まえがき

本書は大学理工系学部・学科の 2〜3 年生を対象とした変分法の教科書である。変分法は関数で表される量の最小化（最大化）問題に関する分野であり，理工系において重要な最適化法の一種である。そして，自然科学の諸分野において，以下に列挙するように，変分問題の形で与えられる原理，あるいは，変分問題として定式化される問題が多い。

- 解析力学におけるハミルトンの原理
- 最速降下問題。与えられた 2 点間を結ぶ空間曲線で，その曲線に沿って重力により質点が降下する際最も短い時間で降下するようなものを求める問題
- 懸垂線問題。一定の長さの紐が端点を固定されて重力のもとで垂れ下がっているとして，その紐の形状を求める問題
- 一般相対性理論における測地線問題
- 偏微分方程式の数値解法である有限要素法の数学的定式化

このように，変分法は理工系において重要な数学の分野・技法の一つである。それにもかかわらず，大学の理工系学部・学科において変分法を扱う際，適切な教科書が見当たらないのが実情である。数学科学生・研究者を対象に変分法を題目に掲げたものはいくつか刊行されているが，数学を「道具」として学ぶ理工系学生には専門的すぎて太刀打ちできないものばかりである。一方で，理工系学生を対象とした変分法の教科書もあるが，副読本的な色彩の書物が多く，大学の授業の教科書としてはいまひとつ使いにくい。以上の理由から，教科書の執筆を決意するに至った。

本書は四つの章からなり，その内容は以下のとおりである。

第 1 章は，変分法の基礎に関する話である。はじめに，ある簡単な問題を出

発点として，変分問題・変分法とはどういうものであるかについて説明する。上記で変分法は最適化法の一つと説明したが，変分法ではもっぱら積分汎関数と呼ばれるものの最適化を扱う。汎関数とは関数に対しある値を対応させるもの，すなわち，「関数の関数」であり，とくに積分を用いて表されたものが積分汎関数である。つぎに，変分問題の解，すなわち，積分汎関数を最小化する関数が満たすべき方程式であるオイラー・ラグランジュ方程式を導き出す。変分問題の解はオイラー・ラグランジュ方程式という微分方程式を解くことにより得られる。これはちょうど高校数学で習う微積分で，ある 1 変数関数 $f(x)$ を最小にする x を知りたいとき，$f'(x) = 0$ の根 x を見つけることにより求めるのに相当する。さらに，第 1 積分，高階導関数を含む場合などの話題を続ける。

第 2 章は，変分法の重要な応用である解析力学の話である。解析力学はニュートン力学を数学的に再定式化したものであり，量子力学，統計力学，相対性理論などの現代物理学は，解析力学をベースとして議論が行われる。そして，この解析力学の第 1 原理は，ハミルトンの原理という変分問題の形で与えられるのである。はじめに，なぜ解析力学という力学の再定式化が必要かという動機付けを，一つの力学問題を例にして説明する。初等力学で学ぶニュートンの運動方程式は，用いる座標系により表現が異なってしまうという欠点がある。そこで，ラグランジアンおよび作用という量を導入して，ニュートンの運動方程式を作用という積分汎関数の最小化問題（ハミルトンの原理）に帰着させる。ここで変分法の出番となり，オイラー・ラグランジュ方程式に対応するラグランジュ運動方程式を得，この方程式を解くことにより物理系の運動を得る。このラグランジュ運動方程式は選ぶ座標系によらない形で記述されており，すべての座標系に共通した力学の再定式化が実現される。その後，一般化運動量の導入，ハミルトン形式の力学，正準変換，ハミルトン・ヤコビの方程式と話を続けて，力学に対し数学的により深遠な見通しを与える。

第 3 章は，変分法の発展編である。はじめに，自由境界条件・横断性条件の変分問題という，第 1 章で扱った変分問題と異なる境界条件の場合の扱いについて述べる。つぎに，等周問題と呼ばれる，制約条件を与えた場合の変分問題

の扱いについて議論する。変分法に限らず，いくつかの制約条件のもとでの最適化の問題は重要な数学的問題の一つであり，科学技術計算において頻繁に現れる。制約条件付き最適化問題に対してはラグランジュの未定乗数法という共通した処方箋が与えられており，変分法においてもこの未定乗数法によって等周問題に対する解が求められることを示す。

本章の後半では，多変数関数に対する変分問題を扱う。多変数問題の場合も基本的な考え方は一変数関数の場合と同様であるが，今度はオイラー・ラグランジュ方程式が偏微分方程式となって現れる。そこで本書では，フーリエ解析を用いた偏微分方程式の初等解法について説明する。最後に，スツルム・リウヴィル型固有値問題という微分方程式の固有値問題を扱い，それが制約条件付き変分問題から現れることに触れる。

最後の第 4 章は，変分問題の近似解法である。変分問題の解析的解法では，もとの変分問題をオイラー・ラグランジュ方程式という微分方程式に帰着させ，それを解くことにより解を求める。一方，近似解法では「直接法」といって，オイラー・ラグランジュ方程式を介さず，積分汎関数を最小にする関数を直接的に求めるというアプローチをとる。その過程のどこで近似的扱いを行うのかというと，積分汎関数を最小化する関数をある限定された形の関数の集合（関数空間）の中で探すのである。これがリッツ法と呼ばれる方法である。この方法は微分方程式の境界値問題の数値解法であるガレルキン法と関連が深い。最後にこれらの解法をコンピュータ数値計算向けに特化した有限要素法について，その概略に触れる。

本書の特徴の一つとして，変分法の重要な応用である解析力学に多くのページを割いたことが挙げられる。理工系初年度の学生に力学の授業が課されるのは，力学が物理学の基礎的・初歩的分野であるからばかりではない。著者が考えるに，理工系教育で力学が重視されるのは，力学は理工系分野において数理的思考の能力を養うのに絶好の場であるから，すなわち，力学の運動方程式を解くことによる物体の運動の解析は，科学技術において現象を数理モデルに帰着させ，その方程式の解を求めることにより現象を理解するという研究・学習

スタイルの格好の雛(ひな)形であるからである。理工系教育・研究における力学の役割の重要性は，かつて中学・高校の数学教育において初等幾何が担っていた役割——数学における論理的思考を鍛えるという役割——に相当するといっても過言ではなかろう。ただし，著者は物理学を専攻する研究者ではないので，間違った箇所，誤解のある箇所があるかもしれない。ご叱正いただければ幸いである。

本書ではさらに，読者が紙と鉛筆を使って変分法の具体的な問題を解けることを目的とした。そのため，数多くの演習問題を載せ，そのすべてにていねいな解答をつけた。数学は具体的な問題が解けてこそ真の力となる。読者は例題に目を通し，演習問題を実際に解いていただきたい。独力で演習問題が解けない場合，巻末の解答を見て問題の解き方を覚えるのも，学習法の一つである。変分法では大学 1～2 年次で学ぶ常微分方程式の知識が必要不可欠なので，付録にごく簡単な復習事項を記した。

教育の場において重要なことは「読み書き計算」の基礎学力を身につけることであり，それは大学教育においても同様である。これらの基礎学力に裏付けられた考える力は，学生たちが将来卒業して社会に巣立っても，あるいは，大学等で研究の道に進むにしても必要不可欠なものであり，それは時代がどう変わろうとも揺るがない。大学の理工系学部・学科における数学の授業は，「計算」の基礎学力を鍛錬する重要な場である。この重要な使命を負った数学教育・学習に本書が一助となれば幸いである。

本書の執筆にあたっては，恩師である東京大学大学院教授の杉原正顯先生，著者の研究室（電気通信大学）の大学院生である藤原弘樹君から貴重なコメントをいただいた。また，解析力学の章では，大阪大学大学院教授の東島清先生からコメントをいただいた。ここに深く感謝を申し上げる。また，本書の執筆を通じて，コロナ社の方々には終始大変お世話になった。深くお礼を申し上げる。

2011 年 5 月

緒方秀教

目　　　次

1.　変分法の基礎

2.　解　析　力　学

3.　変分法（発展編）

4. 近　似　解　法

1章 変分法の基礎

本章では，はじめに変分問題とは何かについて具体例を用いて説明する。変分問題とは関数を変数とする関数 —汎関数— を最小あるいは最大にする問題である。そして，変分問題を解く方法，すなわち，変分法について議論し，汎関数を最小あるいは最大にする関数を求めるための方程式であるオイラー・ラグランジュ方程式を導入する。

1.1　序論 ——変分問題の例——

1.1.1　ライフセーバーの問題

海水浴場を監視しているライフセーバーが海で溺れている人を見つけ，砂浜を走って海を泳いでその人を助けに行く場合，どういう経路をとれば最短時間で溺れている人に到達できるか，という問題を考える。水平面上に (x, y) 平面をとる。海と砂浜の境界線を x 軸にとり，半平面 $y > 0$ を砂浜，$y < 0$ を海とする。ライフセーバーの最初の位置を点 $\mathrm{P}(0, p)$ とし，溺れている人の位置を点 $\mathrm{Q}(q, r)$ とする。そして，ライフセーバーが砂浜を走る速度を v_1，海を泳ぐ速度を v_2 とする（図 **1.1**）。

できるだけ短い時間で溺れている人に到達するためには，砂浜，海のそれぞれの中では直線をたどらなければならないのは自明であろう。したがって，最短時間での到達経路は図 1.1 の折れ線 PAQ のようになる。問題は，砂浜と海との境界線上の点 A の位置をどう定めるかである。砂浜では砂に足を取られ走りにくく，一方，訓練されたライフセーバーなら海を速く泳げるであろうから，

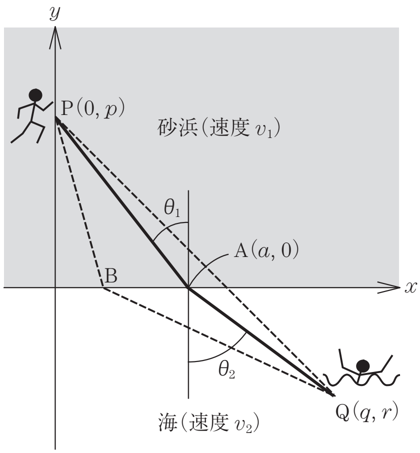

図 1.1　ライフセーバーの経路

$v_1 < v_2$ となる。すると，単純に 2 点 P, Q を結ぶ直線をたどるよりは，速度の遅い砂浜の中の線分 PA を短くとって，一方で速度の出る海の中の線分を長くとれば，到達時間が短くなるであろう。しかし，海の中の線分をあまり長くとりすぎて折れ線 PBQ のように経路をとると，かえって所要時間が長くなる。よって，所要時間を最短にする点 A がどこかにあるはずである。

この問題を数学的に解くには，到達時間 T を a の関数として求め，T が最小になるような a を定めればよい。到達時間は

$$T(a) = \frac{\sqrt{a^2+p^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(q-a)^2+r^2}}{v_2} \tag{1.1}$$

となる。これが最小になるような a は，方程式 $T'(a) = 0$ の根として定まる。$T'(a) = 0$ を計算することにより，a は方程式

$$T'(a) = \frac{a}{v_1\sqrt{a^2+p^2}} - \frac{q-a}{v_2\sqrt{(q-a)^2+r^2}} = 0$$

の解として定まる。図 1.1 のように角 θ_1, θ_2 を定めると

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2} \tag{1.2}$$

が成り立つ。以上より，ライフセーバーが最短時間で溺れている人に到達するには，式 (1.2) が成り立つように点 $A(a, 0)$ をとればよいことがわかる。

1.1.2　光学の問題(1)

じつは，上記のライフセーバーの問題と同様の問題が物理学にある。異なる媒質中を光が進むとき，光はどのような経路をとるかという問題である。この場合，**光は到達時間が最小となるような経路を選んで進む**ということが知られており，これを**フェルマー** (Fermat) **の原理**という。

ここでは，簡単なケースとして，2 種類の異なる媒質がある場合を考える。光は平面内を進むとして，その平面を (x, y) 平面にとり，半平面 $y > 0$ を一方の媒質 1 が占め，半平面 $y < 0$ を他方の媒質 2 が占めるとする。そして，光は媒質 1 中の 1 点 $\mathrm{P}(0, p)$ から媒質 2 中の 1 点 $\mathrm{Q}(q, r)$ へ進むとする。光が最短時間で 2 点間を進もうとすると，各媒質中では直線の経路をとるのは自明であるから，最短到達時間の経路は**図 1.2** の折れ線 PAQ のようになる。そこで，ライフセーバーの問題と同様，点 $\mathrm{A}(a, 0)$ の位置をどうとるべきかが問題になる。媒質 1, 2 の屈折率をそれぞれ n_1, n_2 とすると，各媒質中での光の速度はそれぞれ $c_1 = c/n_1$, $c_2 = c/n_2$（c は真空中の光速度）となるので，光の到達時間は a の関数として

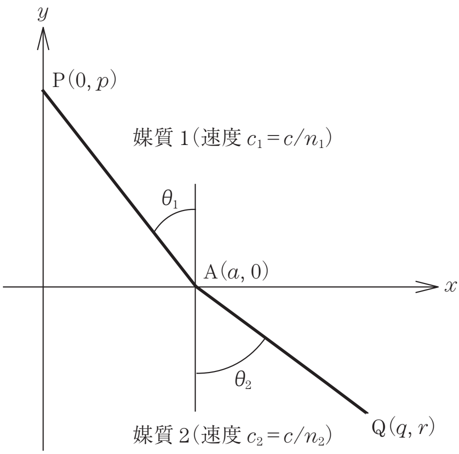

図 1.2　光 の 経 路

$$T(a) = \frac{\sqrt{a^2+p^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(q-a)^2+r^2}}{c_2}$$
$$= \frac{\sqrt{a^2+p^2}}{c/n_1} + \frac{\sqrt{(q-a)^2+r^2}}{c/n_2}$$

となる。$T'(a)=0$ を計算すれば，a は方程式

$$T'(a) = \frac{a}{c_1\sqrt{a^2+p^2}} - \frac{q-a}{c_2\sqrt{(q-a)^2+r^2}} = 0$$

の解であることがわかる。$c_1 = c/n_1$, $c_2 = c/n_2$ より

$$\frac{n_1 a}{\sqrt{a^2+p^2}} - \frac{n_2(q-a)}{\sqrt{(q-a)^2+r^2}} = 0$$

の解である。二つの媒質の境界線に垂直で点 A を通る直線を引き，その直線の光路とのなす角 θ_1, θ_2 を図 1.2 のように定めれば

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{1.3}$$

が成り立つ。これは，光学でよく知られた**スネル** (Snell) **の法則**である。

1.1.3　光学の問題 (2) —— 一様でない媒質を通過する光の経路 ——

これまでは 2 種類の媒質を通過する光の経路を求める問題を考えてきた。これを複雑にすると，3 種類の媒質を通過する場合，4 種類の媒質を通過する場合，…，に（到達時間が最小となるような）光の経路を求める問題が考えられる。さらに問題を複雑にして，連続的に変化する媒質，すなわち，光の屈折率が場所によって連続的に変化する媒質を光が通過する場合の光の経路を求める問題を考える。

(x, y) 平面内の媒質中を点 $\mathrm{P}_0(x_0, y_0)$ から点 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1)$ まで進む光の経路を考える。ただし，媒質の屈折率は y 方向にのみ変化するとする。すなわち，屈折率 n は y の関数 $n = n(y)$ であるとする（**図 1.3**）。光の経路を $\mathrm{C} : y = y(x)$ ($x_0 \leqq x \leqq x_1$) とし，C 上の微小線素の長さを $\mathrm{d}s$ とする。点 (x, y) における光の速さは $v = c/n$ で与えられるから，微小線素を光が通過する時間は

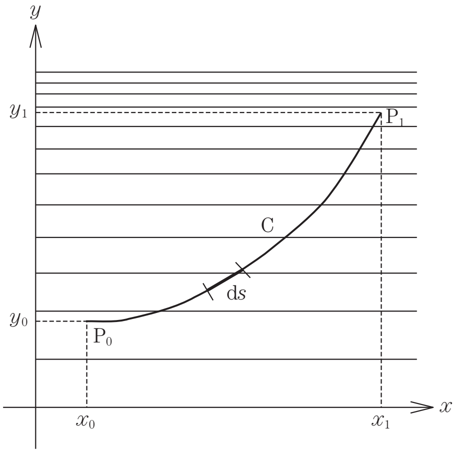

図 1.3　屈折率が連続的に変化する媒質中を通過する光の経路

$\mathrm{d}s/v = n\mathrm{d}s/c$ である。したがって，光が経路 C を点 P_0 から点 P_1 まで通過するのにかかる時間は

$$T = \frac{1}{c}\int_{\mathrm{C}} n\mathrm{d}s = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x_1} n(y(x))\sqrt{1+y'(x)^2}\mathrm{d}x \tag{1.4}$$

と表される。ここで，$\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$ を用いた。

フェルマーの原理によれば，光は所要時間が最小になるような経路を選んで通る。したがって，光の経路 C : $y = y(x)$ は 2 点 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1$ を両端にもつ，すなわち，端点で $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ を満たす経路で，式 (1.4) で与えられる所要時間 T を最小にするようなものをとる。ここで，所要時間 T は関数 $y = y(x)$ に対して定まる値である。後で定義するように，関数に対して値が定まるような量，すなわち，関数を変数にもつような関数を一般に**汎関数**(functional) と呼ぶ。そして，汎関数が最小あるいは最大になるような関数を求める問題を**変分問題**と呼ぶ。いまの場合，所要時間 T は光の経路を表す関数 $y = y(x)$ を変数にもつ汎関数であり，それを明示するために $T = T[y]$ と表すことにする。そして，光の経路を求める問題は，汎関数 $T = T[y]$ を最小になるような関数 $y = y(x)$ を両端での条件 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ のもとで求める問題に書き換

えられる。

1.2 汎関数とオイラー・ラグランジュ方程式

ここでは，上記で考えた例をベースとして，変分問題を定式化しその解法について議論する。以降，考える関数は必要な階数微分可能であり，考えている区間で積分可能である仮定する。

1.2.1 汎関数と変分問題

1.1 節の最後で述べたとおり一般に，関数を変数とする関数，すなわち，関数から数値への写像を**汎関数**(functional) と呼ぶ。汎関数は，関数 $y=y(x)$ を変数にもつとき，それを明示するため $I[y]$ と関数 y をかぎ括弧で囲んで記すことにする。例えば，1.1.3 項において，光の所要時間 $T=T[y]$ は光の経路を表す関数 $y=y(x)$ を変数にもつ汎関数である。そして，光の所要時間を与える式 (1.4) のように，汎関数は独立変数 x，関数 $y(x)$ およびその導関数 $y'(x)$ を変数にもつある関数 $F(x,y,y')$ の積分

$$I[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y(x),y'(x))\mathrm{d}x \tag{1.5}$$

の積分として表されることが多い。例えば，式 (1.4) の場合

$$F(x,y,y')=n(y)\sqrt{1+{y'}^2} \tag{1.6}$$

である。このように積分の形で与えられる汎関数をとくに**積分汎関数**と呼ぶ。

ある汎関数 $I=I[y]$ を最小または最大にするような関数 $y=y(x)$ を求める問題を**変分問題**(variational problem) と呼び，変分問題を解く方法を**変分法**(variational method) という。そして，変分問題あるいは変分法を扱う数学の分野を**変分学**という。科学技術研究においては変分問題の形で第 1 原理を与えている分野が多く，こうした原理を**変分原理**(variational principle) と呼ぶ。

汎関数 $I[y]$ を最大にする $y(x)$ を求める問題は，符号を反転すれば，汎関数

索　　　　引

—— 著者略歴 ——

1990 年　東京大学工学部物理工学科卒業
1992 年　東京大学大学院工学系研究科修士課程修了（物理工学専攻）
1997 年　博士（工学）（東京大学）
1999 年　愛媛大学講師
2005 年　電気通信大学助教授
2007 年　電気通信大学准教授
現在に至る

変　分　法

Calculus of Variations

2011 年 7 月 28 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

著　者　緒方秀教（おがたひでのり）
発 行 者　株式会社　コロナ社
代 表 者　牛来真也
印 刷 所　三美印刷株式会社

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発行所　株式会社　コロナ社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ　http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–06101–7（安達）（製本：愛千製本所）
Printed in Japan