D 次元ベクトルである。$y \in \mathbf{R}^p$，$u \in \mathbf{R}^m$ は，それぞれ出力，入力を表すベクトルである。これにより係数行列 C, D のサイズは確定するが，E, A, B の行サイズは確定しないことに注意されたい。デスクリプタシステムは $\{A, E\}$ の特徴に基づいて四つの型に分類することができる。

1.3.1　特異ペンシル型 ：$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{dsys-singular}}$

同じサイズの 2 定数行列 $\{A, E\}$ と複素変数 $s \in \mathbf{C}$ からなる行列 $[sE - A]$ を，ペンシルと呼ぶ（$\mathbf{C}$ は複素数全体の集合を表す）。ほとんどすべての $s \in \mathbf{C}$ に対して $[sE - A]$ が正則であるとき，これを正則ペンシルと呼び，そうでない場合を特異ペンシルと呼ぶ。

$\Sigma_{\rm dsys}$ の係数行列 A, E からなるペンシルが特異ペンシルであるとき，デスクリプタシステムは一般に微分方程式として可解ではない。すなわち，初期値 Ex_{D0} と入力関数 u を与えても解 x_D が存在しなかったり，一意に定まらないことになる。このように可解でないデスクリプタシステムを特異ペンシル型と呼び，$\Sigma_{\rm dsys-singular}$ と書くことにする。このクラスのシステム表現はインプリシットシステムなどとも関連して広く議論されているが，本書の範囲を超えるのでここでは取り扱わない。

索　引

—— 著 者 略 歴 ——

1983 年　東京工業大学大学院理工学研究科修士課程修了（制御工学専攻）
1983 年　熊本大学助手
1989 年　工学博士（東京工業大学）
1990 年　熊本大学助教授
2008 年　東京電機大学教授
現在に至る

線形システム解析
Analysis of Linear Systems

2011 年 4 月 18 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

著　　者	汐　月　哲　夫
発 行 者	株式会社　コ ロ ナ 社
	代 表 者　牛 来 真 也
印 刷 所	三 美 印 刷 株 式 会 社

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発行所　株式会社　**コ　ロ　ナ　社**
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ　http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–03319–9　（新宅）（製本：愛千製本所）　G
Printed in Japan