# ベクトル解析からはじめる
# 固体力学入門

博士（工学）　岡部　朋永　著

コ ロ ナ 社

# ま　え　が　き

数年にわたり，学部 2 年生にベクトル解析を教えている。その際，学生から「ベクトル解析って一体なににどうやって使うのですか」という質問をよく受ける。あまり自分の専門に偏ったことを教えてはいけないと思い，「工学全般によく使います。特に固体力学や流体力学といった，連続体力学と一般に呼ばれる分野では非常によく使われます」と答える。この答えを聞いた学生の多くは，首をかしげながらその場をあとにする。このとき，「ああ，もう少し講義時間がとれれば，彼らに応用まで教えられるのに」と，やや残念な気持ちになる。

また一方で，学部 4 年生の「構造力学」や大学院の「固体力学」を教えている際，ガウスの発散定理などを式の導出に利用するにあたり「すでにベクトル解析で学んでいますが」と言うと，ポカンとした顔をしている学生が見受けられる。それが明らかに数年前自分がベクトル解析を教えた学生だったりすると，自分の力不足にひどくショックを受ける。実際の問題に出会う前に，彼らの頭の中からベクトル解析が消えてしまったことを感じる瞬間である。

一つの学期内で基礎から応用まで教えることは現実的ではないし，あまり良いこととも思わない。多くのことを詰め込みすぎると，多くの場合は消化不良を起こし，難しかったという印象しか残らないからだ。しかし，基礎的な内容がどこにつながっていくのかを頭の片隅に入れておいて，それが徐々に本質的な理解へとつながっていくのは，案外と楽しい時間ではないだろうか。特に，学生にとってたいへん興味のある自動車や航空機の設計にそれがつながっているとなれば，興味はさらに膨らむだろう。また，工学部（や，数学科以外の理学部）の学生にとっては，面倒くさい定理の証明よりも，「使う」ことを意識するほうが理解が進むと考えられる。

本書は，学部 2 年で「ベクトル解析」を学習した学生が，高学年あるいは大学院生になった際に，「構造力学」や「固体力学」といった科目をもう一度同じ

本で学習することを前提に企画されている。もちろん，「構造力学」では，はりやトラス，板に殻あるいは大たわみ理論といった内容が，また，大学院で学ぶ「固体力学」では，粘弾性，塑性，クリープあるいは大変形といった高級な内容も本来含まれるべきであるが，ここではそれらをいっさい割愛し，ひずみや応力，保存則といった基本的な内容と弾性体の力学に絞って解説してある。また，固体力学の分野では，ベクトル解析の知識を前提としてテンソル解析を利用する。これをできるだけ，ベクトル解析からの連続性を維持したまま導出することを試みた。一般に難解とされるテンソル解析も，ベースとなるベクトル解析をきちんと理解すれば，それほど難しくないはずである。ただし，読者の理解を最優先するため，多少荒っぽいところもある。厳密な議論は他書を参考にされたい。また，本書の具体的なゴールは有限要素法とした。現在，計算固体力学の分野で広く使われているこの手法は，読者の興味を引き付けることができるだろうと考えたからである。簡単なコードもつけた。理解が深まるよう，ぜひ参考にしてほしい。さらに，この教材の理解に困らないように，工業数学をかいつまんで付録に書き出している。本書の多くの章で，数は多くはないが例題を設けている。これは，定期テスト対策というより，無味乾燥な式や定理に現実味を持ってほしかったからである。

本書の執筆にあたり，静岡大学の矢代茂樹先生，金沢工業大学の山岡英孝先生にはたいへん丁寧に原稿に目を通していただき，数多くのご指摘をいただいた。また，原稿の作成においては，東北大学の今村洋弥君，笹山俊貴君にたいへんなご支援をいただいた。心より感謝の意を表します。

学生に理解させようと思って書いたはずが，ご同業の先生方の顔が目に浮かび，厳密かつ難解になってしまうことはよくあることである。本書がそうなっていないことを願いながら，まえがきを終わりにする。

2013 年 1 月

岡部朋永

本書のためにホームページを開設しました：http://www.plum.mech.tohoku.ac.jp/
質問はつぎのアドレスまでお送りください：vector@plum.mech.tohoku.ac.jp

# 目　　　　次

## 5.　積　分　公　式



## 6.　添字表記と座標変換



## 7.　テンソル入門



## 8.　変形とひずみ

## 9.　応力とつり合い

## 10.　連続体における保存の法則



## 11.　力学的な作用に対する変形応答に関する式



## 12.　弾 性 体 の 力 学



## 13.　有限要素プログラミング入門

## 14.　一般テンソル解析

## 15.　一般テンソル解析による固体の変形

# 1　ベ　ク　ト　ル

高校数学で習うベクトルの演算手法について簡単に説明する。表記法などがこれまで習ってきたものと異なるかもしれない。単なる慣れの問題であるので，あまり神経質にならずに読み進めてほしい。

## 1.1　ベクトルとは

高校数学でも学ぶように，ベクトルとは大きさと向きの両方を有するものである。例えば，単位時間にどれくらい移動したかを表すものに速度ベクトルがある。これは速さと方向を計るために便利である。また，物体にどれくらい運動を与えることができるかを計るものとして，力ベクトルがある。これも力の大きさとその方向を一つで表現できるので，やはりたいへん便利である。

一般に，ベクトルはつぎの二つのいずれかで表すことが多い。

$$\boldsymbol{a},\ \overrightarrow{\mathrm{a}} \tag{1.1}$$

前者は太字にすることによってベクトルであることを明示しており，後者は上に矢印をつけることによってベクトルであることを表している。この本では，太字による方法を採用することにする。

## 1.2　ベクトルにおける加法・減法

二つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ があるとき，その和は図 **1.1** に示すように，二つのベクトルが作る平行四辺形の対角線となる（加法）。新しくできたベクトルを $\boldsymbol{c}$ とす

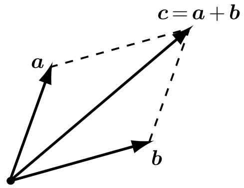


**図 1.1**　ベクトルの加法

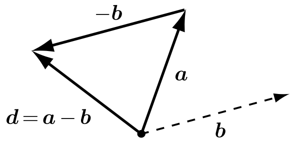


**図 1.2**　ベクトルの減法

ると，つぎのように書くことができる。

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \tag{1.2}$$

**図 1.2** に書かれているように，ベクトルに負符号をつけると，大きさは同じで向きが反対になる。そこで，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の終点と $-\boldsymbol{b}$ の始点とを結んだものが，二つのベクトルの差となる（減法）。新しくできたベクトルを $\boldsymbol{d}$ とすると，つぎのように書くことができる。

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} \tag{1.3}$$

さて，**図 1.3** に示すような直交座標系と三つのベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を考える。これらは大きさが 1 で，それぞれ $x$, $y$, $z$ 軸を向いている。これらのベクトルを基本ベクトルという。どのようなベクトルもこの三つの基本ベクトルの和によって，つぎのように表すことができる。

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k} \tag{1.4}$$

この基本ベクトルの前の係数を，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の成分と呼ぶ。このことから，つぎのように書くこともある。

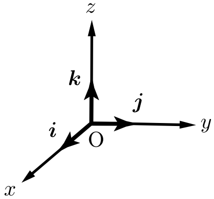


**図 1.3**　直交座標系と基本ベクトル

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) \tag{1.5}$$

この成分を用いると，ベクトルの和や差はつぎのように書くことができる。例えば，ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の和 $\boldsymbol{c}$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c} &= \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\\ &= (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) + (b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k})\\ &= (a_1 + b_1)\boldsymbol{i} + (a_2 + b_2)\boldsymbol{j} + (a_3 + b_3)\boldsymbol{k} \end{aligned}\tag{1.6}$$

となり，その成分は

$$\boldsymbol{c} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \tag{1.7}$$

となる。また，ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の差 $\boldsymbol{d}$ はつぎのように与えられる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d} &= \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\\ &= (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) - (b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k})\\ &= (a_1 - b_1)\boldsymbol{i} + (a_2 - b_2)\boldsymbol{j} + (a_3 - b_3)\boldsymbol{k} \end{aligned}\tag{1.8}$$

つまり，ベクトル $\boldsymbol{d}$ の成分は

$$\boldsymbol{d} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3) \tag{1.9}$$

となる。

## 1.3　ベクトルの内積・外積

ベクトルにおける特徴的な演算として，内積と外積がある。ここでは，この二つを取り上げる。

まず，内積について説明する。**図 1.4** に示すように二つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の始点を合わせたときに，内積はつぎのように与えられる。

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos\theta \tag{1.10}$$

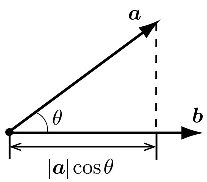


**図 1.4**　ベクトルの内積

ここで，$\theta$ は二つのベクトルの間の角度である。また，$|\boldsymbol{a}|$ と $|\boldsymbol{b}|$ は二つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の大きさを表している。

つぎに，成分でも内積を考える。三つの基本ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はたがいに直交している。よって

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1\\ &\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0 \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

により与えられる。これを利用すると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\ &= a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \end{aligned} \tag{1.12}$$

と書ける。これが内積を成分で表示したものである。

つぎに，外積を紹介する。外積はつぎのように定義される。

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta)\boldsymbol{n}\\ &\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{b} \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

このとき，$\boldsymbol{n}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の両方に垂直な基本ベクトルであり，**図 1.5** のように $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に右ねじを回転させたときの進行方向である。これをもとに三つの基本ベクトル間の外積を調べると

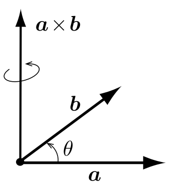


**図 1.5**　ベクトルの外積

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0 \\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j} \end{array}\right\} \tag{1.14}$$

となる。これを利用すると，つぎのようになる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\times(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}) \\ &= (a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{1.15}$$

---

**例題 1.1**　$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$ のとき

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

が成り立つことを示せ。

---

**【解答】**

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\times(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}) \\ &= (a_2b_3-a_3b_2)\,\boldsymbol{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\,\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\,\boldsymbol{k} \quad （\because\ \text{式}\,(1.15)） \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} \\ &\quad （\because\ 2\times 2\ \text{の行列式の公式}） \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad （\because\ 3\times 3\ \text{の行列式の公式}） \end{aligned}$$

◇

---

**例題 1.2**　つぎの式が成り立つことを示せ。

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

---

**【解答】** 先の例題より

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) &= (a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}) \\
&\quad \cdot\left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}\right) \\
&= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}+a_2\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

となる。この式をスカラー 3 重積という。 $\diamondsuit$

# 索　　　　引

## —— 著 者 略 歴 ——

1996 年　慶應義塾大学理工学部機械工学科卒業
1998 年　慶應義塾大学大学院理工学研究科前期博士課程修了（機械工学専攻）
1999 年　慶應義塾大学大学院理工学研究科後期博士課程修了（機械工学専攻）
　　　　博士（工学）
2001 年　独立行政法人産業技術総合研究所研究員
2002 年　東北大学助教授
2007 年　東北大学准教授
　　　　現在に至る

ベクトル解析からはじめる固体力学入門
Introduction to Vector Mathematics and Solid Mechanics


2013 年 3 月 5 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

著　者　岡（おか）　部（べ）　朋（とも）　永（なが）
発 行 者　株式会社　コロナ社
　　　　代 表 者　牛来真也
印 刷 所　三美印刷株式会社

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発行所　株式会社　コ ロ ナ 社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–04630–4（新宅）（製本：愛千製本所）G
Printed in Japan