ロボティクスシリーズ 10

ロボットと解析力学

工学博士　有本　卓
博士(工学)　田原　健二　共著

コロナ社

刊行のことば

本シリーズは，1996 年，わが国の大学で初めてロボティクス学科が設立された機会に企画された。それからほぼ 10 年を経て，卒業生を順次社会に送り出し，博士課程の卒業生も輩出するに及んで，執筆予定の教員方からの脱稿が始まり，出版にこぎつけることとなった。

この 10 年は，しかし，待つ必要があった。工学部の伝統的な学科群とは異なり，ロボティクス学科の設立は，当時，世界初の試みであった。教育は手探りで始まり，実験的であった。試行錯誤を繰り返して得た経験が必要だった。教える前に書いたテキストではなく，何回かの講義，テストによる理解度の確認，演習や実習，実験を通じて練り上げるプロセスが必要であった。各巻の講述内容にも改訂と洗練を加え，各章，各節の取捨選択も必要だった。ロボティクス教育は，電気工学や機械工学といった単独の科学技術体系を学ぶ伝統的な教育法と違い，二つの専門（T 型）を飛び越えて，電気電子工学，機械工学，計算機科学の三つの専門（π 型）にまたがって基礎を学ばせ，その上にロボティクスという物づくりを指向する工学技術を教授する必要があった。もっとたいへんなことに，2000 年紀を迎えると，パーソナル利用を指向する新しいさまざまなロボットが誕生するに及び，本来は人工知能が目指していた “人間の知性の機械による実現” がむしろロボティクスの直接の目標となった。そして，ロボティクス教育は単なる物づくりの科学技術から，知性の深い理解へと視野を広げつつ，新たな科学技術体系に向かう一歩を踏み出したのである。

本シリーズは，しかし，新しいロボティクスを視野に入れつつも，ロボットを含めたもっと広いメカトロニクス技術の基礎教育コースに必要となる科目をそろえる当初の主旨は残した。三つの専門にまたがる π 型技術者を育てるとき，広くてもそれぞれが浅くなりがちである。しかし，各巻とも，ロボティクスに

直接的にかかわり始めた章や節では，技術深度が格段に増すことに学生諸君も，そして読者諸兄も気づかれよう。恐らく，工学部の伝統的な電気工学，機械工学の学生諸君や，情報理工学部の諸君にとっても，本シリーズによってそれぞれの科学技術体系がロボティクスに焦点を結ぶときの意味を知れば，工学の面白さ，深さ，広がり，といった科学技術の醍醐味が体感できると思う。本シリーズによって幅の広いエンジニアになるための素養を獲得されんことを期待している。

2005 年 9 月

編集委員長　有本　　卓

ま　え　が　き

本書の出版企画が検討されて以来，すでに 10 年以上が過ぎてしまった。共著者の一人は，その間，外国における共同研究期間が度重なり，ほかは定年退職を経た後の空白感に圧倒され，深い思考が及ばない期間を経て，やっと 2016 年の春から共同執筆がはじまった。ようやく全 9 章を脱稿したのは 2017 年 2 月の中頃である。

執筆者の一人は，立命館大学のロボティクス学科で「解析力学」を担当した経験がある。そのとき，日本語のみならず英語のいくつかの関連の教科書，専門書を渉猟したが，例題にロボットを取り上げたものは見つからなかった。当時になっても，多自由度の剛体系を正面から取り扱う気配は見られなかった。そもそも，オイラー–ラグランジュの運動方程式の意義を工学分野に広げ，深めようとする観点や指向，もっと直接的にいえば，運動をいかにうまく制御するか，という観点が意識下に入っていなかったのであろう。

本書の執筆時は，歴史的には，AI（人工知能）の研究と開発が絶頂期にあたるだろう。それは，ビッグデータのネットワーク表現と深層学習（deep learning）の賜物による。家庭にもロボットが登場しはじめたが，それらはコミュニケーションロボットであり，手を動かして日常作業を手助けしてくれるわけではない。ロボットの運動表現の言語はオイラー–ラグランジュの運動方程式に依拠するのが基本になる。運動方程式になんらかの制御入力を働かせる方式を通して，企図したロボット作業が遂行できるか，考えていくことが基本になる。そのための「深層学習」はどんな様式になるのであろうか。解析力学の新たな展開に則して学ばなければならないだろう。

1 章から 8 章まで，多自由度力学系を意識して，解析力学の基礎を簡潔に著した。9 章ではリーマン幾何学の観点を解析力学に導入した。オイラーの方程

式の解（測地線）とラグランジュの方程式の解軌道を比較する方法論を新たに展開した。そのために，ポアッソン括弧式がラグランジュ安定に果たす役割を調べ，時定数に基づくロボット設計法を導いた。

執筆は，1〜3 章，7 章を田原，4〜6 章，8〜9 章，付録を有本が担当した。

最後に，本書の執筆に際して多大な激励をいただいたコロナ社編集部の方々に感謝する。

2017 年 11 月

執筆者を代表して　有本　卓

目　　　　次

1.　ニュートンの法則

2.　質 点 系 の 運 動

3.　剛 体 系 の 運 動

4. エネルギーと仕事量

5. 一般化座標と仮想仕事の原理

6. ラグランジュの運動方程式

7.　多関節構造体の運動方程式

8.　ハミルトンの正準方程式

9.　ロボット制御の基礎—解析力学とリーマン幾何学から—

1 ニュートンの法則

「解析力学」とは，名前の通り力学を扱っていることに間違いはないが，その中身はむしろ数学に近い。ニュートンにはじまる古典力学は，「運動量」と呼ばれるベクトル量の定義により，運動に必要な次元を持つ空間内で幾何的に展開され，直感的に理解しやすい。しかし，運動量なるベクトル量を基礎としているがゆえに，座標系に依存した運動の記述がなされるため，座標系が変われば運動の記述も変わってしまい，個々に対応する必要がある。一方，解析力学では，それら座標系に依存した表現を，数学的な手法を使うことによって座標系に依存しない一般論として記述することが可能となる。すなわち，解析力学は古典力学の知識を前提として，それを数学的に取り扱う学問であるといえる。これにより，適用可能範囲は古典力学のみに留まらない。しかし，当然ながら解析力学を学ぶうえで古典力学の知識は必須である。ここでは，ニュートン力学について簡単に復習し，その後の解析力学への導入とする。

1.1　座標系と位置ベクトル

いま，ある右手直交座標系 $O\text{–}xyz$ を考えよう。座標系 $O\text{–}xyz$ において，任意の点 P の位置は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を用いて以下のように表される。

$$\boldsymbol{r} = [x,\ y,\ z]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 \tag{1.1}$$

ここで右辺右上の記号 $^{\mathrm{T}}$ は転置を表している。以後，本編では紙面の都合上，列ベクトルの標記は行ベクトルに転置記号を付けて表す。また，右辺最後の記

号 $\in \mathbb{R}^3$ は，位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ が三次元実数空間に属することを意味している。式 (1.1) は，位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の**代数ベクトル**表現であり，x，y，z はその成分を表している。一方，O–xyz の各軸についての基本ベクトル（長さが 1 でたがいに直交するベクトル）を以下のようにとる。

$$\boldsymbol{e}_x = [1,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{e}_y = [0,\ 1,\ 0]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{e}_z = [0,\ 0,\ 1]^{\mathrm{T}} \tag{1.2}$$

これら基本ベクトルを用いると，$\boldsymbol{r}$ は**図 1.1** に示すような**幾何ベクトル**として以下のように表すこともできる。

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z \tag{1.3}$$

また，位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の大きさ（長さ）は，ユークリッドノルムとして以下のように表される。

$$\|\boldsymbol{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}} \tag{1.4}$$

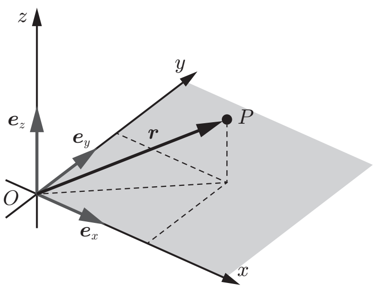

図 1.1　座標系 O–xyz の基本ベクトルと点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$

1.2　速度と加速度

座標系 O–xyz において表される点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ が，時間 t についての関数 $\boldsymbol{r}(t)$ として表されているとする。ある時刻 t_0 から微小時間 Δt 経過した時刻 $t_0 + \Delta t$ の間に，点 P が点 P' へ移動して位置ベクトルが $\boldsymbol{r}(t_0)$ から

$\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)$ に変化したとしよう。このとき，位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の微小な変位量を表すベクトル $\Delta\boldsymbol{r}$ は，以下のように表される。

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t_0+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0) \tag{1.5}$$

式 (1.5) より，その間の点 P の平均速度を表すベクトル $\boldsymbol{v}$ は，以下のように表される。

$$\boldsymbol{v} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1.6}$$

ここで式 (1.6) において微小時間 Δt を無限に小さくしていくと，以下のように表される。

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}} \tag{1.7}$$

式 (1.7) において，$\boldsymbol{v}$ をある瞬間（時刻 t）における質点の**速度**と呼び，位置の時間に関する変化率を表す。**図 1.2** に示すように，速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ は位置ベクトルの移動経路の接線方向となる。

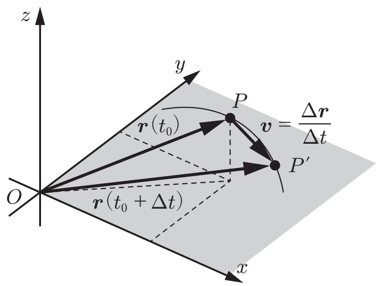

図 1.2　速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ の幾何学的な意味

速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ が時間 t についての関数 $\boldsymbol{v}(t)$ として表される場合，位置の変化率と同様に，速度の変化率を以下のように求められる。

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}} \tag{1.8}$$

ここで $\boldsymbol{a}$ をある瞬間（時刻 t）における質点の**加速度**と呼び，速度の時間に関する変化率を表す。

式 (1.3) において，位置ベクトルは三次元デカルト座標系において幾何ベクトルとして表されることを示したが，位置ベクトルと同様に，速度ベクトル，加速度ベクトルも幾何ベクトルとして以下のように表すことができる。

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\boldsymbol{e}_y + \dot{z}\boldsymbol{e}_z \tag{1.9}$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{x}\boldsymbol{e}_x + \ddot{y}\boldsymbol{e}_y + \ddot{z}\boldsymbol{e}_z \tag{1.10}$$

また，それぞれの大きさも位置ベクトルと同様にユークリッドノルムとして以下のように表される。

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}} \tag{1.11}$$

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = \sqrt{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}} \tag{1.12}$$

1.3　ニュートンの運動の法則

ニュートンは，ある質量を持った物体がある運動状態にあるとき，その運動は以下に示す三つの法則に従うことを発見し，それらを著書『Philosophiare Naturalis Principia Mathematica』に記した。

- **第一法則（慣性の法則）**
  すべての物体は，力による作用を受けない限り，静止状態もしくは等速直線運動を維持する。
- **第二法則（運動の法則）**
  物体の運動量の変化は，その物体に働く力に比例し，その力と同じ向きに生じる。
- **第三法則（作用・反作用の法則）**
  物体が別の物体に力を及ぼすとき，別の物体は必ず物体に対して大きさが同じで逆向きの力を及ぼす。

上記三つの運動に関するニュートンの法則は，以後の質点や剛体の運動を記述するうえで大前提となる。すなわち，古典力学の出発点である。

第一法則は，**慣性の法則**ともいわれ，物体が運動状態を維持し続けようとする性質を**慣性**として定義している。また，第一法則が成立する座標系を**慣性座標系**や**デカルト座標系**（**カーテシアン座標系**）と呼ぶ。一方，第一法則が成立しない座標系を**非慣性系**という。第二・第三法則は，第一法則の成立を前提としている。

第二法則は，**運動の法則**といわれる。この法則では，まず物体の運動を規定する量として**運動量**を定義する。運動量とは，「方向」と「大きさ」の両方を持つベクトル量であり，ある物体の質量を m，速度を $\boldsymbol{v}$ とすると，その物体が持つ運動量 $\boldsymbol{p}$ は以下のように定義される。

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \tag{1.13}$$

式 (1.7) を式 (1.13) に代入すると，運動量 $\boldsymbol{p}$ は

$$\boldsymbol{p} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = m\dot{\boldsymbol{r}} \tag{1.14}$$

として表される。

ここで質量 m は時間変化せずに一定であるとすると，ある瞬間における運動量の変化量 $\dot{\boldsymbol{p}}$ は，運動量 $\boldsymbol{p}$ を時間 t で微分することにより，以下のように表される。

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = m\ddot{\boldsymbol{r}} \tag{1.15}$$

いま，質量 m の物体に働く力を $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^3$ としよう。力 $\boldsymbol{F}$ も，位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ や速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ と同様に方向と大きさを持つベクトル量である。$\boldsymbol{F}$ および式 (1.15) より，ニュートンの第二法則は以下のように表される。

$$\boldsymbol{F} = \dot{\boldsymbol{p}} = m\ddot{\boldsymbol{r}} \tag{1.16}$$

すなわち第二法則は，物体に作用した力 $\boldsymbol{F}$ は，その物体の運動量の変化量 $\dot{\boldsymbol{p}}$，すなわち物体の質量 m と加速度 $\ddot{\boldsymbol{r}}$ を掛けた値と等しいことを表しており，式 (1.16) を**ニュートンの運動方程式**と呼ぶ。

索　　引

—— 著 者 略 歴 ——

有本　卓（ありもと　すぐる）

1959年　京都大学理学部数学科卒業
1959年　沖電気工業株式会社勤務
1967年　工学博士（東京大学）
1967年　東京大学講師
1968年　大阪大学助教授
1973年　大阪大学教授
1988年　東京大学教授
1990年　大阪大学名誉教授
1997年　立命館大学教授
2000年　紫綬褒章
2007年　立命館大学客員教授
～11年

田原　健二（たはら　けんじ）

1998年　立命館大学理工学部機械工学科卒業
2000年　立命館大学大学院理工学研究科修士課程修了（情報システム学専攻）
2003年　立命館大学大学院理工学研究科博士課程修了（総合理工学専攻）
博士（工学）
2003年　理化学研究所バイオ・ミメティックコントロール研究センター研究員
2007年　九州大学大学院システム情報科学研究院特任准教授
2011年　九州大学大学院工学研究院機械工学部門准教授
現在に至る

ロボットと解析力学
Robot Control and Analytic Mechanics

2018 年 1 月 10 日　初版第 1 刷発行

検印省略

著　　者	有　本　　卓
	田　原　健　二
発 行 者	株式会社　コ ロ ナ 社
	代 表 者　牛 来 真 也
印 刷 所	三 美 印 刷 株 式 会 社
製 本 所	有限会社　愛 千 製 本 所

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発 行 所　株式会社　**コ ロ ナ 社**
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ　http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–04521–5　C3353　Printed in Japan　（三上）