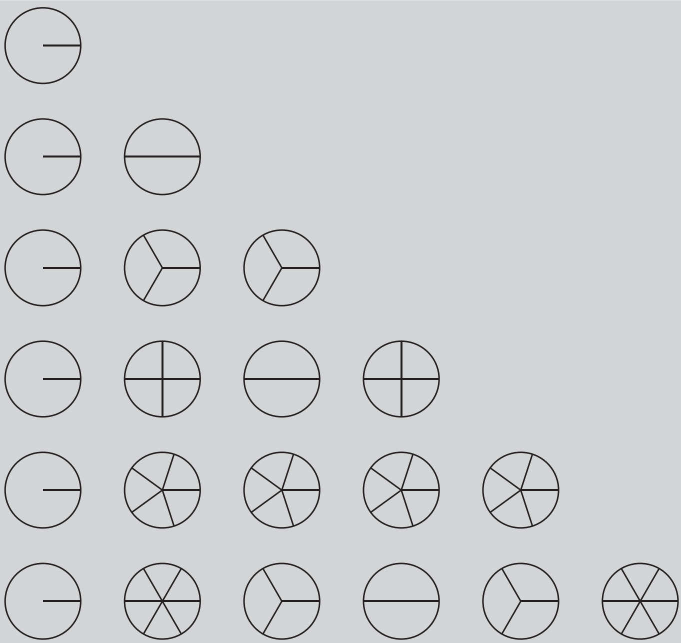
思考力を磨く

信号処理基礎の仕組み

陶良【著】



コロナ社

ま　え　が　き

物理学の学問分野は具体的な対象によって，熱力学，力学，音響と振動，電磁気学，光，量子力学などに分かれるが，ほとんどの原理規則は微分方程式によって記述されている。特に線形微分方程式が適用できる場合，逆問題は基本解との畳み込み積分によって解かれる。ここでの基本解は，時間領域ではインパルス応答，空間領域ではグリーン関数として知られている。

信号処理の出発点では，線形微分方程式を線形システムの操作として捉え，さらにシステムの固有関数を基底関数とする考え方を導入する。これにより，微分方程式を代数方程式に変換でき，諸特性をより深く理解し，効果的に利用できる。また，固有関数と基底関数の概念は，応用数学から派生し，計測，制御，通信，情報処理などの技術分野の基盤として重要な役割を果たしている。

信号処理は，数・理・工学の幅広い分野領域の架け橋の1つであると言える。したがって，信号処理への探求は，定理・証明や問題・計算の繰返しを超え，諸概念の物理的意義を理解する洞察力を高めることが望まれる。

本書は，「どうして」を「どのように」に結びつけ，信号処理の既存スキルの習得よりも，今後の発展や周辺学問分野への展開に対する考え方を重視した。例えば，信号処理の中核となるフーリエ変換について，固有・直交基底の観点から導き出すように説明した。また，各要所において，概念や数式の物理的意味を多面的に解読し，信号処理の分野にて省略しがちの物理単位についても考察した。このような考えのもとに，本書を以下の要旨で構成した。

まず，第1章と第2章では，信号とシステムの基本概念と特性を解説する。学生諸君がこれまで数の計算を中心とし，関数の計算になじんでいないことを考慮した。具体的には，関数の横軸変形，奇偶分解，畳み込み積分などの演算，信号処理の要素関数である δ 関数と正弦波の振る舞い，線形時不変システムの基本特性などについて，数式のみならず図形的な見方も用いてかみくだいて解説した。ここからの信号処理への探求の旅をスムーズに楽しむために，パズルゲームの感覚で必要な基礎

概念を身につけてほしい。

第 3 章では，システムの固有関数と信号の基底関数，ならびに関数の内積，直交とノルムの概念を解説する。これらの概念は信号処理の本質を理解するための出発点であり，イメージしやすい 2 次元ベクトルを切り口としてグラフ例を用いて説明した。なお，直交基底関数に基づいた関数の分解は，データ圧縮，成分解析，パターン認識，機械学習など，信号処理と隣接するデータサイエンス分野の基盤にもなっているため，その領域の入り口である最小二乗法も紹介した。これらの概念に基づき，最後にフーリエ級数展開の基底関数を導いた。

第 4〜6 章では，フーリエ級数展開，フーリエ変換，離散時間フーリエ変換，離散フーリエ変換の順に，信号処理入門の中核である各種フーリエ変換の概念，特性を解説する。特に，これらの相互関係の説明に留意した。応用例としては，原則それぞれの基本概念の理解に関係の強いものに絞った。

第 7 章は，時間と周波数の両方の情報を取り入れた展開として，ウェーブレット変換，ラプラス変換，z 変換を紹介する。これらは，データ解析，制御工学やデジタルフィルタなど，一見異なる応用先の基礎となっている。ここでは，仕組み重視の主旨から，どのように計算するかやどこに使うかよりも，フーリエ変換の制限に着眼し，諸概念を解剖して，それぞれの意義の洞察を優先した。

本書は，信号処理の入門教材として，理工系大学 2，3 年次の学生を対象と想定している。複素数，微分積分，線形代数など大学基礎数学の知識があれば内容を理解できる。信号処理の基礎知識の習得のみならず，他の数理関連分野とのつながりに対する思考の啓発によって，学問の楽しさを味わい，初学者以外も新しい見方がひらめくことを期待したい。本書の至らない点については，ご意見とご指摘をいただければ幸いである。

本書の執筆と出版にお世話になったコロナ社の方々に感謝を申し上げる。

2024 年 2 月

著　者

章末問題詳細解説は以下よりダウンロード可能
https://www.coronasha.co.jp/np/isbn/9784339009903/

目　　　次

1.　信号の表現と基本特性

2.　システムの概念と基本特性

3.　線形時不変システムの固有関数と直交基底関数

4.　フーリエ級数展開

5. 連続フーリエ変換

6.　離散時間信号のフーリエ変換

7.　非定常信号処理への拡張

本書で使用する記号

定数	j：虚数単位，e：自然対数の底，π：円周率
集合	$\mathbb{C}$：複素数，$\mathbb{R}$：実数，$\mathbb{Q}$：有理数，$\mathbb{Z}$：整数 $\in$ 集合の元（要素）である $\notin$ 集合の元（要素）でない
論理記号	$:=$ 定義（〜として定義される） $\Longrightarrow$ 十分（含む，もし〜ならば） $\Longleftrightarrow$ 同意（〜のとき） $\exists$ 存在（〜が存在する） $\forall$ 任意（任意の，すべての） 例：$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists M>0\colon\ \forall x>M,\ \left\lvert\frac{1}{x}\right\rvert<\varepsilon$
複素数関係	$\mathrm{Re}(\cdot)$：複素数の実部，$\mathrm{Im}(\cdot)$：複素数の虚部， $\lvert\cdot\rvert$：大きさ，$\arg(\cdot)$：偏角，$\cdot^*$：複素共役
ベクトル・ 行列関係	小文字・太字・斜体　例：$\boldsymbol{x}$　ベクトル 大文字・太字・斜体　例：$\boldsymbol{A}$　行列 $\cdot^{\mathrm{T}}$，$\cdot^{\mathrm{H}}$ それぞれ：転置，共役転置。例：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}^{*\mathrm{T}}$
特定変数	T_s，f_s それぞれ：サンプリング間隔，サンプリングレート 関連して，$\omega_s=2\pi f_s=2\pi/T_s$
	ω_0 離散角周波数間隔。関連して，$T_0=2\pi/\omega_0$
連続関数・信号	一般：$f(\cdot)$　例：$y(x), x(t), h(t)$
離散分布関数 離散時間信号	一般例：$x[n], c[k]$　$(n,k\in\mathbb{Z})$ 特例：${}_{\mathrm{s}}x[n]$　${}_{\mathrm{s}}x[n]=x(nT_s)$ $x(t)$ をサンプリングした離散時間信号
特定関数	$u(\cdot)$：単位ステップ関数 $p(\cdot)$：単位パルス関数 $\delta(\cdot)$：δ 関数 $\delta_T(\cdot)$：インパルス列 $\mathrm{sinc}(\cdot)$：sinc 関数
	$h(t)$：インパルス応答 $H(\omega)$：周波数応答 $H(s)$：伝達関数（連続時間） $H(z)$：伝達関数（離散時間）

特殊 2 項演算	$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 内積。例：$\langle x(t), y(t) \rangle$
	$\cdot * \cdot$：畳み込み積分，　$\cdot \star \cdot$：相関 例：$f(t) * g(t) = f * g(\tau) = \mathrm{conv}(f(t), g(t))(\tau)$ $x(t) \star y(t) = R_{xy}(\tau) = \mathrm{corr}(x(t), y(t))(\tau)$
システム操作	一般：$S\{\cdot\}(\cdot)$　例：$y(t) = S\{x(t)\}(t)$
特定変換・ スペクトル	$\mathrm{FS}[\cdot][\cdot]$：フーリエ級数展開 $\mathrm{F}[\cdot](\cdot)$：フーリエ変換 $\mathrm{DTFT}[\cdot](\cdot)$：離散時間フーリエ変換 $\mathrm{DFT}[\cdot][\cdot]$：離散フーリエ変換 $\mathcal{L}[\cdot](\cdot)$：ラプラス変換 $\mathcal{Z}[\cdot](\cdot)$：$z$ 変換 スペクトル表記例： ${}_{\mathrm{FS}}X[k] = \mathrm{FS}[x(t)][k]$ $X(\omega) = \mathrm{F}[x(t)](\omega)$ ${}_{\mathrm{DT}}X(\omega) = \mathrm{DTFT}[x[n]](\omega)$ ${}_{\mathrm{D}}X[m] = \mathrm{DFT}[x[n]][m]$ $X(s) = \mathcal{L}[x(t)](s)$ $X(z) = \mathcal{Z}[x(t)](z)$ 逆変換例：$\mathrm{F}^{-1}[X(\omega)](t) = x(t)$

第 1 章

信号の表現と基本特性

信号（signal）は幅広い分野領域に使われ，表す物理量もさまざまある。信号の本質は「データ」の「分布」と理解してよい。**信号処理**（signal processing）は，音響，画像，計測，制御，通信，人工知能など挙げきれないほどの応用先があるが，本質的には興味のある情報の加工や解読にすぎない。これを議論するために，信号を数学的に抽象化し，**関数**（function）を用いて表現すれば都合がよい。これによって信号の処理は関数の計算問題に帰すことができる。本章では信号の表現，変形，基本演算と特性を説明し，さらに信号処理の仕組みを理解するために重要な特殊信号を紹介する。

1.1 信号の表現

1.1.1 一般関数表現

関数とは，ある量と別のある量との対応関係である。ここで，「分布を示す量」は**独立変数**（independent variable），「データを示す量」は**従属変数**（dependent variable）と呼ぶ。なお，一般的に，独立変数や従属変数は必ずしもそれぞれ 1 つの物理量に限らない。例えば画像の場合では，独立変数は 2 つの数値より表す平面上の位置であり，従属変数はその位置での画像値となり，3 原色で表せば，3 つの数値より構成される。これら 1 組（複数個）の量から構成される変数は，**ベクトル**（vector）を用いて表現できる。独立変数をベクトル $\boldsymbol{x}$，従属変数をベクトル $\boldsymbol{y}$ とすれば，信号は $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ と表記できる。また，ベクトルに含まれる量の個数を**次元**（dimension）と呼ぶ。画像の場合では，独立変数と従属変数はそれぞれ 2 次元と 3 次元となる。なお，独立変数の数値範囲は**定義域**（domain），従属変数の数値範囲は**値域**（codomain）と呼ぶ。変数の種類とその次元を示すには，例えば画像の場合では 2 次元平面座標と 3 原色成分ともに実数なので，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$，$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ と記すことができる。

本書は，おもに独立変数と従属変数ともに 1 次元の量からなる関数を扱う。独立変数，従属変数，その対応関係を別々に示す場合，信号 $y(x)$ を式 (1.1) より表現す

ることになる。

$$y = f(x) \tag{1.1}$$

ここで，関数 $f(\cdot)$ は独立変数 x と従属変数 y との対応関係を意味する。**図 1.1** に示すように，入力数値 x が $f(\cdot)$ を通して，出力数値 y になると理解してよい。なお，関数とは，三角関数や指数関数など数式で表せるものもあるが，一般的な信号は，簡単な数式より記述できない場合が多い。

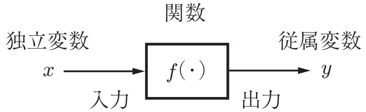


図 1.1　関数のイメージ

独立変数を横軸，従属変数を縦軸にすれば，たがいに対応する特定な x と y を平面上の 1 点より表せる。具体的な信号が定めた対応関係を満たすすべての点をプロットすると，信号をグラフとしてわかりやすく表すことができる。**図 1.2** に一例を示す。信号処理の分野では便利上，変数物理量の単位を省略し，数値として扱うことが多い。例えば，独立変数を時間 t，従属変数を電圧値 v とした場合，図 1.2 は電圧信号 $v(t)$ の波形となる。

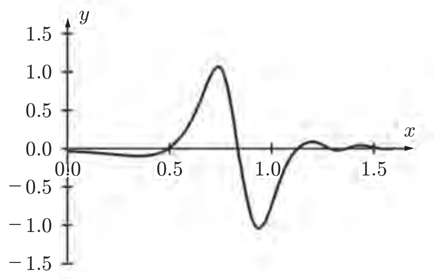


図 1.2　信号を表す関数のグラフ例

2 つの変数の対応関係は，例えば $x^2 + y^2 = 1$ のような陰関数も考えられるが，信号を示す関数 $y(x)$ とは言えない。$x = 0$ に，$y = 1$ と $y = -1$ の 2 つの従属変数が対応していることに問題がある。信号を示す関数は，以下のことを原則とする。

> 定義域内における 1 つの独立変数に，1 つだけの従属変数が対応する。

ただし，この条件は対応関係の逆方向に必須とされない。すなわち，1 つの従属変数（例えば図 1.2 の $y = 0.5$）に複数個の独立変数が対応する場合がある。このような従属変数の一意性の制約条件は集合論の**写像**（mapping）に相当する。

1.1.2　区分関数と継続区間

一般的な信号のほとんどは，簡単な数式より表すことができないが，信号の特性を分析や理解するために，簡単な数式を利用できれば便利となる。**図 1.3** に例示したように，信号全体を 1 つの数式に表現することが困難であるが，独立変数の定義域を部分部分に分けて，各区分にそれぞれの数式より表すことができる。このような関数は，**区分関数**（piecewise function）という。区分関数の数式表現にはいくつかの方式があるが，本書では式 (1.2) のように表現する。

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \le x < 0 \\ -2x+2, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \tag{1.2}$$

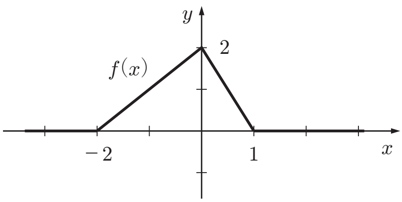


図 1.3　区分関数グラフ例

図 1.3 に示す関数は，$x \in (-2, 1)$ を除いた，$x < -2$ と $x > 1$ の区間において，すべての関数値が 0 である。$x \in (-2, 1)$ の区間をこの関数の**継続区間**（duration）と呼ぶ。ただし，一般的に，「継続区間内に関数値が 0 ではない」ことを必要条件としない。継続区間は，「この区間外に関数値が 0 である」ことより定められる。すなわち，継続区間内であっても，例えば関数値が正負振動するか，一部だけ 0 となっても構わない。継続区間が有限の関数は，**有限区間**（finite duration）関数という。数学では，関数の継続区間と有限区間を，それぞれ関数の**台**（support）と**コンパクトな台**（finite support）と呼ぶ。

1.1.3　離散分布信号

物理世界のほとんどの信号は，独立変数と従属変数とも連続的に変化する**アナログ信号**（analog signal）である。一方，データの記録や伝送を含むコンピュータによる処理のため，**デジタル信号**（digital signal）が用いられる。両者の違いは簡単に言えば変数を定量化評価する尺度の粗さにある。アナログ信号の変数の連続値は，デジタル信号に有限幅の刻みで離散化される。従属変数の離散化処理は**量子化**（quantizing）といい，独立変数の離散化処理は**標本化**，または**サンプリング**（sampling）と呼ぶ。本書は，おもにサンプリングについて議論する。

独立変数が時間である場合，アナログ信号を**連続時間**（CT, continuous time）**信号**，サンプリング後の信号を**離散時間**（DT, discrete time）**信号**と呼ぶ。ただし，この DT 信号の従属変数はまだ連続値を取るので，デジタル信号ではない。すなわち，DT 信号は，とびとびの時刻にて CT 信号の信号値をサンプルとして抽出し，これらの信号値の数値列から構成される。一般的に，DT 信号の独立変数はサンプルの番号（整数）とし，CT 信号との関係は次式となる。

$$ {}_{\mathrm{s}}x[i] = x(t_{[i]}) \quad (i \in \mathbb{Z}) $$

ここで ${}_{\mathrm{s}}x[i]$ は DT 信号，$x(t)$ は CT 信号である。整数 i は DT 信号の独立変数であり，**インデックス**（index）と呼ぶ。$t_{[i]}$ は i 番目のサンプルの時刻である。

本書は，独立変数は連続か離散かを明記するために，関数に引用される括弧として，DT 信号では $[\cdot]$，CT 信号では $(\cdot)$ を使い分ける。すなわち，$x[m]$，$y[k]$ は DT 信号，$x(t)$，$y(\tau)$ は CT 信号を意味する。また，関数の本質は独立変数と従属変数との対応関係であり，上式の i と $t_{[i]}$ とは数値が異なるため，関数記号として同じ x を用いると混乱しやすい。そのため，特に上式のような CT 信号から離散化した DT 信号を記すため，CT 信号の関数記号の左下に s を付ける。

応用上では，等間隔サンプリング（$t_{[i+1]} - t_{[i]} = T_s$），かつ初期シフト $t_{[0]} = 0$ とする場合が多いので，本書もこれ以降，この条件に従う。この場合の信号値関係は式 (1.3) に示される。

$$ {}_{\mathrm{s}}x[k] = x(kT_s) \quad (k \in \mathbb{Z}) \tag{1.3} $$

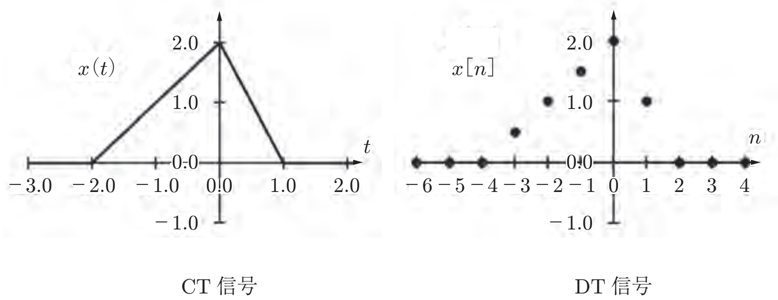
ここで T_s は定数であり，**サンプリング間隔**（sampling interval）または**サンプリ**

ング周期（sampling period）という。その逆数 $f_s = 1/T_s$ は**サンプリングレート**（sampling rate）または**サンプリング周波数**（sampling frequency）と呼ぶ。

CT 信号を示すにはグラフを用いる場合が多い。これに対し，DT 信号は数値列により構成されているため，次式の数列によって表すことができる。

$$x[n] = \{\cdots, x[-2], x[-1], \underline{x[0]}, x[1], x[2], \cdots\} \tag{1.4}$$

ここで，具体的な信号値を並べる際に，インデックスの情報が読み取れないので，0 番の DT 信号値 $x[0]$ にアンダーラインを付けて表記するとわかりやすい。**図 1.4** に $T_s = 0.5$ の一例を示す。



DT 信号の数列表現：$x[n] = \{\cdots, 0, 0.5, 1, 1.5, \underline{2}, 1, 0, \cdots\}$

図 1.4 CT 信号と DT 信号例

1.1.4 ベクトル表記

図 1.4 に示す DT 信号例において，$n = 0, 1$ の 2 点だけなら信号は $\{2, 1\}$ となり，2 次元平面上のベクトルより表現できる。$n = -1, 0, 1$ の 3 点だけなら $\{1.5, 2, 1\}$ となり，3 次元空間のベクトルより表現できる。点数を増やしても，式 (1.4) に示す数列を，式 (1.5) のように，点数と同じ次元の空間ベクトルより表現できる。

$$\boldsymbol{x} = (\cdots \quad x[-2] \quad x[-1] \quad x[0] \quad x[1] \quad x[2] \quad \cdots)^{\mathrm{T}} \tag{1.5}$$

ここで，T は転置であり，信号 $\boldsymbol{x}$ は列ベクトルであることを意味する。さらに，サンプリング間隔を小さくすれば，この信号ベクトルの次元（要素の数）が増えるだけで，本質は変わらない。時刻の並べ順さえ決まれば，CT 信号であっても，無限

索　　　　　引

—— 著 者 略 歴 ——

1989年　ハルビン工業大学（中国）応用物理学科卒業
1994年　ハルビン工業大学（中国）大学院博士課程修了（一般力学専攻），工学博士
2000年　千葉工業大学講師
2003年　千葉工業大学准教授
2008年　千葉工業大学教授
　　　　現在に至る

思考力を磨く信号処理基礎の仕組み
Insights into the Fundamentals of Signal Processing

2024 年 4 月 22 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

著　　者　陶（とう）　良（りょう）
発 行 者　株式会社　コ ロ ナ 社
　　　　　代 表 者　牛 来 真 也
印 刷 所　三 美 印 刷 株 式 会 社
製 本 所　有限会社　愛 千 製 本 所

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発 行 所　株式会社　コ ロ ナ 社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ　https://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–00990–3　C3055　Printed in Japan　（新宅）