ま　え　が　き

機械や構造物に対する高速化・軽量化・高性能化の要求が厳しくなるにつれて，振動工学がますます重要になっている。本書は，機械・航空・建築などの学科の学生と，動的設計・構造解析の分野の技術者を対象に，振動工学の広範な項目を取り上げ，ていねいに解説したものである。

本書で取り上げた項目はつぎのようである。まず前半では，機械・構造物の基本的な振動として自由振動と強制振動を取り上げ，1 自由度系から連続体におけるこれらの振動を解説した。また現実の機械や構造物をモデル化し，解析を行うのに必要となる，解析力学の基本，有限要素法の基本的な考え方を述べた。つぎに後半では，波動，音波，自励振動とパラメータ振動，回転体の振動，非線形振動といった種々の振動を述べ，最後に振動のアクティブ制御を解説した。量的にやや多くなったので，読者の便を考えて，前半の内容を基礎編，後半の内容を応用編として 2 冊に分け，それぞれまとまりのあるものとした。

本書を著すにあたって著者が特に心がけたことは，全体を統一した取り扱いをすることと，易から難に順を追って説明することである。少しずつ慣れることによって，解析の難しさを意識しないで，振動現象の理解に読者が専念いただけたとしたら，著者の目的は達したといえる。

本書を教科書として利用いただく場合，必要に応じて，いろいろな読み方が考えられる。1 章から 4 章までは振動の入門的な章であり，これらの章によって振動の基本を理解できる。6 章まで読めば，通常の動的設計で必要となる多自由度系と連続体の振動を体系的に理解できる。7 章と 8 章は，動的設計の実務に携わる際に必要となる内容であるが，急いで応用編に進みたいときには，後で読んでも差し支えない。応用編では，10 章が 9 章の理解を前提とする以外は各章ともほぼ独立しているので，6 章までの内容を理解していれば，関心のあるどの章からも読み始めることができる。

本書は，名古屋大学および他の大学と高専で長年にわたって著者が行ってきた講義のノートと，いくつかの企業で行った研修の資料を整理してできあがったものである。講義や研修の際に寄せられた学生や受講者からの質問やコメントは，本書を仕上げるにあたってきわめて有用であった。

本書の原稿に対して多くの同僚，後輩から貴重なコメントをいただき，本書を改善するのに役立たせていただいた。お名前は申し上げないが，これらの方々に感謝申し上げたい。

振動工学を学ぶうえで，また動的設計・構造解析の仕事を進めるうえで，本書が読者に少しでも役立つならば，著者のこの上ない喜びである。

2000 年 9 月

安　田　仁　彦

改訂にあたって

振動工学 ―基礎編― の初版が出版されてから 10 年余の年月が経過した。この間幸いなことに，初版は多くの読者を得て今日まで刷りを重ねた。

初版の出版以後，著者は研究と教育で著者なりの経験を重ねた。研究面では，特に企業との共同研究が増え，振動工学の実際への応用を多数経験した。また教育面では，団体，企業からの講義依頼が増え，幅広い受講者を相手に講義し，会話する機会をもった。これらを通して学んだことと，初版の読者からのコメントを踏まえて，初版を改訂することとした。

おもな改訂点は，現在の著者が重要と考える項目を充実したこと，全ページにわたってわかりやすく簡潔な記述になるよう推敲を重ねたこと，例題や演習問題を再検討したことである。

いまここに改訂版の出版にこぎ着けられて喜びひとしおである。改訂版が初版よりわかりやすく有用になったと，読者にいっていただけることを祈念してやまない。

2012 年 2 月

安　田　仁　彦

目　　　　次

1　緒　　　　論

2　1自由度無減衰系の振動

3　1自由度減衰系の振動

4　2自由度系の振動

5　多自由度系の振動

6　連続体の振動

7　解析力学の基礎

8　有限要素法による振動解析

応用編主要目次

1

緒　　論

この章では，はじめに，本書で扱う振動工学の意味を考え，つぎに，後に必要となるいくつかの基礎事項をまとめておく。

1.1 振動工学

自動車や車両は走行中いろいろな力を受けて振動する。各種の機械，機器は駆動源が原因になって振動する。建物や橋は，風，地震，人の動きなどが原因になって振動する。本書では，機械や構造物に発生するこのような振動を，工学の立場から議論する。

振動の理論的研究は，16 世紀末から 17 世紀初頭にかけて，ガリレオ，ホイヘンスらによって始められた。ピサの斜塔の天井につり下げられたランプの振動の周期が一定であることを，ガリレオが脈拍を利用して確認したという逸話は有名である。17 世紀後半，ニュートンは著書「プリンキピア」で力学の体系を，18 世紀後半，ラグランジュは著書「解析力学」で解析力学の基礎をそれぞれ確立した。この間，棒や板，楽器などの振動がおもに理学の立場から研究された。18 世紀末に蒸気機関が発明されるとその振動対策が重要となり，振動が工学の立場から研究されるようになった。その後，蒸気機関の高速化とともに運動の安定化の技術が重要になり，振動工学は「制御工学」という新しい分野を誕生させ，今日の自動機械，精密機械を生み出している。回転機械の高速化とともに振動工学は「ロータダイナミックス」を発展させ，高速で振動の少ないタービンやモータを生み出している。振動工学はこのように新しい分

野を切り開きながら，機械や構造物の軽量化，高速化，高精度化とともにますます重要な役割を果たしている。自動車が静かに走り，航空機が安全快適に飛び，精密機械が高精度高機能を発揮するのは，振動工学とその関連分野の工学の進歩によるところが大きい。

発生原因により振動をいくつかの種類に分けることができる。日常的に観察される振動の多くは自由振動と強制振動である。風がやんだ後にしばらく続く構造物の振動は自由振動の例である。エンジンの揺れや路面のでこぼこが原因になって生じる自動車の振動は強制振動の例である。強制振動の現象で特に重要なものは，機械や構造物を破壊に導く共振である。1850 年にバス・シェーヌ橋が，隊列を組んだ兵士の歩調により共振して破壊し，多数の死者を出した大事故は，記録に残る共振の例である。機械や構造物の共振に対する対策は，動的設計者にとって基本的かつ重要な課題である。

振動の種類としては，自由振動と強制振動以外に自励振動や係数励振振動がある。この種の振動は自由振動や強制振動と比べてなじみは少ないが，発生は日常的である。乗り物などの古くなったブレーキを掛けるときに発する音は自励振動に起因する。1940 年，当時の技術の粋を集めて作られた長さ 854 m のタコマ橋が，風速わずか 19 m/s の風のなかで，自励振動が原因となって破壊した事故は振動工学史上の一大事故である（**図 1.1**）。ブランコを自身で漕ぐとき，人は無意識のうちに係数励振振動を発生させている。

図 1.1　タコマ橋の崩壊†

振動を別の観点から見て，線形振動と非線形振動に分けることができる。通常の状態で機械や構造物に観察される振動の多くは線形振動と見なすことができる。しかし条件によっては，非線形振動と総称される特徴的な振動が観察される。プリンキピア以来 300 年目の大発見として近年話題を呼んでいるカオス

† ビデオテープ「振動の世界」（企画神鋼電機・制作東京文映）

振動は非線形振動の例である。

今日設計の現場では，有限要素法などの解析ソフトウェアが振動解析の必須の道具となっている。この解析ソフトウェアを用いれば，振動現象をコンピュータ上で再現できる。しかしだからといって振動工学の重要性が減じることはない。解析ソフトウェアという“道具”を適切に使いこなし，再現された振動現象を正しく理解し，振動対策を適切に行うのに，振動の正確な理解が必須だからである。

本書では振動の諸問題を扱う。基礎編では，いろいろな対象物における自由振動と強制振動を考える。つぎに複雑な機械や構造物の振動解析を行う際にしばしば強力な道具となる解析力学の基本，また解析ソフトウェアとして広く使われている有限要素法の基本的な考え方を述べる。応用編では，波動，音波，自励振動と係数励振振動，回転体の振動を取り上げる。また非線形振動，振動の抑制手段として実用化が進んでいる振動のアクティブ制御の基礎を述べる。

この章の以下では，本書の2章以下の問題を扱う準備として，運動の法則，振動解析のために特に理解しておきたい数学の基礎，振動の表現に関する基礎をまとめておく。

1.2 運動の法則

機械や構造物の振動は**運動の法則**（laws of motion）に従う。運動の法則はつぎの三つからなる。

第1法則（慣性の法則）：外から力を受けない物体は，その運動状態を変えず，静止状態を続けるか，等速直線運動を続ける。

第2法則（運動方程式）：物体に力が作用するとき，物体は加速される。加速度の大きさは物体の質量に反比例し，力の大きさに比例する。加速度の方向は力の方向に一致する。

第3法則（作用反作用の法則）：二つの物体が互いに力を及ぼすとき，その二つの力の大きさは等しく，方向は反対である。

運動の法則のうち，振動解析に直接関係する法則は第2法則である。これを式にしたものを**運動方程式**（equation of motion）という。ここで運動方程式を後の章で利用できる形にまとめておく。簡単のためここでは，対象とする機械や構造物は平面運動をするものとする。運動の平面内に，適当な点を原点Oとする直角座標系 O-xy を固定する。なお3次元運動を含めた力学の基礎については，例えば拙著[3]を参照いただきたい。

1.2.1　質点の運動方程式

大きさが無視でき，質量が1点に集中していると考えることができる物体を**質点**（particle, material point）という。大きさが無視できる物体では，それ自体の回転を考えないで運動を論ずることができる。したがって回転運動を考えなくてよい物体は，大きくても質点として扱うことができる。この項で，このような質点の運動方程式を示す。

質点の質量を m とする。質点の位置を，点Oを始点とするベクトルで表して $\boldsymbol{r}$，座標で表して x, y とする。質点の加速度は $\boldsymbol{r}$ あるいは x, y をそれぞれ時間 t で2階微分したものである。慣例的に時間微分を記号「・」で表すことが多いので，本書でもこの記号を用いる。これを用いれば加速度は $\ddot{\boldsymbol{r}}$ あるいは $\ddot{x}, \ddot{y}$ で表される。質点に作用する力を，ベクトルで表して $\boldsymbol{F}$，x, y 軸方向の成分で表して X, Y とする。これらを用いて運動の第2法則を書くと，ベクトルで表して

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F} \tag{1.1}$$

成分で表して

$$m\ddot{x}=X, \quad m\ddot{y}=Y \tag{1.2}$$

である。ここで質量，加速度，力の単位は，SI単位でそれぞれ kg，m/s²，N である。式(1.1)，(1.2)が質点の運動方程式である。以下本書では，おもに成分で表した運動方程式を用いる。

質点の運動を一意に定めるには，運動方程式のほかに，ある時刻（多くの場合この時刻を $t=0$ とする）における物体の位置と速度を指定する**初期条件**

(initial condition) が必要である。これは現実の世界で，加えた力のほかに，はじめに物体がどの位置にいたか，どのような速度であったかによってその後の物体の運動が定められることと対応する。

質点に働く力と初期条件が与えられれば，初期条件を満たす運動方程式の解を求めて質点の運動が定められる。

【例題 1.1】

質量 m の質点を，地表面から初速度 v_0 で傾き角 θ_0 の方向に投げるときの質点の運動を求めよ。

〚**解答**〛 質点を投げる位置を原点 O とし，運動の平面内に直角座標系 O-xy を x 軸が地表にあるように定める。質点を投げる時刻を $t=0$ とし，任意の時刻 t における質点の位置を座標 x, y とする。重力加速度を $g(\fallingdotseq 9.8\ \mathrm{m/s^2})$ とする。質点に作用する力は x 軸方向に 0，y 軸方向に重力 $-mg$ である。したがって式(1.2)によって運動方程式は

$$m\ddot{x}=0, \quad m\ddot{y}=-mg \tag{1}$$

となる。初期条件は

$$t=0\ \text{において}\quad x=0, \quad y=0, \quad \dot{x}=v_0\cos\theta_0, \quad \dot{y}=v_0\sin\theta_0 \tag{2}$$

である。

式(1)を積分して x, y を求めると

$$x=C_1t+C_2, \quad y=-\frac{1}{2}gt^2+C_3t+C_4 \tag{3}$$

となる。ここで C_1, C_2, C_3, C_4 は任意定数である。式(2)の初期条件を用いて任意定数を定めると，求める運動は

$$x=v_0t\cos\theta_0, \quad y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t\sin\theta_0 \tag{4}$$

となる。 ◇

式(1.1)あるいは式(1.2)はふつうこの形で用いるが，問題によっては，これを書き直して別の解釈をして用いると便利なことがある。ここでこれを示す。式(1.1)を

$$\boldsymbol{F}+(-m\ddot{\boldsymbol{r}})=0 \tag{1.3}$$

と書き直す。この式で項 $-m\ddot{\boldsymbol{r}}$ を力と見なすと，この式は，実際の力 $\boldsymbol{F}$ と見かけの力 $-m\ddot{\boldsymbol{r}}$ がつり合っていると解釈することができる。ここで考えた見

かけの力 $-m\ddot{\boldsymbol{r}}$ を**慣性力**（inertia force）という。実際の力と慣性力がつり合うという考え方を**ダランベールの原理**（principle of D'Alembert）という。式(1.2)をダランベールの原理でいえば，実際の力 X, Y と慣性力 $-m\ddot{x}, -m\ddot{y}$ がそれぞれつり合うことになる。

1.2.2　剛体の運動方程式

前項では大きさが無視できる物体の運動方程式を示した。ここでは大きさのある物体として，剛体の運動方程式を示す。**剛体**（rigid body）とは，力が働いてもそれ自体は変形しないと考えることができる物体である。運動方程式を示すための準備として，いくつかの量を確認しておく。

力には物体を回転させる働きがある。この働きを**力のモーメント**（moment of force）あるいは単にモーメントという。モーメントの大きさを，**図 1.2** に示す，点 O まわりに回転可能な剛体上の点 P に力 $\boldsymbol{F}$ が働く場合について考える。この場合のモーメントの大きさ N は，力の大きさ F と，点 O から力 $\boldsymbol{F}$ の作用線に下ろした垂線 $\overline{\mathrm{OH}}=r\sin\phi$ との積

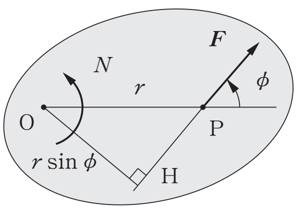

図 1.2　力のモーメント

$$N=rF\sin\phi \tag{1.4}$$

で与えられる。モーメントを扱うとき，正負を定めておくと便利である。慣例に従って本書では，反時計方向に回転させる働きのモーメントを正とする。剛体にいくつかの力が同時に働く場合，剛体を回転させる働きの大きさは，個々の力によるモーメントを，正負を考慮して加え合わせた**合モーメント**（resultant moment）で与えられる。

重心を考える。**重心**（center of gravity）とは，質量で重みづけをした物体の平均位置のことである。物体を，質点の集まりと考えられる質点系と，質量が分布していると考えられる連続体に分け，それぞれについて重心を考える。まず質点系を取り上げる。座標系 O–xy で定められる平面内に質点系があると

索　　　　　引

―― 著者略歴 ――

1963 年　名古屋大学工学部機械学科卒業
1968 年　名古屋大学大学院工学研究科博士課程修了
　　　　 工学博士（名古屋大学）
1968 年　名古屋大学助手
1970 年　名古屋大学講師
1976 年　名古屋大学助教授
1985 年　名古屋大学教授
2004 年　名古屋大学名誉教授
2004 年　愛知工業大学教授
2011 年　愛知工業大学特任教授
　　　　 現在に至る

改訂　振動工学 ― 基礎編 ―

Vibration Engineering――Fundamentals, Second Edition

2000 年 10 月 27 日　初　版第 1 刷発行
2010 年 4 月 20 日　初　版第11刷発行
2012 年 5 月 1 日　改訂版第 1 刷発行

検印省略

著　者　安田(やすだ)　仁彦(きみひこ)
発 行 者　株式会社　コロナ社
　　　　　代 表 者　牛来真也
印 刷 所　新日本印刷株式会社

112-0011　東京都文京区千石 4-46-10
発行所　株式会社　**コ ロ ナ 社**
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)
ホームページ http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978-4-339-04624-3　（中原）　（製本：愛千製本所）
Printed in Japan

落丁・乱丁本はお取替えいたします