# ま　え　が　き

この本は理工系大学の初年級の学生諸君のために基礎的な数学（微分積分学と線形代数学）の演習問題を提供しようとするものである．この本の前身である「微分積分・線形代数 数学演習」は長い間使われてきたがミスプリントや解答の誤りが気になっていた．この本ではできるだけそれを正し，問題のさしかえと補充を行い，全体の記述も改めるべきところは改めた．

以下本書での学習にあたって留意すべきことを箇条書きで記す．

(1) 本書は学生諸君が自習に際しての参考書として用いてもよいし，教室での演習の教科書として用いてもよい．

(2) 本書が教室で用いられる場合は別に微分積分学および線形代数学の講義が行われていることを想定している．本書で与えられる問題の全てを演習の時間に解かれることは想定していない．しかし，学生諸君はむしろ，教室で解かれなかった問題を自宅で解いてみてもらいたい．

(3) 全体を 2 部に分け，第 1 部を微分積分学とし，そのはじめには学生諸君が数学を学ぶ基礎として知っておいてほしい問題を集めておいた．その一部は線形代数を学ぶ際にも必要となるような常識に類するものもある．慣れるまで随時参考にしてもらいたい．そのあとに微分積分学の標準的な講義に即した問題を集めてある．第 2 部に線形代数学の問題を集めた．

(4) 各節では典型的な問題を例題として示し，その解答例を与え，その後に問題を与えてある．問題の解答は巻末に示してあるが，そのいくつかは丁寧に解説し，いくつかは略解のみを示してある．学生諸君は単なる計算結果だけを見るのではなく，できるだけ完全な解答文を含めて解答をつくる練習を試みるべきである．

2005 年春

著　者

## ま　え　が　き

本書を発行していた昭晃堂が 2014 年 6 月に解散したことに伴い，この度，コロナ社より継続出版することになった．この機会に，若干の問題の追加と修正を行った．その際，校正等でコロナ社には大変お世話になった．ここに記して感謝の意を表したい．昭晃堂にて 2005 年 4 月の 1 刷発行から 9 刷までに至った本書が，引き続き多くの方にご拝読いただき，役に立つならば，著者としてこの上ない喜びである．

2015 年 2 月

著　者

# 目　次

## —— Part I ——

### 1.　基　礎　学　力



### 2.　極限値と関数



### 3.　微分係数と導関数



### 4.　積　　分

## 5.　多変数関数，偏微分とその応用



## 6.　重積分とその応用



## 7.　級数および微分方程式



# —— Part II ——

## 8.　行列の基本演算

## 9. 行　　列　　式



## 10. 空間ベクトル



## 11. ベクトル空間



## 12. 線形写像と行列

## 13. 内 積 空 間



## 14. 固有値，固有ベクトルと対角化

# — Part I —

# 1 基　礎　学　力

この章では，(1) 数学で使われる基本的な記号や論理，集合について，および，(2) 高等学校までの知識で解くことの期待できる主として微分積分学の基礎にかかわる問題 について扱う．

したがって，この章で扱うことは，基本的には今すぐにでも解けなければならないことであるが，高等学校等ではあまり力を入れていないことも含まれる．そこで，大学での数学の運用に慣れていなければ戸惑うこともあるであろう．そのような問題はあまり気にせず当面とばして，必要に応じて何度でも戻ってきて解答を試みてもらいたい．

## 1.1　基礎的事項 (1)

この節にあるのは，数学で使われる基本的な記号や論理その他の事項である．

**［論理］**　ここではローマ字の大文字（$A, B, \ldots$）をある条件を述べる文とする．このとき「$A$ ならば $B$ である」というような（と言い換えられる）文を命題という．

- 「$A$ ならば $B$ である」を「$A \Rightarrow B$」と略記することがある．
- 「$A$ でない ($A$ の否定)」を「$\overline{A}$」と略記することがある．
- 「$A$ でありかつ $B$ である」の否定は「$A$ でないかまたは $B$ でない（$A$ か $B$ の少なくとも一方は成り立たない)」である．
- 「$A$ であるか $B$ である（$A$ か $B$ の少なくとも一方は成り立つ)」の否

定は「$A$ でなく $B$ でもない」である．

- 「$A$ ならば $B$ である」という命題が真のとき，$A$ は $B$ の **十分条件** であるといい，$B$ は $A$ の **必要条件** であるという．
- $A$ が $B$ の十分条件であり，かつ必要条件でもあるとき，$A$ と $B$ は**同値な条件**であるという．このことを「$A \Leftrightarrow B$」と略記することがある．

**［集合］**　集合の本当に数学的な定義は難しい．ここでは「はっきりと区別のつく対象の集まり」というふうに理解しておくことにする．以下に述べるのは集合に関する要項であって必要なすべてではない．

次のような記号が一般に使われている．

自然数全体 (の集合) $\mathbb{N}$,　整数全体 $\mathbb{Z}$,　有理数全体 $\mathbb{Q}$,
実数全体 $\mathbb{R}$,　複素数全体 $\mathbb{C}$

- 集合を表すのに大文字のローマ字が使われることが多い．ある対象 $a$ が集合 $A$ に属することを $a \in A$ (または $A \ni a$) と書く．
- 集合を書き表すのにその集合に属する対象 (元とか要素ともいう) を書き並べるやり方とその集合に属するための必要十分条件を書くやり方がある．

---

**例 1.1**

$$\begin{aligned}\text{偶数全体の集合} &= \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 2m,\ m \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

---

- 「$a \in A$ ならば $a \in B$ である」が真のとき「$A \subset B$ (または $B \supset A$)」と書き，$A$ は $B$ の部分集合であるという．(本によっては $\subset$ の代わりに記号 $\subseteq$ や $\subseteqq$ を用い，$A \subset B$ は $A$ と $B$ が完全に同じ場合 ($A = B$) には用いないとしてあるものがあるが，この本では $A = B$ は $A \subset B$ の特別の場合として扱うことにする．そして $A \subset B$ であって $A \neq B$ であることは $A \subsetneqq B$ と書く．)
- $A \cup B$ とは $A$ か $B$ の少なくとも一方に属する対象の全部を集めた集合である．また，$A \cap B$ とは $A$ と $B$ の両方に属する対象の全部を集めた

集合である.

$$A \cup B = \{a \mid a \in A \text{ または } a \in B\}$$
$$A \cap B = \{a \mid a \in A \text{ かつ } a \in B\}$$

- まったく要素を持たない集合というものを考え「空集合」という．記号 $\emptyset$ で表す．$\emptyset$ はどんな集合の部分集合でもあると考えられる: $A$ を勝手な集合とするとき $\emptyset \subset A$.
- 集合の演算に関する記号 ($\cup$, $\cap$, $\subset$, $\supset$, $=$) が一つの式の中に出てきたときには $\cap$ や $\cup$ を先にまとめて読み，$\subset$, $\supset$, $=$ 等を後で読む．必要なら括弧 ( ) 等を使って紛れのないようにする．例えば，

$$A \cup B \supset A \cap B \quad \text{は} \quad (A \cup B) \supset (A \cap B) \quad \text{のことである.}$$

[**総和記号** $\sum$ ]　和を表す記号である．次の書き方は既知であろう．

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

- 次のような書き方もすることがある．

  $\sum$ の下にある条件を書くとその条件を満たすすべてのものにわたって和をとることを表す．

---

**例 1.2**　$S = \{3, 5, 7\}$ とすると，$\displaystyle\sum_{p \in S} a_p = a_3 + a_5 + a_7$

---

**例 1.3**

$$\sum_{1 \leqq i,j \leqq 3} a_{ij} = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{31} + a_{32} + a_{33}$$

---

**例 1.4**　$\displaystyle\sum_{1 \leqq i < j \leqq 3} x_i x_j = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$

---

- これらの記号を用いるときには特に言及されない暗黙の条件があることがある．数学の記号も言語の一種であるから，それが置かれた文脈から

理解されるような書き方をするのである．上の例では $i$ や $j$ は整数の範囲で考えるということは当然のこととみなされている．特に前後の関係から和をとる範囲が明らかなときには $\sum$ の下に何も書かないこともある．

**［相乗記号 $\prod$ ］**　積を表す記号である．

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1\,a_2\cdots a_n$$

という使い方をする．

- $\prod$ の下にある条件を書くとその条件を満たすすべてのものにわたって積をとることを表す．

---

**例 1.5**　$S=\{3,5,7\}$ とすると，$\displaystyle\prod_{p\in S} a_p = a_3\,a_5\,a_7$

---

**例 1.6**　$\displaystyle\prod_{1\leqq i,j\leqq 3} a_{ij} = a_{11}\,a_{12}\,a_{13}\,a_{21}\,a_{22}\,a_{23}\,a_{31}\,a_{32}\,a_{33}$

---

**例 1.7**　$\displaystyle\prod_{1\leqq i<j\leqq 3} x_i x_j = (x_1x_2)(x_1x_3)(x_2x_3) = {x_1}^2\,{x_2}^2\,{x_3}^2$

---

**問題 1.1.1**　「$A$ ならば $B$ である」という命題が真のとき，次の命題が真であるかどうかを答えよ．

(1)　「$B$ ならば $A$ である」（もとの命題の **逆**）

(2)　「$A$ でなければ $B$ でない」（もとの命題の **裏**）

(3)　「$B$ でなければ $A$ でない」（もとの命題の **対偶**）

**問題 1.1.2**　次の各命題は「3 と 5 と 8 は 10 の約数である」という命題の「逆」であるか，「裏」であるか，「対偶」であるか，あるいは「どれでもない」のかを答えよ．

(1) 「2 は 10 の約数でない」

(2) 「3 と 5 と 8 以外の整数は 10 の約数でない」

(3) 「10 の約数は 3 と 5 と 8 である」

(4) 「10 の約数でないものは 3 と 5 と 8 のどれでもない」

**問題 1.1.3** 次の記述は正しくない．その理由を述べ，正しい記述に直せ．

(1) $1 \subset \mathbb{N}$

(2) $\{2, 3, 4\} \in \mathbb{N}$

(3) $A \cup B \subset A \cap B$

**問題 1.1.4** $A, B, C$ を集合とする．次のことを証明せよ．

(1) $A \subset A$

(2) $A \subset B$ かつ $A \supset B$ なら $A = B$

(3) $A \subset B$ かつ $B \subset C$ なら $A \subset C$

(4) $A \cap B \subset A \subset A \cup B$

(5) $A \subset C$ かつ $B \subset C$ なら $A \cup B \subset C$

(6) $C \subset A$ かつ $C \subset B$ なら $C \subset A \cap B$

**問題 1.1.5** 集合に関する考察を行うとき，取り扱う集合がすべてある十分大きな集合の**部分集合**に限られている場合もある．このようなときはその十分大きな集合を**全体集合**と呼ぶ．（例えば，平面上の図形だけを考えている場合は全体集合としては平面の点の全部からなる集合を考えればよい.）ここでは全体集合を $E$ と書き，すべての集合は $E$ の部分集合とみなそう．

集合 $A$ に対して

$$A^c = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

とおく．$A^c$ を $A$ の**補集合**という．$A, B, C$ を集合（$E$ の部分集合）とする．次のことを証明せよ．

(1) $A \cup A^c = E$

(2) $A \cap A^c = \emptyset$

(3)　$(A^c)^c = A$

(4)　$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,　$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$　（ド・モルガンの法則）

**問題 1.1.6**　次の八つの条件はすべて互いに同値であることを示せ．（前問の記号を使う）

① $A \subset B$　② $A \cup B = B$　③ $A \cap B = A$　④ $A^c \supset B^c$
⑤ $A^c \cup B^c = A^c$　⑥ $A^c \cap B^c = B^c$　⑦ $A^c \cup B = E$　⑧ $A \cap B^c = \emptyset$

**問題 1.1.7**　(1)　$\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\right)$ を $\sum$ を使わず書け．

(2)　$\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{2} a_{ij}\right)$ を $\sum$ を使わず書き，$\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{2} a_{ij}\right)$ を示せ．

$$\left(\text{ここで出てきた和を } \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} \text{ とか } \sum_{\substack{1 \leqq i \leqq 2 \\ 1 \leqq j \leqq 3}} a_{ij} \text{ などと書く．}\right)$$

**問題 1.1.8**　$\displaystyle\prod_{1 \leqq i < j \leqq 4} (x_i - x_j)$ を $\prod$ を使わず書け．

## 1.2　基礎的事項 (2)

---

**例題 1.1**　不等式 $|x+y| \leqq |x| + |y|$ を証明せよ．

---

**【解答】**　$-|x| \leqq x \leqq |x|$ と $-|y| \leqq y \leqq |y|$ の辺々をそれぞれ加えると $-(|x| + |y|) \leqq x + y \leqq |x| + |y|$．したがって，$|x+y| \leqq |x| + |y|$．

**（別解）**　$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leqq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$，つまり $(x+y)^2 \leqq (|x| + |y|)^2$．この両辺の正の平方根をとって $|x+y| \leqq |x| + |y|$．　◇

**注意**　本書ではことわらない限り，数とは実数のこととする．

**問題 1.2.1**　$h > 0,\ n = 1, 2, \ldots$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ.（必要に応じて 2 項定理を用いよ.）

(1)　$nh < (1+h)^n$

(2)　$\dfrac{n(n-1)}{2}\,h^2 < (1+h)^n$

(3)　$\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\,h^k < (1+h)^n \quad (1 \leqq k \leqq n)$

**問題 1.2.2**　$0 < b < a$ のとき，次の不等式を示せ.

(1)　$2(a-b)b < a^2 - b^2 < 2(a-b)a$

(2)　$3(a-b)b^2 < a^3 - b^3 < 3(a-b)a^2$

(3)　$n(a-b)b^{n-1} < a^n - b^n < n(a-b)a^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

**問題 1.2.3**　$0 < |x| < 1$ かつ $t$ が $0$ と $x$ の間にある値のとき，

$$\left|\frac{x-t}{1+t}\right| < |x|$$

となることを示せ.

---

**例題 1.2**　$\tan\dfrac{29\pi}{6}$ の値を求めよ.

---

**【解答】**　まず，$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ での $y = \tan x$ の振る舞いを思い浮かべよ．これは区間 $n\pi - \dfrac{\pi}{2} < x < n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ で繰り返される ($n$ は整数).

$$\frac{29\pi}{6} = 5\pi - \frac{\pi}{6} \text{ であるから } \tan\frac{29\pi}{6} = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

となる.　◇

---

**例題 1.3**　$A, a, b$ は正の数，さらに $a \neq 1,\ b \neq 1$ とするとき，

$$\log_b A = \frac{\log_a A}{\log_a b}$$

を示せ.

---

**【解答】**　$a^{\log_a A} = A = b^{\log_b A} = (a^{\log_a b})^{\log_b A} = a^{(\log_a b)(\log_b A)}$ であるから，$\log_a A = (\log_a b)(\log_b A)$ となる．したがって，$\log_b A = \dfrac{\log_a A}{\log_a b}$.　◇

# 索　　　　　引

理工系　基礎数学演習

Problems of Mathematics



2015 年 4 月 20 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

著　者　石田晴久
伊東裕也
榎本直也
大野真裕
木田雅成
久藤衡介
田吉隆夫
内藤敏機
山口耕平
山田裕一

発 行 者　株式会社　コロナ社
代 表 者　牛来真也

印 刷 所　三美印刷株式会社

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10

発行所　株式会社　コ ロ ナ 社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)

ホームページ http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–06109–3　(柏原)　(製本：愛千製本所)

Printed in Japan