経済学部生のための数学

— 高校数学から偏微分まで —

小杉　のぶ子　【著】

コロナ社

ま　え　が　き

経済学を学ぶ上で数学は不可欠ですが，経済学部に進学した学生の中には，数学に対して苦手意識を持っている方々も少なからずいます．また，しばらく数学から離れていたという学生もおり，高校で学んだ内容を忘れてしまっていることも多々あります．

入門レベルの理論経済学の講義で用いられる数学のうち，最も重要なのは微分ですが，高校数学で習う関数や方程式，数列や確率の知識なども必要となります．

本書は，著者が中央大学経済学部で 1 年生を対象に数学科目を教える中で，最低限必要と感じた数学の内容を 1 冊にまとめたものです．高校数学の内容についても詳しく説明しましたので，中学校で学んだ知識があれば，経済学部で必要となる基礎的な数学を理解できるようになっています．

全体の構成は次のとおりです．

・第 1 章では，高校で学ぶ内容から，方程式，不等式，1 次関数，2 次関数，指数関数，対数関数，分数関数，無理関数など，経済学で必要となる方程式と関数の知識を抽出してまとめました．

・第 2 章では，等差数列，等比数列，数列の和などの基礎的な知識から始まり，経済学で欠かせない無限等比級数や漸化式についても説明しています．

・第 3 章では，1 変数関数の微分の基本的な考え方を扱います．経済学では最適化問題の解法に微分を用いますが，その際に必要となる数学の基礎的な知識について説明します．なお，本章の 3.2 節，3.3 節を読めば，高校で習う整式の微分とその応用について理解できるようになっています．そして 3.4 節以降が，多くの学生にとって大学で学ぶ新しい内容となっています．

・第 4 章では，多変数関数の微分（偏微分）を扱います．偏微分について理解

し，極値問題を解けるようになることを目標としています．

・ 第5章では，離散的な値をとる確率変数，ならびにその期待値と分散について扱っています．ここでは，基本的な確率の考え方や性質について説明しており，さらに進んだ内容については付録で扱っています．
・ 最後に付録として，集合や場合の数の概念，1変数関数の積分と連続的な値をとる確率変数，ならびに代表的な確率分布について，簡単に紹介しています．これらについては，必要に応じて参照する形で活用してください．

第1章から第5章のうち，第3章と第4章はこの順番で学ぶ必要がありますが，それ以外の章についてはそれぞれ独立していますので，章の順序を気にせずに読むことが可能です．大学入学前に身につけた数学の知識に応じて，必要な箇所を学んでいけるようになっています．

なお，数学的に難しい内容を扱っている節には，$\star$ 印をつけてあります．これらは適宜，飛ばす形で読み進めても構いません．

本書では，定理の簡単な証明なども載せていますが，それらを全部理解できなくても問題ありません．公式や定理などについては四角い枠で囲ってありますので，枠内で述べられている内容や式について理解してもらえれば十分です．また，例や例題も多く載せ，演習問題（問の略解はコロナ社書籍ページ https://www.coronasha.co.jp/np/isbn/9784339061284/に掲載）も設けています．自分で問題を解くことで理解が深まるので，ぜひ挑戦してほしいと思います．

各章末ではコーヒーブレイクとして，本書で学ぶ数学が実際の経済学の分野でどのように用いられているのかについて取り上げています．読者が数学を学ぶ上での動機づけとなれば嬉しく思います．

最後に，刊行にあたってお世話になったコロナ社の方々，ならびにさまざまな形で執筆を支えてくださった皆様に，心より御礼申し上げます．

2023年8月

小杉のぶ子

目　　　次

1. 関数と方程式

2. 数　　列

3. 1変数関数の微分

4.　多変数関数の微分

5.　確　　　　率

付　　　録

ギリシャ文字表

大文字	小文字	読み方	大文字	小文字	読み方
A	α	アルファ	N	ν	ニュー
B	β	ベータ	Ξ	ξ	クサイ，グザイ
Γ	γ	ガンマ	O	o	オミクロン
Δ	δ	デルタ	Π	π	パイ
E	ε	イプシロン	P	ρ	ロー
Z	ζ	ゼータ	Σ	σ	シグマ
H	η	イータ	T	τ	タウ
Θ	θ	シータ	Υ	υ	ウプシロン
I	ι	イオタ	Φ	ϕ, φ	ファイ
K	κ	カッパ	X	χ	カイ
Λ	λ	ラムダ	Ψ	ψ	プサイ
M	μ	ミュー	Ω	ω	オメガ

実数の分類

・自然数は　　　$1,\ 2,\ 3,\ \cdots$

・整数は　　　　$\cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$

であった.

有理数は，分数 $\dfrac{m}{n}$（m，n は整数で $n \neq 0$）で表される数である．$n = 1$ のとき，$\dfrac{m}{n} = m$ となり，整数を表す.

有理数は整数以外に，$\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{5}{4}$　などを含む.

無理数とは，有理数でない数のことをいう．すなわち，分数の形で表すことのできない数であり，循環しない無限小数で表される.

無理数には，$\sqrt{2}$，$-\sqrt{3}$，π　などがある.

実数とは，有理数と無理数を合わせたものである.

実数と有理数，無理数，整数，自然数の関係は**図**のようになる.

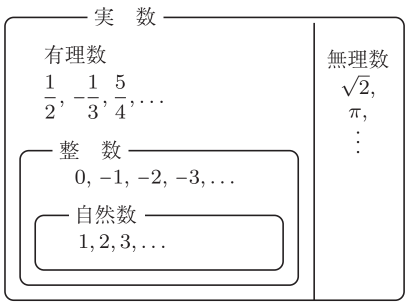

図　数の分類

一般に，実数を $\mathbb{R}$，有理数を $\mathbb{Q}$，整数を $\mathbb{Z}$，自然数を $\mathbb{N}$ で表す．例えば，x が実数であるとき，$x \in \mathbb{R}$ と書く（集合に属することを表す記号「$\in$」については，付録 p.184 参照）.

1章　関数と方程式

1.1　整式の計算

いくつかの数と文字の積で表される式を**単項式**という．掛け合わされている文字の個数を単項式の**次数** といい，数の部分を係数という．特定の文字に着目し，ほかの文字を数と同じように考えることもある．

例えば，単項式 $-2x^3y$ の次数は 4，係数は -2 であるが，文字 x に着目したとき，この単項式の次数は 3，係数は $-2y$ である．

$x^3 - 2xy + 1$ のように，いくつかの単項式の和として表される式を**多項式**といい，各単項式をこの多項式の項という．

単項式と多項式をあわせて**整式**という[†]．整式の各項の次数のうち最も大きいものをその整式の次数という．例えば，$x^3-2xy+1$ の次数は 3 である．次数が n の整式を n 次式という．整式の項の中で，文字を含まない項を定数項という．

任意の整式 A, B, C について，以下の法則が成り立つ．

- **交換法則**：$A + B = B + A, \qquad AB = BA$
- **結合法則**：$(A + B) + C = A + (B + C), \qquad (AB)C = A(BC)$
- **分配法則**：$A(B + C) = AB + AC, \qquad (A + B)C = AC + BC$

1.1.1　指　数　法　則

a をいくつか掛けたものを a の**累乗**という．正の整数 n に対して

[†] 「多項式」と「整式」を同じ意味で用いることも多い．

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 個}}$$

を a の n 乗という．このとき，n を a^n の**指数**という．指数 n は負の整数，有理数などにも拡張できるが，詳しくは 1.8 節で述べる．

指数法則

m, n は正の整数とする．

(i) $a^m a^n = a^{m+n}$　(ii) $(a^m)^n = a^{mn}$　(iii) $(ab)^n = a^n b^n$

(iv) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$　(v) $a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m > n) \\ 1 & (m = n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m < n) \end{cases}$

例題 1.1　次の式を計算せよ．

(1) $a^3 \cdot a^2$　(2) $(-a^3)^2$　(3) $x^3 \div x^4$　(4) $\left(\dfrac{3b^2c}{2a}\right)^3$

(5) $(-2ab^2)^3 \times 3a^2b \div a^5$

【解答】

(1) $a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$

(2) $(-a^3)^2 = (-1)^2 a^6 = a^6$

(3) $x^3 \div x^4 = \dfrac{x^3}{x^4} = \dfrac{1}{x^{4-3}} = \dfrac{1}{x}$

(4) $\left(\dfrac{3b^2c}{2a}\right)^3 = \dfrac{3^3b^6c^3}{2^3a^3} = \dfrac{27b^6c^3}{8a^3}$

(5) $(-2ab^2)^3 \times 3a^2b \div a^5 = \dfrac{-8a^3b^6 \times 3a^2b}{a^5} = \dfrac{-24a^5b^7}{a^5} = -24b^7$　◇

1.1.2　展開と因数分解

整式の積を分配法則等を用いて単項式の和に表すことを展開という．逆に，1つの整式を 2 つ以上の整式の積の形に表すことを因数分解という．

2 次式の展開と因数分解

(i) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2, \qquad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

(ii) $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

(iii) $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

(iv) $(ax+b)(cx+d) = acx^2+(ad+bc)x+bd$

上記の定理で，左辺から右辺を導くことが展開，右辺から左辺を導くことが因数分解である．

例題 1.2 次の式を展開せよ．

(1) $(3x+2)(4x-1)$ (2) $(x+y-z)(x-y+z)$

【解答】

(1) $(3x+2)(4x-1) = 12x^2+\{3\cdot(-1)+2\cdot 4\}x-2 = 12x^2+5x-2$

(2) $(x+y-z)(x-y+z) = \{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\}$
$= x^2-(y-z)^2 = x^2-y^2-z^2+2yz$ ◇

問 1. 次の式を展開せよ．

(1) $(5x-3)^2$ (2) $(2x-3y)(2x+3y)$

(3) $(x-2)(x+6)$ (4) $(3x-2)(2x+3)$

(5) $(4x-3)(5x-1)$ (6) $(x-1)(x^2+2x+1)$

(7) $(a-b+4)^2$ (8) $(a+b)^2(a-b)^2$

例題 1.3 次の式を因数分解せよ．

(1) $9x^2-30xy+25y^2$ (2) $3x^2+x-14$

【解答】

(1) $9x^2-30xy+25y^2 = (3x)^2-2\cdot 3x\cdot 5y+(5y)^2 = (3x-5y)^2$

(2) 公式 $(ax+b)(cx+d) = acx^2+(ad+bc)x+bd$

を利用し，$ac=3$，$ad+bc=1$，$bd=-14$ となる a，b，c，d をみつける．

$a=1$，$c=3$ として，$bd=-14$ となる場合を考えると，$b=-2$，$d=7$ のときに

$ad+bc=1$ となることがわかる．これより $3x^2+x-14=(x-2)(3x+7)$　◇

問 2.　次の式を因数分解せよ．

(1) x^2+7x　(2) x^2-36

(3) $x^2+7x-18$　(4) $4x^2-5x+1$

(5) $6x^2+11x-10$　(6) x^3-2x^2-8x

(7) $3x^2+10x+8$　(8) $5x^2+4x-9$

(9) $4x^2-(x+1)^2$　(10) $4x^2+12xy+9y^2$

(11) $xy+x+y+1$　(12) $2x^3y-8xy^3$

3 次式の展開の公式と因数分解の公式は以下のとおりである．

3 次式の展開と因数分解

(i)
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

(ii)
$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

例題 1.4　次の式を展開せよ．

(1) $(4a+b)^3$　(2) $(3x-2)(9x^2+6x+4)$

【解答】

(1) $(4a+b)^3=(4a)^3+3\cdot(4a)^2\cdot b+3\cdot 4a\cdot b^2+b^3=64a^3+48a^2b+12ab^2+b^3$

(2) $(3x-2)(9x^2+6x+4)=(3x)^3-2^3=27x^3-8$　◇

問 3.　次の式を展開せよ．

(1) $(x+4)^3$　(2) $(5a-2b)^3$

(3) $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$　(4) $(4a-3b)(16a^2+12ab+9b^2)$

例題 1.5　次の式を因数分解せよ．

(1) $8a^3-125b^3$　(2) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-1$

【解答】

(1) $8a^3 - 125b^3 = (2a)^3 - (5b)^3 = (2a-5b)(4a^2 + 10ab + 25b^2)$

(2) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 1$

$$= (x+y)^3 - 1^3 = \{(x+y)-1\}\{(x+y)^2 + (x+y) + 1\}$$
$$= (x+y-1)(x^2 + y^2 + 2xy + x + y + 1)$$

◇

問 4. 次の式を因数分解せよ.

(1) $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$　　(2) $x^3 - 216y^3$

(3) $27a^3 - 54a^2 + 36a - 8$　　(4) $2x^3 + 54y^3$

1.2　分数式と無理式

1.2.1　分　数　式

A が整式で，B が定数でない整式のとき，$\dfrac{A}{B}$ の形の式を分数式という.

分数式では，分子と分母をその共通因数で割ることを約分するという．また，それ以上約分できない分数式を既約分数式という.

分数式の四則演算は分数と同様に行い，結果は既約分数式または整式の形にしておく.

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}, \qquad \frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$

分母が異なる分数式の加法と減法は，通分してから計算する.

例題 1.6　次の分数式を簡単にせよ.

(1) $\dfrac{3}{x^2+2x} - \dfrac{2}{x^2-x}$　　(2) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-9} \div \dfrac{x^2+4x+4}{x^2+3x}$　　(3) $\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}}$

【解答】

(1) $\dfrac{3}{x^2+2x} - \dfrac{2}{x^2-x} = \dfrac{3}{x(x+2)} - \dfrac{2}{x(x-1)} = \dfrac{3(x-1)-2(x+2)}{x(x+2)(x-1)}$

$$= \frac{3x-3-2x-4}{x(x+2)(x-1)} = \frac{x-7}{x(x+2)(x-1)}$$

索　　　引

—— 著 者 略 歴 ——

現職：中央大学経済学部教授．お茶の水女子大学理学部数学科卒業，お茶の水女子大学大学院理学研究科修了．日本銀行，お茶の水女子大学助手，東京海洋大学准教授などを経て現在に至る．博士（理学）．

経済学部生のための数学　— 高校数学から偏微分まで —

2023 年 10 月 30 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

著　者	小杉 のぶ子	
発行者	株式会社	コロナ社
	代表者	牛来真也
印刷所	三美印刷株式会社	
製本所	有限会社	愛千製本所

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発 行 所　株式会社　コ ロ ナ 社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話（03）3941–3131（代）
ホームページ https://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–06128–4　C3041　Printed in Japan　（西村）