

情報ネットワーク科学シリーズ 3

『情報ネットワークの分散制御と階層構造』

章末問題解答

(2016年5月9日現在)

## 章末問題解答

### 1 章

- 【1】式 (1.1) の右辺第一項の  $-\int_{-\infty}^{\infty} w(x, r, t) p(x, t) dr$  の中で, 点  $x$  から遷移量  $r = 0$  で点  $x$  に留まる量の寄与は

$$-\int_{-\infty}^{\infty} w(x, r, t) p(x, t) \delta(r) dr = -w(x, 0, t) p(x, t)$$

である. 一方,  $p(x, t)$  の増加要因である右辺第二項の中で, 点  $x$  から遷移量  $r = 0$  で点  $x$  に留まる量の寄与は

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x - r, r, t) p(x - r, t) \delta(r) dr = w(x, 0, t) p(x, t)$$

である. 両者の量が相殺するため, 全体として問題は生じない.

- 【2】ある  $x$  を固定したとき

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = c p(x, t)$$

は  $t$  に関する常微分方程式とみなせるから,  $A(x)$  を  $x$  の値ごとに定まる定数 (つまり  $x$  の関数であってもよいが, 時間には依存しない) として

$$p(x, t) = A(x) e^{ct}$$

である.  $t = 0$  での初期条件を考えると  $A(x) = p(x, 0)$  なので,

$$p(x, t) = p(x, 0) e^{ct}$$

となる.  $p(x, t)$  は  $t$  に関して,  $c > 0$  なら指数関数で増加,  $c < 0$  なら指数関数で減少,  $c = 0$  なら一定値となる.

- 【3】 $n$  次元空間を離散化して作った  $n$  次元の格子グラフでは, 元の空間の座標軸に対応した  $n$  個の方向ごとに, 上り下り方向を合わせて 2 個ずつの隣接ノードが存在する. つまり隣接ノードの総数は  $2n$  である. あるノードの関数値を  $\phi_x$  とし,  $n$  個の異なる座標軸方向  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) に沿った隣接ノードの関数値を, 上り方向と下り方向でそれぞれ  $\phi_{x_i}^+$ ,  $\phi_{x_i}^-$  と表すことにする. このとき,  $n$  次元のラプラス方程式

2 章末問題解答

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) \phi = 0$$

を離散化したラプラス方程式は

$$\sum_{i=1}^n \frac{\phi_{x_i}^+ - 2\phi_x + \phi_{x_i}^-}{\Delta^2} = 0$$

となる. これを整理すると,

$$\phi_x = \frac{\sum_{i=1}^n \phi_{x_i}^+ + \sum_{i=1}^n \phi_{x_i}^-}{2n}$$

となるから, ノードの関数値が隣接ノードの関数値の平均値になっていることがわかる.

- 【4】 くりこみ変換を一回作用させたときにできる新しい碁石の配置について, 格子点の碁石が黒石である確率  $\mathcal{R}(p)$  を考えると, 粗視化の規則から以下の様に表現できる.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(p) &= p^4 + {}_4C_3 p^3(1-p) + \frac{1}{2} {}_4C_2 p^2(1-p)^2 \\ &= p^4 + 4p^3(1-p) + 3p^2(1-p)^2 \end{aligned}$$

ここで, くりこみ変換の不動点を求めるためのくりこみ群方程式  $\mathcal{R}(p) = p$  は

$$p^4 + 4p^3(1-p) + 3p^2(1-p)^2 = p$$

であり, これを整理すると

$$p(2p-1)(p-1) = 0$$

となるから, 不動点は  $p_c$  は  $p_c = 0, 1/2, 1$  となる. 1.3.3 節 (2) と同様の考え方により, 碁盤を遠くから見たときの見え方は,  $p < 1/2$  なら白で  $p > 1/2$  なら黒になる.

- 【5】 曲線群  $\{g(\mathbf{x}; s) = 0\}_s$  の包絡線を求める問題.

- $g(\mathbf{x}; s) := sx^2 - y + c^2/s = 0$  のとき,  $\partial g(\mathbf{x}; s)/\partial s = 0$  より

$$x^2 - \frac{c^2}{s^2} = 0$$

となり,  $c > 0, s > 0$  から

$$s = \frac{c}{|x|}$$

である．これを  $g(x; s)$  に代入すると

$$c|x| - y + c|x| = 0$$

となるから， $x$  の符号により場合分けして

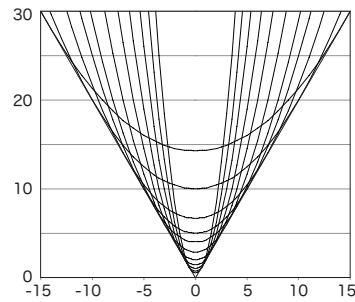
$$y = \begin{cases} +2cx & (x \geq 0) \\ -2cx & (x < 0) \end{cases}$$

を得る．

これを図を用いて考察してみよう．与えられた  $s$  に対して  $g(x; s) = 0$  は放物線の方程式

$$y = sx^2 - y + \frac{c^2}{s}$$

である．これを  $s$  を変えて表示すると解図 1.1 のようになる．



解図 1.1  $y = sx^2 - y + 1/s$  の包絡線

- $g(x; s) := (x - 1) \sin s + (y - 1) \cos s + 1 = 0$  のとき，

$$(x - 1) \sin s + (y - 1) \cos s = -1$$

である．また  $\partial g(x; s) / \partial s = 0$  より

$$\frac{\partial g(x; s)}{\partial s} = (x - 1) \cos s - (y - 1) \sin s = 0$$

となる．これらから  $s$  を消去するために，

$$(x - 1)^2 \sin^2 s + (y - 1)^2 \cos^2 s + 2(x - 1)(y - 1) \sin s \cos s = 1$$

$$(x - 1)^2 \cos^2 s + (y - 1)^2 \sin^2 s - 2(x - 1)(y - 1) \sin s \cos s = 0$$

4 章末問題解答

と両辺を自乗してから両者を加えると

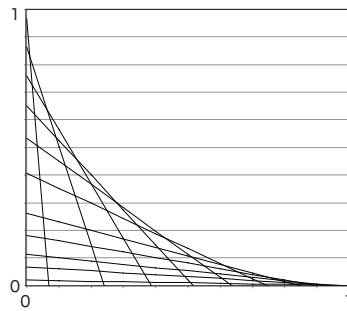
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

となり,  $(x, y) = (1, 1)$  を中心とする半径 1 の円となる.

これを図を用いて考察してみよう. 与えられた  $s$  に対して  $g(x; s) = 0$  は直線の方程式

$$y = -(\tan s)x + (1 + \tan s - \sec s)$$

である. これを  $s$  を変えて表示すると解図 1.2 のようになる.



解図 1.2  $(x-1)\cos s - (y-1)\sin s + 1 = 0$  の包絡線

- $g(x; s) := (x-s)^2 + y^2 - cs^2 = 0$  のとき,  $\partial g(x; s)/\partial s = 0$  より

$$-2(x-s) - 2cs = 0$$

だから,

$$s = \frac{x}{1-c}$$

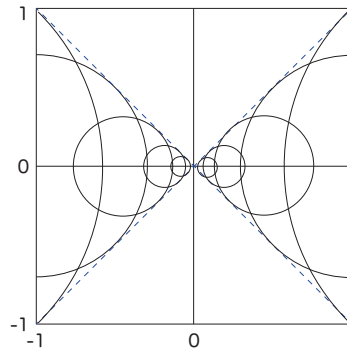
となる. これを  $g(x; s)$  に代入すると

$$-\frac{c}{1-c}x^2 + y^2 = 0$$

となるから,

$$y = \pm \sqrt{\frac{c}{1-c}}x$$

を得る.



解図 1.3  $(x-s)^2 + y^2 = s^2/2$  の包絡線

これを図を用いて考察してみよう．与えられた  $s$  に対して  $g(x; s) = 0$  は円の方程式

$$(x-s)^2 + y^2 = cs^2$$

である．これを  $s$  を変えて表示すると解図 1.3 のようになる．

## 2 章

【1】面積が 2 となる例は，底辺が  $1/x$  で高さが  $2x, 2x + \log x, 2x + 1$  など．面積が 0 となる例は，底辺が  $1/x$  で高さが  $\sqrt{x}, \log x, (\log x)^2$  など．面積が  $\infty$  となる例は，底辺が  $1/x$  で高さが  $x^2, e^x, x \log x$  など．

【2】(略)

【3】 $J(x, t) = c - \kappa \partial p(x, t) / \partial x$  を  $x$  で微分すると

$$\frac{\partial J(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial x} - \kappa \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} = -\kappa \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}$$

であるから，連続の式 (2.1) に代入すると拡散方程式 (2.5) となる．

このときの方程式の解は， $p(x, t)$  に関する境界条件 (2.6), (2.7) があつたとしても

$$J(x, t)|_{x \rightarrow \pm\infty} = c$$

となるので，境界（無限遠点）からの流入と流出があるモデルを表している．このとき，拡散方程式 (2.5) の解  $p(x, t)$  はフィックの法則 (2.4) の場合と同様に (2.16) で表される．但し，その解（密度関数）を形作っている対象が，速

## 6 章 末 問 題 解 答

さ  $c$  の流れの中でありながら解の形状を形作っていることに違いがある．これに関連した実例としては，本シリーズ第一巻「情報ネットワーク科学入門」の5章“自然界の階層構造に学ぶ自律分散制御モデル”を参照のこと．

【4】式 (2.29) から

$$-1 \leq 1 - \frac{4\kappa \Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{m\pi}{2n} \leq 1$$

であり，左側の不等式から

$$\kappa \sin^2 \frac{m\pi}{2n} \leq \frac{1}{2} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$$

を得る．また，右側の不等式から

$$0 \leq \kappa \sin^2 \frac{m\pi}{2n}$$

を得る． $0 \leq \sin^2 \frac{m\pi}{2n} \leq 1$  なので式 (2.30) を得る．

【5】ある関数  $p_1(x, t)$  と  $p_2(x, t)$  が拡散方程式 (2.5) を満たすとし， $c_1, c_2$  を定数としたとき， $p(x, t) := c_1 p_1(x, t) + c_2 p_2(x, t)$  が拡散方程式 (2.5) の解となることを示せばよい．

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (c_1 p_1(x, t) + c_2 p_2(x, t)) \\ &= c_1 \frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} + c_2 \frac{\partial p_2(x, t)}{\partial t} \\ &= c_1 \kappa \frac{\partial^2 p_1(x, t)}{\partial x^2} + c_2 \kappa \frac{\partial^2 p_2(x, t)}{\partial x^2} \\ &= \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} (c_1 p_1(x, t) + c_2 p_2(x, t)) \\ &= \kappa \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} \end{aligned}$$

【6】 $|\mathbf{x}| = 1$  の制約条件下での式 (2.47) の停留値問題をラグランジュの未定乗数法で扱うために，以下の関数を考える．

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}, \bar{\lambda}) &:= G(\mathbf{x}) - \bar{\lambda} \left( \sum_{i \in V} x_i^2 - 1 \right) \\ &= \sum_{(i, j) \in E} w_{ij} \left( \frac{x_i}{\sqrt{D_i}} - \frac{x_j}{\sqrt{D_j}} \right)^2 - \bar{\lambda} \left( \sum_{i \in V} x_i^2 - 1 \right) \end{aligned}$$

$\partial \Psi / \partial x_i = 0$  と  $\partial \Psi / \partial \bar{\lambda} = 0$  から，

$$\frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, \bar{\lambda})}{\partial x_i} = \sum_{j \in \partial i} 2w_{ij} \left( \frac{x_i}{D_i} - \frac{x_j}{\sqrt{D_i D_j}} \right) - 2\bar{\lambda} x_i = 0$$

$$\frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, \bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}} = \sum_{i \in V} x_i^2 - 1 = 0$$

となり, これらを整理すると

$$\sum_{j \in \partial i} w_{ij} \left( \frac{x_i}{D_i} - \frac{x_j}{\sqrt{D_i D_j}} \right) = \bar{\lambda} x_i, \quad \sum_{i \in V} x_i^2 = 1$$

となる. 最初の式は更に

$$x_i - \sum_{j \in \partial i} w_{ij} \frac{x_j}{\sqrt{D_i D_j}} = \bar{\lambda} x_i$$

と書けるから, 正規化ラプラシアン行列 (2.46) を用いて整理すると,  $|x| = 1$  の制約条件の下で

$$N \mathbf{x} = \bar{\lambda} \mathbf{x}$$

となり, 式 (2.48) の固有値問題に帰着する.

【7】 (略)

【8】 (略)

### 3章

【1】 局所動作規則 (3.4) から得られる  $q(x, t)$  の時間発展方程式は

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial t} = c \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{2} (q(x, t))^2 + \sigma^2 q(x, t) \right)$$

である. ある関数  $q_1(x, t)$  と  $q_2(x, t)$  がこの方程式の解であるとしたとき,  $q(x, t) := q_1(x, t) + q_2(x, t)$  は

$$\begin{aligned} \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (q_1(x, t) + q_2(x, t)) \\ &= \frac{\partial q_1(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial q_2(x, t)}{\partial t} \\ &= c \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{2} (q_1(x, t))^2 + \sigma^2 q_1(x, t) \right) + c \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{2} (q_2(x, t))^2 + \sigma^2 q_2(x, t) \right) \\ &= c \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{2} ((q_1(x, t))^2 + (q_2(x, t))^2) + \sigma^2 (q_1(x, t) + q_2(x, t)) \right) \\ &\neq c \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{2} (q_1(x, t) + q_2(x, t))^2 + \sigma^2 (q_1(x, t) + q_2(x, t)) \right) \end{aligned}$$



## 8 章 末 問 題 解 答

- 【2】正規化ラプラシアン行列による時間発展方程式 (2.58) は, ノードの重みベクトル  $\mathbf{x}(t)$  の変化がノード間の移動によって起こるとは見なせないが, 式 (2.57) で見たように, 変数変換

$$\mathbf{y}(t) := D^{1/2} \mathbf{x}(t)$$

とすることで,  $\mathbf{y}(t)$  に関しては時間変化が移動によって起こると見なすことができる. このとき, 時間とともにノード  $i$  について  $x_i(t)/D_i$  の値が平滑化される. そのため,  $x_i$  が発散することはない.

正規化ラプラシアン行列の固有ベクトルで考えると, 固有値  $\bar{\lambda}_i$  に属するそれぞれの固有ベクトルは, 時間とともにレート  $-\kappa \bar{\lambda}_i$  で減衰する. そのため, 最小固有値  $\bar{\lambda}_0 = 0$  に対応した固有ベクトルのみが生き残ることになる.

- 【3】例えば

$$g(|\nabla q(x, t)|) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2a} |\nabla q(x, t)|\right)$$

$$g(|\nabla q(x, t)|) = \frac{2}{\pi} \arctan(|\nabla q(x, t)| - a)$$

## 4 章

- 【1】漸化式 (4.6) から

$$\begin{aligned} q_{\max}(t_k) &= \frac{1}{b} (q_{\max}(t_{k-1}) + v \Delta t) \\ &= \frac{1}{b^2} q_{\max}(t_{k-2}) + v \Delta t \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}\right) \\ &= \frac{1}{b^3} q_{\max}(t_{k-3}) + v \Delta t \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b^3}\right) \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{b^k} q_{\max}(t_0) + v \Delta t \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + \dots + \frac{1}{b^k}\right) \\ &= \frac{1}{b^k} q_{\max}(t_0) + \frac{v \Delta t}{b-1} \left(1 - \frac{1}{b^k}\right) \end{aligned}$$

- 【2】漸化不等式 (4.8) から

$$\begin{aligned}
q_{\min}(t_k) &\geq \frac{1}{b} (q_{\min}(t_{k-1}) + v \Delta t) \\
&\geq \frac{1}{b^2} q_{\min}(t_{k-2}) + v \Delta t \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} \right) \\
&\geq \dots \\
&\geq \frac{1}{b^k} q_{\min}(t_0) + v \Delta t \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + \dots + \frac{1}{b^k} \right) \\
&\geq \frac{1}{b^k} q_{\min}(t_0) + \frac{v \Delta t}{b-1} \left( 1 - \frac{1}{b^k} \right)
\end{aligned}$$

【3】(略)

## 5章

【1】(略)

【2】(略)

【3】アトラクタの座標  $x_+$  に対して  $\epsilon$  だけずれた状態  $x = x_+ + \epsilon$  が与えられたとき、送信レートの次のリセット時点の状態は

$$\begin{aligned}
g(x_+ + \epsilon) &= \frac{1 + \alpha\beta}{1 + \beta} \left( \frac{1 + \beta}{2 + \beta + \alpha\beta} + \epsilon \right) \\
&= \frac{1 + \alpha\beta}{2 + \beta + \alpha\beta} + \frac{1 + \alpha\beta}{1 + \beta} \epsilon
\end{aligned}$$

となる。更に次のリセット時点の状態は、

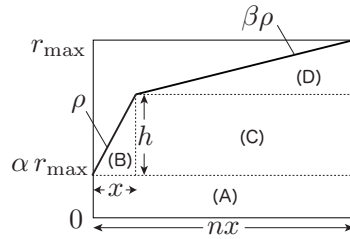
$$\begin{aligned}
\{g \circ g\}(x_+ + \epsilon) &= \frac{1 + \alpha\beta}{1 + \beta} \frac{1 + \alpha\beta}{2 + \beta + \alpha\beta} + \left( \frac{1 + \alpha\beta}{1 + \beta} \right)^2 \epsilon + \frac{\beta(1 - \alpha)}{1 + \beta} \\
&= x_+ + \left( \frac{1 + \alpha\beta}{1 + \beta} \right)^2 \epsilon
\end{aligned}$$

となる。この結果から、 $\alpha < 1$  であればアトラクタからのずれは幾何的に減少することが分かる。ここで、アトラクタは  $\beta < 1$  の場合だけでなく  $\beta \geq 1$  の場合にも存在していることに注意する。

【4】 $n$  本のフローが図 5.17 のように位相をずらして同期している場合のスループットを調べるため、送信レートの一周期に注目する。解図 5.1 は一周期の送信レートの変化を図示したもので、この面積を算出するために (A), (B), (C) 及び (D) の部分に分けて考える。式 (5.18) と  $h = \rho x$  より

$$h = \frac{1 - \alpha}{1 + \beta(n - 1)} r_{\max}$$

10 章末問題解答



解図 5.1 平均スループットの算出

である．この関係を用いて各部分の面積を求めると，

$$\begin{aligned}
 (A) &= \alpha r_{\max} \times (nx) \\
 (B) &= \frac{xh}{2} = \frac{1-\alpha}{2n(1+\beta(n-1))} r_{\max} \times (nx) \\
 (C) &= (n-1)xh = \frac{(1-\alpha)(n-1)}{n(1+\beta(n-1))} r_{\max} \times (nx) \\
 (D) &= \frac{(n-1)x}{2} ((1-\alpha)r_{\max} - h) \\
 &= \frac{(1-\alpha)(n-1)^2\beta}{2n(1+(n-1)\beta)} r_{\max} \times (nx)
 \end{aligned}$$

となるから，スループット  $\langle r \rangle$  は以下のように得られる．

$$\begin{aligned}
 \langle r \rangle &= \frac{(A) + (B) + (C) + (D)}{nx} \\
 &= \left( \alpha + \frac{1-\alpha}{2n(1+\beta(n-1))} + \frac{(1-\alpha)(n-1)}{n(1+\beta(n-1))} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(1-\alpha)(n-1)^2\beta}{2n(1+(n-1)\beta)} \right) r_{\max} \\
 &= \alpha r_{\max} + \frac{(1-\alpha)(2n-1+(n-1)^2\beta)}{2n(1+(n-1)\beta)} r_{\max}
 \end{aligned}$$

【5】 式 (5.19) と (5.20) の差を取ると

$$\begin{aligned}
 \langle r \rangle - \langle r \rangle|_{\beta=1} &= \frac{(1-\alpha)(2n-1+(n-1)^2\beta)}{2n(1+(n-1)\beta)} r_{\max} \\
 &\quad - \frac{(1-\alpha)(2n-1+(n-1)^2)}{2n(1+(n-1))} r_{\max} \\
 &= \frac{(1-\alpha)(1-\beta)(n-1)}{2n(1+(n-1)\beta)} r_{\max} \geq 0
 \end{aligned}$$

となる．最後の不等号は， $\alpha \leq 1$ ,  $0 < \beta \leq 1$ ,  $n \geq 1$  であることによる．

## 6章

- 【1】  $f_1(X) = 0, f_2(X) = \sqrt{X}$  のときのランジュバン方程式を式 (6.8) の形式で書けば

$$dX(t) = \sqrt{X} dW(t)$$

である．二階微分可能なある関数  $y(x, t)$  を用いた変数変換

$$Y(t) := y(X(t), t)$$

を施したとき， $Y(t)$  に関する時間発展方程式は，伊藤の補題を用いることにより式 (6.13) となる．ここでノイズ項の  $X$  依存性を消すためには

$$\frac{\partial y}{\partial X} \sqrt{X} = 1$$

であればよい．このことから，

$$Y(t) = y(X(t), t) = 2\sqrt{X(t)}$$

とすればよい．これを式 (6.13) に代入することより，ノイズ項が  $X$  に依存しないランジュバン方程式は，

$$\begin{aligned} dY(t) &= \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial X} \times 0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial X^2} X + \frac{y}{X} \sqrt{X} dW \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(\sqrt{X})^3} X + dW \\ &= -\frac{2}{Y} + dW \end{aligned} \quad (1)$$

また，対応するフォッカー・プランク方程式は， $Y$  の密度関数を  $q(y, t)$  とすれば

$$\frac{\partial q(y, t)}{\partial t} = + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{2}{y} q(y, t) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} q(y, t)$$

となる．

- 【2】 6.4.1 項で示した時間発展方程式の基礎となっている準静的アプローチの考え方は，ユーザとシステムの動作速度が著しく異なっていることを利用している．つまり，ユーザの認知や反応を特徴付ける時間スケールが，システムにとって極めて長い時間であり，システムが定常状態を保ちながらゆっくりと変化するとみなせる場合にのみ有効である．図 6.12 や 図 6.15 のポテンシャル関数極小点周辺では，システムの状態変化がゆっくり起こり，準静的アプローチの考

12 章末問題解答

え方に合っている。一方、図 6.12 や 図 6.15 の右側のポテンシャル関数の崖の周辺ではシステムの動きが速く、準静的アプローチの考え方が成り立たない。この領域はシステムの系内客数が発散することを表す領域に対応するが、実際のシステムでは有限の到着率の待ち行列で有限時間内に系内客数が発散することは無いのである。このため、準静的アプローチは通常の運用状態の周辺での振舞いを分析する際に有効であるが、系内客数が発散する場合のような急激に変化する過渡的な状態の分析には適さない。