工学を理解するための
応　用　数　学

—微分方程式と物理現象—

博士(理学)　佐藤　求 著

コ ロ ナ 社

ま　え　が　き

数学者の厳密さ（と，天文学者の大胆さ）を表す有名な冗談がある。

> 天文学者と物理学者と数学者（とされている）がスコットランドで休暇を過ごしていたときのこと，列車の窓からふと原っぱを眺めると，一頭の黒い羊が目にとまった。天文学者がこう言った。「これはおもしろい。スコットランドの羊は黒いのだ」物理学者がこう応じた。「何を言うか。スコットランドの羊の中には黒いものがいるということじゃないか」数学者は天を仰ぐと，歌うようにこう言った。「スコットランドには少なくとも一つの原っぱが存在し，その原っぱには少なくとも一頭の羊が含まれ，その羊の少なくとも一方の面は黒いということさ」
>
> イアン・スチュアート：現代数学の考え方，講談社 (1981)[†]

本書は理工系専門学校の教科書または理工系大学初年度の副読本程度のレベルを目安に，物理や電気の勉強をする上で利用されている数学を理解することを目的に執筆されたものである。絶対に間違いのない数学者のやり方ではなく，実際の問題に応用される範囲で正当な物理学者のやり方で問題に挑み，一定レベルの理解を得た上で，興味が沸くなら「羊の反対側の毛色」を気にするようにしよう。

本書ではたびたび「マトモ」という表現が出てくる。数学書ならば「たかだか有限個の不連続点を除いては連続な関数」とか「n 階微分可能な関数」などと書くだろうが，そこで「たかだか有限個？」，「微分不可能な関数というのは，自分が本当に知りたい現実的な問題に頻出するのだろうか？」といった心配をさせるよりも「厳密には例外もあるけれど，物理的現象を考える上では，あまり問題にならない」というメッセージを乗せたつもりである。その他，例外的な条件の無視や，大胆な口語調等，不真面目に見える部分も多々あろうがお目こぼし願い，つねに応用面を意識した展開や，実際に利用している人々の心理に近い表現等，メリットのほうを評価してしていただければ幸いである。

1 章から 7 章では，微分の定義から始めて微分方程式までをまとめた。特に，「微積分を使ってこそ本当の定義が与えられる物理量」について，「高校物理では意味が不明瞭なまま憶えさせられ，専門分野に進んだ後には既知の事実として振り返られない」といったことを憂慮し，微積分を使った物理量の再定義にもかなりの紙面を費やした。

---

† ただし，日本語訳はサイモン・シン著 青木薫訳：フェルマーの最終定理 ピュタゴラスに始まり，ワイルズが証明するまで，新潮社 (2000) から引用した。

積分や微分方程式に関しては，重要な例について，解答を「見知って」いればよいという程度の扱いとし，解法のテクニックはあまり扱わなかった（正答を代入して確認ができればよいとした）。

7 章では，おまけ的な意味で粘性抵抗下での強制振動までを紹介したが，「運動方程式を解くことで，減衰運動と単振動の式が出てくる」ことが示される 6 章を本書の最大の目的とした。

8 章から 10 章では，応用上重要な話題をいくつか取り上げた。ラプラス変換については少し難易度が高いかという心配もあったが，工学者の多くが，微分方程式を解く際に魔法のようにラプラス変換表を引く習慣があるようなので，その面白みを紹介したく紙面を割いた。

電気工学分野は微積分の話題の宝庫なので例題などで多く取り上げたが，1 か所にまとめはしなかった。特に交流電気と複素数の関連はページ数の関連で取り上げられなかったことを残念に思う。

演習問題に関しては，多少の計算練習はともかくとして，ほぼ全域にわたり「現実を表す問題」を例題，練習問題とするようにした。そのため，問題数は若干少なめとなったが，手を動かして解く価値のある問題をそろえたつもりだ。なお，練習問題の解はノートにまとめておくのが正攻法だろうが，その結果を後ろのページで改めて利用することも多いので，計算結果だけはこの本の余白に書き込んでおくことを薦める。

2019 年 1 月

佐藤　求

目　　　　次

1. 微　　　　分

2. テイラー展開

3. exp　関　数

4. 積分の基礎と意義

5. 積 分 の 技 法

6.　微分方程式 1

7.　微分方程式 2

8.　次　元　解　析

9.　フーリエ解析

10.　ラプラス変換

付　　　録

1 微　　　分

「掛算」,「割算」は小学生でも使いこなせる基本的な計算として認識されている。しかし，現実的な応用計算を考えるとき，これらの計算に必須な,「全員に**同じ数だけ**〜」,「**一定の割合で**〜」,「**同じ速度で**〜」といった条件は成立しない場合が多い。気持ちとしては「掛算」,「割算」だが,「一定」という条件を外した計算規則が「積分」と「微分」である。逆にいうと，微積分を使わなければ，**変化してゆく**対象に対して現実的な計算をすることはできないのである。
この目的のためには多少味気ない部分もあるが，まずは微分の基礎的な計算方法をマスターしてゆこう†。

1.1　平均の傾きと微分係数

「1 次関数 $y = ax + b$ のグラフは傾き a を持つ」という言葉は，まず，1 次関数のグラフでは「『傾き』という量が定義できる」ことと,「その傾きは一定である」ことを意味し，その上で「その傾きは a と等しい」ことを意味している。（前二者は決して自明のことではないので，意識して取り扱うべきである。）

図 1.1 を見てみよう。1 次直線 $y = 2x + 2$ のグラフが描かれ，何か所かで「傾き」が測れるように補助線が引いてある。1 次関数に関しては,「傾き」とは，2 点 (x_0, y_0), (x_1, y_1) によって

$$傾き = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \tag{1.1}$$

と定義される量である。ここで重要なことは「**いかなる $\boldsymbol{x_0}$，$\boldsymbol{x_1}$ をとっても，式 (1.1) は一定の値をとる**」ということである。

本来，式 (1.1) は (x_0, y_0) と (x_1, y_1) の 2 点を設定しなくては計算できない式なので,「その 2 点をどこに選んでも結果は同じであり，2 点を指定せずとも，“この直線の傾き” という

† その本質的な意味（微分は割算，積分は掛算）からすると意外だが，計算という意味では微分の方が積分よりもやさしいので，先に微分を学ぶ方がわかりやすい。

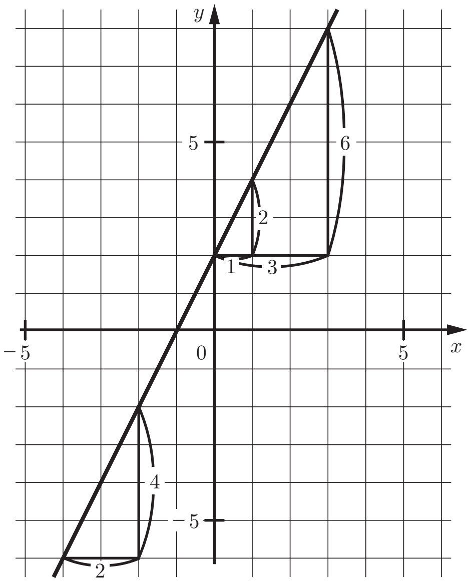


図 1.1　$y = 2x + 2$ のグラフ
x を 0 から 1 に増やせば y は 2 から 4 に増える。
x を 0 から 3 に増やせば y は 2 から 8 に増える。
$\dfrac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} = 2$ は x_1 の値がいくつでも成り立っている。
しかも，x_0 を変えてもこの比率は変わらない。そこで，1 次関数の場合には特に x_0，x_1 を指定せずに，「この関数の傾きは 2 である」という。

言葉で十分である」という事実は，1 次関数の場合にたまたま起こる幸運だと思うべきだろう。さもないと，発展した話をするときに大きな混乱が生じてしまうかもしれない。

現に，**図 1.2**（a）を見ると，場所によって「傾き」が変わってしまうことが明白になる。「傾き」という言葉の定義は定かでなくとも，$y = x^2$ のグラフを見れば，常識的なセンスとして「$x = 0$ から離れるにしたがって傾きが急になっている」ことはわかる。

とはいえ，イメージだけの言葉を使って定義を与えないのでは話が進まない。式 (1.1) を改め，一般の関数に対する傾きを定義しよう。

平均の傾き

関数 $f(x)$ に対して

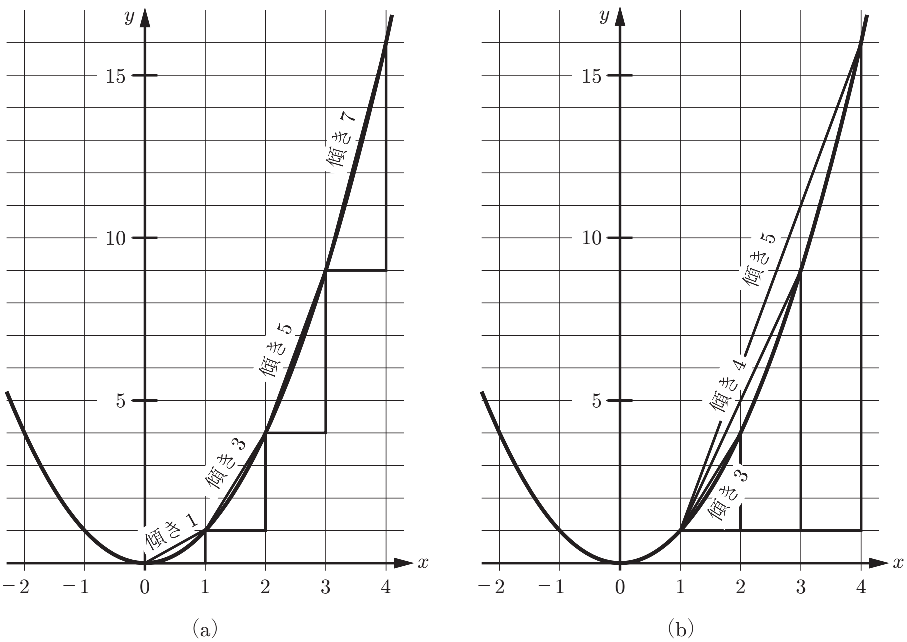
$$x_0，x_1 \text{ の間での「平均の傾き」} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{1.2}$$

と定義する。

ただし，$f(x)$ が不連続だったり，x_0，x_1 で値を持たないような場合については本書では扱わない†。

さて，しかし，図 1.2 の曲線を見ると，われわれの日常感覚的な意味での「傾き」は式 (1.2)

† そのような場合でも平均の傾きを考えることはできるが，物理的現象を理解するためという本書の目的には必要ない。



(a)　　(b)

図 1.2　$y = x^2$ のグラフとその傾き

(a) では $x_1 - x_0 = 1$ を一定に，(b) では $x_0 = 1$ を一定にし，いくつかの区間での平均の傾きを求めてある。いずれも，x_0 と x_1 をつないだ直線の傾きと考えることもできるが，2 次関数では平均の傾きが一定ではないことがわかる。

に従って描かれた直線の傾きとは違ったもののような気がする。特に図 (b) に示された「平均の傾き」は本当の「傾き」と大きく違うような気がする。これは次の二つの理由による。

- 「点 x_0 での傾き」という言葉を使いたいのに，図 (b) では始点 x_0 を決めても，終点 x_1 次第で「平均の傾き」が異なってしまうことがあらわになっている。
- 終点 x_1 が大きくなるほど ($x_1 - x_0$ が大きくなるほど)，補助直線が x^2 曲線から離れてしまっているため，x^2 曲線の傾きを出しているという気がしない。

この二つを一度に解消するうまい方法がある。$x_1 \simeq x_0$ ならば，「傾き」は x_1 を指定せずとも x_0 だけで (ほとんど) 決まるであろう。また，もちろん補助直線は非常に短く，元の曲線とほとんど一致するだろう。

もう少し厳密な言葉使いをしよう。$x_1 - x_0 = \delta x \simeq 0$ とするならば

$$x_1 = x_0 + \delta x, \qquad f(x_1) = f(x_0 + \delta x)$$

となり，平均の傾きの式は x_1 を含まなくなる (その代わり δx を含むわけだが，δx はきわめて小さいという極限操作を行うことにする)。

微分係数の定義

関数 $f(x)$ で，x_0 に対し

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \delta x) - f(x_0)}{\delta x} \tag{1.3}$$

が存在するとき[†1]，これを「$f(x)$ の x_0 での微分係数」あるいは「$f(x)$ の x_0 における導関数の値」，「$f(x)$ の微分の x_0 のときの値」などと呼び

$$f'(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \delta x) - f(x_0)}{\delta x} \tag{1.4}$$

と書く。

実際には，「数式に値を入れて出てきた値そのもの」よりも，微分により得られた「新たな関数の形」のほうが重要で[†2]，微分係数を求めるために微分するという意識は少ない。

1.2 導　関　数

われわれは式 (1.4) によって，日常的な感覚に一致する「傾き」を数学的に定義できたわけであるが，微分係数の値は x_0 によって変化する，つまり x_0 の関数になっているといえる($f(x) = x^2$ のように傾きが場所によって変化する場合を考えるために始めた話なので，もちろんそれでよい)。

これは「元の関数 $f(x)$ から，その傾きを求める新たな関数を生み出した」ということであり，その意味で次のように書かれる。

微分の定義

関数 $f(x)$ の適当な範囲で

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} \tag{1.5}$$

が存在するとき，これを「$f(x)$ の微分」あるいは「$f(x)$ の**導関数**」と呼び

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} \tag{1.6}$$

と書く[†3]。

---

†1　この極限値が存在するとは限らないのでこのような表現をするが，実用的な関数においてはあまり心配しないで構わない。

†2　「値を計算せずに関数形で納得する」のを不安に感じる読者は，微分を学ぶ前に，いくつもの関数のグラフを描く練習を繰り返して「関数」に慣れておこう。

†3　$\mathrm{d}f = f'\,\mathrm{d}x$ を「微分」と呼び，$\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x$ は「導関数」または「微分商」とする呼び方もある。

「微分係数を求める」という場合は x_0 を代入して傾きの**値**を求めることを意味するのに対し，「微分する」あるいは「導関数を求める」という場合は，式 (1.6) によって新たな関数を求める（**関数形**を考える）ことを意味している。

この際，$\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ と書かずに $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ で済ますこともあるし，あらわに書いてもあまり長くない関数，例えば $f(x)=\sin x$ 程度なら $\dfrac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x}$ と書いたり，逆に $f(x)=A\sin(\omega t+\theta)$ のような長い関数なら $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big\{A\sin(\omega t+\theta)\Big\}$ と下に降ろしたりと，適時書きやすい書き方を使用する。

しかし，$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\cancel{\mathrm{d}}f}{\cancel{\mathrm{d}}x}$ のような約分（？）は**絶対にしてはいけない**[†1]。$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ の d は変数ではなく記号だからだ（字体に注意）。

f' はラグランジュ流書式，$\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ はライプニッツ流書式と呼ばれる。高校教科書等ではラグランジュ流書式が主流であるが，ライプニッツ流書式のほうが多くの面で優れているので本書ではライプニッツ流書式を使う[†2]。

1.3 x^n の 微 分

微分の実用上の意味に触れる前に，まずは計算規則を身につけながら微分の感覚を養っていくとしよう。

微分の意味が「傾き」である以上，もっとも簡単な微分は「傾きが一定の関数」すなわち $f(x)=ax+b$（a，b は定数）の微分であろう。さっそく，微分の定義式 (1.6) に従って，この微分を求めてみよう。

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} &= \lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}\\
&= \lim_{\delta x\to 0}\frac{\{a(x+\delta x)+b\}-\{ax+b\}}{\delta x}\\
&= \lim_{\delta x\to 0}\frac{a\cdot\delta x}{\delta x}\\
&= a
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

予定通り，傾き a が一定の値であることを確かめたところで，もう少し，順を追って整式の微分公式を求めてゆこう。

---

†1　例えば，$\dfrac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\cancel{\mathrm{d}x}x}{\cancel{\mathrm{d}x}}=x$ のような**間違い**をやらかす人がいるが，$(\mathrm{d}x^2)$ や $(\mathrm{d}x)$ はそれでひとまとまりの記号であり，分解してはいけない。

†2　ほかに，コーシー流書式やニュートン流書式がある。特にニュートンは微積分の発見をめぐってライプニッツと激しい業績争いをした。その影響で無理にニュートン流書式に拘（こだわ）ったイギリスでは，ライプニッツ流書式に従ったヨーロッパ大陸に比べて微積分学の発達が 100 年遅れたとまでいわれている。適切な表現記号が物事の理解にいかに重要かがわかるだろうか。

索　　　　引

—— 著 者 略 歴 ——

1994年　東京理科大学理学部物理学科卒業

2000年　九州大学大学院理学研究科博士課程修了（物理学専攻）
　　　　博士（理学）

2002年　読売東京理工専門学校（現：読売理工医療福祉専門学校）教員

2004年　日本工学院専門学校教員

2016年　群馬パース大学非常勤講師

2017年　群馬パース大学助教
　　　　現在に至る

工学を理解するための応用数学 — 微分方程式と物理現象 —

Applied Mathematics for Engineering — Differential Equation and Physics —

2019 年 4 月 5 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

編 著 者　佐　藤　　求
発 行 者　株式会社　コ ロ ナ 社
　　　　　代 表 者　牛 来 真 也
印 刷 所　三 美 印 刷 株 式 会 社
製 本 所　有限会社　愛 千 製 本 所

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発 行 所　株式会社　**コ　ロ　ナ　社**
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ　http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–06117–8　C3041　Printed in Japan　（森岡）