# 章末問題解答

**1 章**

**【1】** 以下は解答例であり，これ以外の生体システムも多数ある。

**生体システム**：筋収縮のモデル

**構成要素**：筋、神経など

**入力**：中枢神経系からの運動指令

**出力**：筋張力

**機能**：筋収縮によって関節運動を起こしたり，関節角度を一定に保つ。

なお，筋収縮のモデル（Hill のモデル）については 4 章に詳しい説明がある。

**【2】** $x$ にある値とその 2 倍の値を代入して $y$ の値を計算したとき，$y$ の値が 2 倍になれば線形である。(a) 線形，(b) 非線形，(c) 非線形，(d) 非線形

**【3】** $x$ や $y$ の高次の項を含まなければ線形である。高次の項や非線形関数を含む場合は非線形である。なお，$d^2ydt^2$ は 2 階の時間微分であるので，非線形な要素ではない。(a) 線形，(b) 線形，(c) 非線形，(d) 非線形，(e) 非線形

**【4】** まず 2 階微分を

$$\frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} \simeq \frac{d}{dt}\left[\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\right]$$

のように分解する。[] 内の分子の各項に式 (1.22) を適用すると

$$x(t+\Delta t) = \frac{x(t+\Delta t+\Delta t)-x(t+\Delta t)}{\Delta t}$$
$$x(t) = \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

となる。これらを最初の式に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\right] &\simeq \frac{\dfrac{x(t+2\Delta t)-x(t+\Delta t)}{\Delta t} - \dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}}{\Delta t} \\ &= \frac{x(t+2\Delta t)-2x(t+\Delta t)+x(t)}{\Delta t^2}\end{aligned}$$

を得る。この式は 2 階微分の近似式であるが，近似精度が低いので，別の近似式が用いられることが多い。詳細は 5 章を参照のこと。

## 2 章

【1】 サンプリング間隔が 0.95 秒なので, サンプリング周波数 $f_s \simeq 1.0526$ Hz となる。これをサンプリング定理を満たす最低の周波数である 2 Hz から引くと 0.9474 Hz である。したがって, 観測されるデジタル信号の周波数は $1-0.9474 \simeq 0.053$ Hz となる。

【2】 $f_s = 2$ Hz なので，$\Delta t = 0.5$ 秒である。$f(0)$ から 0.5 秒ごとにサンプリングすると

$f(0) = 0,\ f(0.5) = 0,\ f(1.0) = 0,\ f(1.5) = 0,\ \cdots$ となる。同様に $f(0.1)$ および $f(0.2)$ からサンプリングすると以下のようになる。

$f(0.1) = 0.588,\ f(0.6) = -0.588,\ f(1.1) = 0.588,\ f(1.6) = -0.588,\ \cdots$

$f(0.2) = 0.951,\ f(0.7) = -0.951,\ f(1.2) = 0.951,\ f(1.7) = -0.951,\ \cdots$

したがって，観測されるデジタル信号の振幅は

$f(0)$ からサンプリングする場合：0

$f(0.1)$ からサンプリングする場合：0.588

$f(0.2)$ からサンプリングする場合：0.951

となり，サンプリング開始点の位相によって変化することがわかる。これは，信号をサンプリングする場合に，定理を満たす最低の周波数を用いると振幅情報が再現できないことを意味している。したがって，信号に含まれる最高の周波数成分の 10 倍程度のサンプリング周波数を用いるのが望ましい。

【3】 パワーを用いて利得を計算する場合,

$$利得 = 10\log_{10}\frac{出力のパワー}{入力のパワー}$$

を用いて計算する。出力のパワーが入力の 1/2 になるとき, 利得は $10\log 1/2 = -3.01$ dB となる。フィルタの遮断周波数は利得が 3 dB 下がる周波数であるので，パワーが 1/2 になる点であることがわかる。

## 3 章

【1】 $dy_1/dt$=0 とすると，$y_2 = 0$ となる。これを 2 番目の式に代入すると，$K$，$D$，$M$ のいずれも正の値なので，$y_1$=0 となる。問題で与えられている微分方程式は，バネ-マス-ダンパ系の運動を表す式である。$y_1$ はおもりの位置，$y_2$ はおもりの速度である。したがって，この系はおもりの位置が 0（バネののびが 0），速度が 0 の点を中心とした運動をする。

【2】 式 (3.17) の定義から，問題で与えらている微分方程式のヤコビ行列は次のようになる。

$$\boldsymbol{J}(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{K}{M} & -\dfrac{D}{M} \end{bmatrix}$$

平衡点の性質を調べるために，$det(\boldsymbol{J} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$ を解く。

$$\boldsymbol{J} - \lambda \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -\dfrac{K}{M} & -\dfrac{D}{M} - \lambda \end{bmatrix}$$

なので，$det(\boldsymbol{J} - \lambda \boldsymbol{I}) = \lambda^2 + \dfrac{D}{M}\lambda + \dfrac{K}{M} = 0$ であり

$$\lambda_{1,2} = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4MK}}{2M}$$

となる。$D^2 - 4MK$ の正負によって，以下のように場合分けする。

(a) $D^2 - 4MK > 0$ のとき

$\lambda_1$，$\lambda_2$ ともに実数解になる。$D > \sqrt{D^2 - MK} < 0$ のとき，$\lambda_1$，$\lambda_2 < 0$ となり，平衡点は漸近安定である。$M > 0$，$K > 0$ なので $D < \sqrt{D^2 - MK}$ となることはない†。

(b) $D^2 - 4MK = 0$ のとき

$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$（実数解，重解）となり，平衡点は漸近安定である。

(c) $D^2 - 4MK < 0$ のとき

$Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) < 0$（複素数数解）となり，平衡点は漸近安定である。

この結果，いずれの場合も平衡点は漸近安定であることがわかる。問題の微分方程式で記述される系の運動には減衰があるので，十分に時間が経つと平衡点に近づく。

**【3】** $RLC$ 直列回路の電圧を表す微分方程式は以下のようになる。

$$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{1}{C}q(t) = 0$$

【状態方程式の求め方】

$q(t) = CV_c(t)$ かつ $\dfrac{dq(t)}{dt} = I(t)$ なので，$\dfrac{dV_c(t)}{dt} = \dfrac{1}{C}I(t)$ の関係がある。一方，電圧の微分方程式から

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{R}{L}I(t) - \frac{1}{L}V_c(t)$$

となる。これらをまとめると，次の状態方程式を得る。

† この不等式の両辺を 2 乗すると $D^2 < D^2 - 4MK$ となる。したがって，$0 < -4MK$ となり，$M > 0$，$K > 0$ という条件を満たさなくなってしまう。

$$\begin{cases} \dfrac{dV_c(t)}{dt} = \dfrac{1}{C}I(t) \\ \dfrac{dI(t)}{dt} = -\dfrac{R}{L}I(t) - \dfrac{1}{L}V_c(t) \end{cases}$$

ここで，上記の状態方程式と問題 (1) のバネ-マス-ダンパ系の状態方程式が同じ形であることに注意してほしい。一方は電気系，他方は機械系と，物理的には異なるシステムであるが，注目する物理量に関しては同じ挙動を示すことがわかる。したがって，問題の $RLC$ 回路の平衡点 $I = 0$，$V_c = 0$ は漸近安定であり，$I(t)$ と $V_c(t)$ は時間とともに減衰することがわかる。

**【4】** テーラー展開の公式式 (3.14) に $f(y_0 + \Delta y) = \sin(\theta_0 + \Delta\theta)$，$\theta_0 = 0$ を代入すると以下を得る。

$$\begin{aligned} \sin(\theta_0 + \Delta\theta) \quad = \quad & \sin(\theta_0) + \frac{d\sin(\theta_0)}{d\theta}\Delta\theta + \frac{1}{2}\frac{d^2\sin(\theta_0)}{d\theta^2}\Delta\theta^2 \\ & + \frac{1}{3!}\frac{d^3\sin(\theta_0)}{d\theta^3}\Delta\theta^3 + \cdots \\ & + \frac{1}{n!}\frac{d^n\sin(\theta_0)}{d\theta^n}\Delta\theta^n + \cdots \end{aligned}$$

ここで，$\sin\theta_0 = 0$，$d\sin(\theta)/d\theta = \cos\theta$ であること，および $\Delta\theta$ の高次の項は無視できるものとすると

$$\sin(\Delta\theta) \simeq \Delta\theta$$

となる。$\Delta\theta$ を $\theta$ と書き換えると，$\sin\theta \simeq \theta$ となる。これは，$\theta$ の変化が微小であるとき，$\sin\theta$ を $\theta$ で近似できることを意味している。振り子の微小な運動や直立姿勢制御系の解析などで，この近似が用いられる。

**【5】** 問題図の $f_1(t)$ は以下の 2 つの関数 $u_1(t)$ と $u_2(t)$ を合成したものである。

$$u_1(t) = u(t-1)$$
$$u_2(t) = -u(t-2)$$

**表 3.3** の時間シフトの項目（$f(t-a)$）を参考に，それぞれをラプラス変換して

$$U_1(s) = e^{-s}\frac{1}{s}$$
$$U_2(s) = -e^{-2s}\frac{1}{s}$$

なので，$f_1(t)$ のラプラス変換 $F_1(s)$ は

$$F_1(s) = e^{-s}\frac{1}{s} - e^{-2s}\frac{1}{s} = e^{-s}\frac{1-e^{-s}}{s}$$

となる。

問題図の $f_2(t)$ は $f_1(t)$ が周期 2 で繰り返したものである。$x(t)$ が周期 $T$ で繰り返す関数 $y(t)$ のラプラス変換は

$$Y(s) = \frac{1}{1-e^{-Ts}}X(s)$$

であるので,

$$F_2(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}}e^{-s}\frac{1-e^{-s}}{s} = \frac{e^{-s}}{s(1+e^{-s})}$$

中央の辺から右辺を導くには $(1-e^{-2s}) = (1+e^{-s})(1-e^{-s})$ を用いる。

## 4 章

**【1】** $f(x) = \dfrac{1}{1+\exp(x)}$ より $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{\exp(x)}{(1+\exp(x))^2}$ である。したがって次のように変形して

$$\frac{1+\exp(x)-1}{(1+\exp(x))^2} = \frac{1}{1+\exp(x)} - \frac{1}{(1+\exp(x)^2} = (1-f(x))f(x) \tag{1}$$

となる。

**【2】** 音速 $v$ と波長 $\lambda$ と周波数 $f$ の間には

$$v = f\lambda \tag{2}$$

の関係があるので

$$\frac{340\ \mathrm{m/s}}{18\ \mathrm{cm}} \simeq 1890\ \mathrm{Hz} \tag{3}$$

となる。

**【3】** 一般解は

$$x(t) = \frac{1}{k} + c_1\exp(\lambda t) + c_2 t\exp(\lambda t) \tag{4}$$

であるので $t$ で微分して

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = c_1\lambda\exp(\lambda t) + c_2\exp(\lambda t) + c_2 t\exp(\lambda t) \tag{5}$$

となる。

初期条件から

$$x(0) = \frac{1}{k} + c_1 = 0 \tag{6}$$

$$v(0) = c_1\lambda + c_2 = 0 \tag{7}$$

となり,

$$c_1 = -\frac{1}{k} \tag{8}$$

$$c_2 = \frac{\lambda}{k} \tag{9}$$

を得る。したがって

$$x(t) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k}\exp(\lambda t) + \frac{\lambda}{k} t \exp(\lambda t) \tag{10}$$

となる。

**【4】** 一般解は

$$x(t) = \frac{1}{k} + \exp(\alpha t)(c_3 \cos\beta t + c_4 \sin\beta t) \tag{11}$$

であるので $t$ で微分して

$$\begin{aligned} v(t) =& \frac{dx(t)}{dt} \\ =& \alpha \exp(\alpha t)(c_3 \cos\beta t + c_4 \sin\beta t) \\ &+ \exp(\alpha t)(-c_3\beta \sin\beta t + c_4\beta \cos\beta t) \end{aligned} \tag{12}$$

となる。

初期条件から

$$x(0) = \frac{1}{k} + c_3 = 0 \tag{13}$$

$$v(0) = \alpha c_3 + \beta c_4 = 0 \tag{14}$$

となり,

$$c_3 = -\frac{1}{k} \tag{15}$$

$$c_4 = \frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{k} \tag{16}$$

を得る。したがって

$$x(t) = \frac{1}{k} + \exp(\alpha t)\left(-\frac{1}{k}\cos\beta t + \frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{k}\sin\beta t\right) \tag{17}$$

となる。

【5】 節点では

$$f = d\frac{dx_1}{dt} + k_p x_1 + k_s(x_1 - x_2) \tag{18}$$

の関係がある。おもりでは

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} + k_s(x_1 - x_2) = 0 \tag{19}$$

であり,

$$x_3 = \frac{dx_2}{dt} \tag{20}$$

とおけば

$$m\frac{dx_3}{dt} + k_s(x_1 - x_2) = 0 \tag{21}$$

となる。

したがって

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{k_p + k_s}{d} & \dfrac{k_s}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{k_s}{m} & \dfrac{k_s}{m} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{d} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} f(t) \tag{22}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{23}$$

となる。

【6】 解図 4.1 に示すようになる。

【7】 初期条件から

$$x(0) = a_0 = x_0 \tag{24}$$

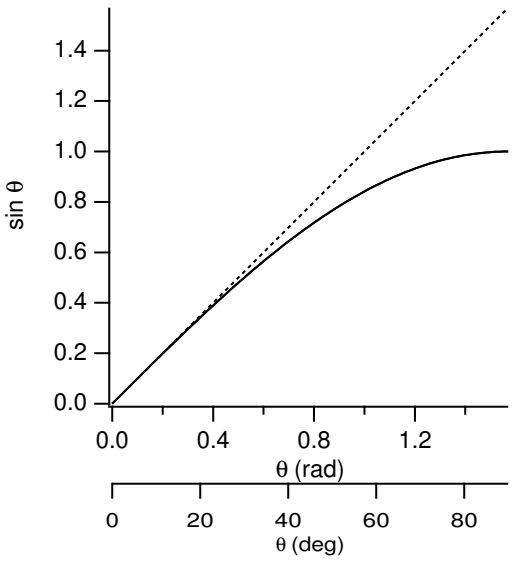
$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = a_1 = 0 \tag{25}$$

$$\left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=0} = 2a_2 = 0 \tag{26}$$

$$x(t_f) = x_0 + a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5 = x_f \tag{27}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_f} = 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4 = 0 \tag{28}$$

$$\left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=t_f} = 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3 = 0 \tag{29}$$




**解図 4.1**　$\theta$ と $\sin\theta$ の関係

となり，

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0, \tag{30}$$

$$a_3 = \frac{10}{t_f^3}(x_f - x_0),\ a_4 = -\frac{15}{t_f^4}(x_f - x_0),\ a_5 = \frac{6}{t_f^5}(x_f - x_0) \tag{31}$$

を得る。したがって

$$x(t) = x_0 + (x_0 - x_f)(15\tau^4 - 6\tau^5 - 10\tau^3) \tag{32}$$

となる。

**【8】** 式 (*4.233*) を零にする条件は $x = 0$ であるので $y$ 軸である。式 (*4.234*) を零にする条件は

$$y = \frac{x^3}{3} - x \tag{33}$$

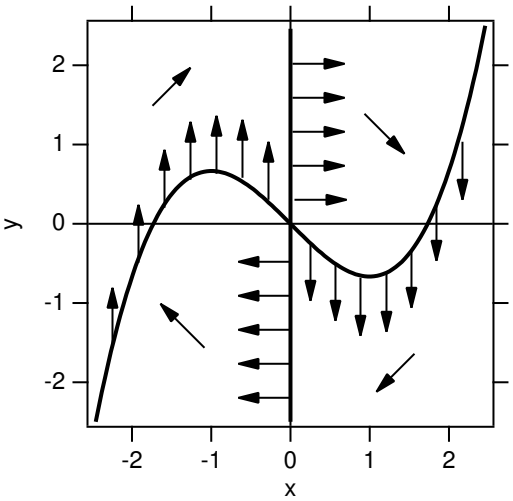
の曲線である (解図 4.2)。

$dy/dt = 0$ の直線上の点は，$y$ 方向の成分は零であるので水平方向で $x$ が大きくなる方向へ移動するか小さくなる方向へ移動するかのいずれかである。$x$ ヌルクラインの曲線より大きな $y$ の点（$y$ 軸上の正の点）では，$dx/dt > 0$ と

なるから $x$ の正の方向へ移動する。一方，$x$ ヌルクラインの曲線より小さな $y$ の点（$y$ 軸上の負の点）では，$dx/dt < 0$ となるので $x$ の負の方向へ移動する。

$dx/dt = 0$ の曲線上の点は，$x$ 方向の成分は零であるので垂直方向へ移動する。$x > 0$ のとき，式 (*4.233*) から $dy/dt < 0$ になるので，$y$ の負の方向へ移動する。$x < 0$ のときには反対に $y$ の正の方向へ向かう。

$x$ ヌルクラインと $y$ ヌルクラインで区切られた 4 つの領域の任意の点は，$x$ 軸方向と $y$ 軸方向の傾きの正負から，解図 4.2 のように時計回りに回転するような移動方向である。




**解図 4.2**　Van del Pol のモデルの位相面解析

**【 9 】** $i(t)$ を消去して

$$v(t) = r\frac{v_p(t)}{R} + rC\frac{dv_p(t)}{dt} + v_p(t) \tag{34}$$

$$= rC\frac{dv_p(t)}{dt} + \frac{r+R}{R}v_p(t) \tag{35}$$

となる。

ラプラス変換して

$$V(s) = rCsV_p(S) + \frac{r+R}{R}V_p(s) \tag{36}$$

$$= \left(rCs + \frac{r+R}{R}\right)V_p(s) \tag{37}$$

$$G(s) = \frac{V_p(s)}{V(s)} = \frac{1}{rCs + \dfrac{r+R}{R}} \tag{38}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{rC}}{s + \dfrac{r+R}{RrC}} \tag{39}$$

となる。このシステムは一次遅れ系である。

**【10】** $v(t)$ は単位ステップ関数なので特解は定数になる。定数を $C_2$ とおいて微分方程式に代入すると

$$1 = \frac{r+R}{R}C_2 \tag{40}$$

より

$$C_2 = \frac{R}{r+R} \tag{41}$$

となる。したがって一般解は

$$v_p(t) = \frac{R}{r+R} + C_1 \exp\left(-\frac{1}{C}\frac{r+R}{Rr}t\right) \tag{42}$$

となる。

初期条件 $t = 0$ で $v_p(0) = 0$ より

$$0 = \frac{R}{r+R} + C_1 \tag{43}$$

となり,

$$C_1 = -\frac{R}{r+R} \tag{44}$$

を得る。

したがって

$$v_p(t) = \frac{R}{r+R} - \frac{R}{r+R}\exp\left(-\frac{1}{C}\frac{r+R}{Rr}t\right) \tag{45}$$

となる。

$$i(t) = \frac{v(t) - v_p(t)}{r} \tag{46}$$

より

$$i(t) = \frac{1}{r+R} + \frac{R}{r(r+R)} \exp\left(-\frac{1}{C}\frac{r+R}{Rr}t\right) \tag{47}$$

となる。

**【11】**

$$\begin{aligned} V &= \frac{8.314\ \mathrm{J\ K^{-1}\ mol^{-1}} \times 293\ \mathrm{K}}{96485\ \mathrm{C\ mol^{-1}}} \ln \frac{1 \times 20 + 20 \times 450 + 0.5 \times 120}{1 \times 400 + 20 \times 40 + 0.5 \times 550} \\ &\simeq 42.8\ \mathrm{mV} \end{aligned} \tag{48}$$

## 5 章

**【 1 】** 指数関数の極限としてのネピア数の定義式は

$$e^x = \lim_{n\to\infty} (1 + x/n)^n$$

である。

$t = Nh$ のもとで $h \to 0$ の極限をとれば $N \to \infty$ である。陽的オイラー法による近似解

$$x(Nh) = (1 - ah)^N x_0$$

は

$$x(t) = (1 - at/N)^N x_0$$

と書き換えられ，$N \to \infty$ の極限では

$$x(t) = \lim_{N\to\infty} (1 - at/N)^N x_0$$

となる。よって，ネピア数の定義式から

$$x(t) = x_0 \exp(-at)$$

である。

同様に，陰的オイラー法の近似式

$$x(Nh) = \frac{1}{(1+ah)^N} x_0$$

で $N \to \infty$ の極限をとると

$$x(t) = \frac{1}{\lim_{N\to\infty}(1+at/N)^N} x_0$$

となる。よって，ネピア数の定義式から

$$x(t) = x_0 \frac{1}{\exp(at)} = x_0 \exp(-at)$$

である。

**【2】** ここでは，時刻 $t+\Delta t/2$ における変数 $u(x, t+\Delta t/2)$ の変化率（速度）を，それよりも $\Delta t/2$ 時間後の時刻 $t+\Delta t$，および $\Delta t/2$ 時間前の時刻 $t$ という 2 時刻において，時間刻みを $\Delta t/2$ としたときの変化率の平均で近似する（中心差分法）ようなクランク・ニコルソン法を考える。すなわち，

$$\frac{\partial u(x,t+\Delta t/2)}{\partial t} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t+\Delta t/2)}{\Delta t/2} + \frac{u(x,t+\Delta t/2)-u(x,t)}{\Delta t/2}\right)$$
$$= \frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t)}{\Delta t}$$

となる。ただし，クランク・ニコルソン法の時間ステップ自身は，$\Delta t$ ずつ進めるので，時刻 $t+\Delta t/2$ の次に中心差分によって時間微分を評価する時刻は $t+3\Delta t/2$ であることに注意する。このとき，$u(x,t+\Delta t) = u_{i,j+1}$，$u(x,t) = u_{i,j}$ とする。時間微分の中心差分近似に用いた 2 時刻における時間微分を表す差分のそれぞれに対して，空間 2 階微分

$$\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t+\Delta t/2)}{\Delta t/2} = \frac{\partial^2 u(x,t+\Delta t)}{\partial x^2}$$
$$\frac{u(x,t+\Delta t/2)-u(x,t)}{\Delta t/2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

を対応付ける。空間微分を評価する時刻を，第 1 式では時刻 $t+\Delta t$ に，第 2 式では時刻 $t$ にとっている点に注意する。それぞれの右辺の位置 $x$ に関する 2 階偏微分を差分化すると，題意の拡散方程式（偏微分方程式）の差分近似式は

$$\left(\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\Delta t}\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{\Delta x^2}\right)$$

となる。これを整理すると

$$2\left(u_{i,j+1}-u_{i,j}\right) = r\left(u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}+u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}\right)$$

となる。ただし，$r = \Delta t/\Delta x^2$ である。これを $j+1$ と $j$ の項に分けて整理すると

$$(2+2r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} - ru_{i-1,j+1} = (2-2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j} + ru_{i-1,j}$$

を得る。$i=1$ から $N$ までを行列形式で書き下すと式 (5.114) となる。

$$\begin{pmatrix} 2+2r & -r & 0 & \cdots & 0 \\ -r & 2+2r & -r & \ddots & \\ 0 & -r & 2+2r & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -r \\ 0 & \ddots & \ddots & -r & 2+2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \vdots \\ u_{N-2,j+1} \\ u_{N-1.j+1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} ru_{0,j+1} + (2-2r)u_{1,j} + r(u_{2,j} + u_{0,j}) \\ (2-2r)u_{2,j} + r(u_{3,j} + u_{1,j}) \\ \vdots \\ (2-2r)u_{N-2,j} + r(u_{N-1,j} + u_{N-3,j}) \\ ru_{N,j+1} + (2-2r)u_{N-1,j} + r(u_{N,j} + u_{N-2,j}) \end{pmatrix}$$

なお，教科書本文中のクランク・ニコルソン法の説明で，式 (5.114) に続く記載には以下の誤りがあるので訂正する。
(原文：誤) ただし，$N$ は空間の分割数（コンパートメント数）で，$u_{i,j}$ および $u_{i,j+1}$ は，それぞれ時刻 $t = j\Delta t/2$ および $t = (j+1)\Delta t/2$ における位置 $x = i\Delta$ におけるシステムの状態 $u$ を表す。
(修正：正) ただし，$N$ は空間の分割数（コンパートメント数）で，$u_{i,j}$ および $u_{i,j+1}$ は，それぞれ時刻 $\underline{t = (j-1/2)\Delta t}$ および $\underline{t = (j+1/2)\Delta t}$ における位置 $x = i\Delta$ におけるシステムの状態 $u$ を表す。

また，上記の解答では，時刻 $t + \Delta t/2$ における変数 $u(x, t + \Delta t/2)$ の変化率（速度）を，時刻 $t + \Delta$ と時刻 $t$ という 2 時刻において，時間刻みを $\Delta t/2$ としたときの変化率の平均で近似する（中心差分法）ようなクランク・ニコルソン法を考えたが，本文中でのクランク・ニコルソン法の説明は，時刻 $t$ における変数 $u(x,t)$ の変化率（速度）を，時刻 $t + \Delta t/2$ と時刻 $t - \Delta t/2$ という 2 時刻において，時間刻みを $\Delta t/2$ としたときの変化率の平均で近似する（中心差分法）を想定している点において異なる。すなわち，クランク・ニコルソン法の 2 つの説明は，時間微分の中心差分近似を行う時刻を，$(j+1/2)\Delta t$ とするか（上記解答の場合），$j\Delta t$ とするか（本文中の場合）の点において異なっている（どちらで中心差分近似を行っても正しい）。