ラプラス変換と電気回路

工学博士　川村 雅恭 著

コロナ社

まえがき

ラプラス変換あるいはその応用に関する既刊の書物には優れたものが多く，それぞれに特徴をもっている．ところで一般に電気に関係する人々の関心は，ほとんど応用にあるのだろうが，それかといってあまり応用に偏った書物ではいささかものたりなく，なんらかの不安がつきまとう．しかし数学的に厳密さをもった書物では多くの場合応用に到達するまでに息切れしないでもない．

われわれがラプラス変換を電気回路に応用する一つの重要な目的の一つは，回路素子が，時間的に不変でしかも回路に加えられた電圧，回路に流れる電流の大きさによって，その値が変らないいわゆる線形回路の過渡現象を，簡単にしかも正しく求めることである．一般に，抵抗 R のほかに，インダクタンス $L(M)$ や静電容量 C を含む電気回路の諸量（電圧，電流，電荷）の，過渡時での値を求めるには，微積分方程式をたて，それを解かなければならない．しかしこの方法では回路が多少複雑になれば，微積分方程式をたてることすらかなりやっかいなことが多く，特にそれを古典的な方法で解く場合には，一般解を求めた後，それに含まれる積分定数を決めるために，初期値を求めるときなど，簡単な回路であっても場合によっては相当な苦労をしなくてはならない．ところで，正弦波交流を扱う交流理論では，時間的に不変な線形回路の定常状態での諸量を求めるが，その場合は，回路の各素子に対して R, $j\omega L$ $(j\omega M)$, $\frac{1}{j\omega C}$ (ω，角周波数）なる複素インピーダンスを定義し，問題を時間領域の回路から，ω 領域の回路に移しかえて，これに回路解析に関する諸法則，定理を適用すれば，単なる複素数の計算によって ω 領域での回路の諸量が求められ，必要があれば逆にそれらを時間領域の値に移しかえることも容易であった．したがって，この場合は微積分方程式が解の出発点であることを考えることすら

必要なかった.

それでは，回路の過渡現象が，パルス，三角波，矩形波などのほか，特に古典的な解法では，解を求めることが困難な波形の電源が加えられたときにも，交流理論の場合と同様な手法によって求められないだろうか．それが，ラプラス変換を用いることによって可能なのである.

すなわちラプラス変換を用いれば，回路の各素子に対して，R, sL (sM), $\frac{1}{sC}$ (s は実数あるいは一般に $\sigma+j\omega$ なる複素数で，σ, ω は正の定数）のように一般化されたインピーダンスが定義され（$j\omega L$, $\frac{1}{j\omega C}$ は正弦波交流に対してのみ定義される)，初期値に関しては単にそれまでに L に鎖交していた磁束，C に蓄積されていた電荷を考えれば初期値に関する新たな電源が導入されて，初期値の問題については変換の段階で解決され，時間領域の回路は，s 領域の回路に移される．したがってこの場合もいろいろ微積分方程式をたて，それを解くという手順は全く不必要となり，書き換えられた s 領域の回路に対して，直接交流理論の場合と同様に回路解析に関する諸法則，定理を適用し，しかも単なる代数計算を行い，s 領域での回路の諸量を求め，これを逆ラプラス変換（時間関数と s 関数との対応表を使って）することにより，時間領域での過渡値はもちろん定常値も求められるのである.

ところで，この書物を書く動機となったのは，実はこれまでに，多くの著者によって紹介されたラプラス変換の電気回路への応用の基礎と有用性をいま少し単刀直入に，しかも容易に理解してもらえるような解説書があったなら，と考えたからで，高度なことは他書におまかせすることとして筆をとった．書き上げて，ふりかえれば，かんばしい出来ばえではなかった，しかし初志はいくらか貫けたように思われる．なお十分とはいえないが，ラプラス変換に関する他の重要で，基礎的な応用についても，幾つかふれておいた．この書が，ラプラス変換の電気回路への応用についての入門書として，また電気回路に類推されて，機械振動系，音響系の回路が描けることがわかっているから，これらの

方面を学ぶ初学者にも幾分なりとも役立てば幸いと思っている．

終りに本書は，これを書くに当って多くの優れた既刊の書物を参考にさせていただき，それらに負うところが非常に多い．これらの書物を巻末に掲げ著者ならびに，その出版社に対して深く感謝の意を表する．

1978年3月

著　者

本書を発行していた昭晃堂が2014年6月に解散したことに伴い，この度，コロナ社より継続出版することになりました．昭晃堂にて1978年9月の1刷発行から30刷までに至っておりますが，引き続き多くの方にご拝読いただき役に立つならば，出版社としてこの上ない喜びです．

2014年8月

目　次

1.　ラプラス変換

1.1　ラプラス変換と逆ラプラス変換……1

1.2　基本的な $f(t)$ 関数の $\mathfrak{L}$ 変換……3

$f(t)=A$ の $\mathfrak{L}$ 変換／$f(t)=At$ の $\mathfrak{L}$ 変換／$f(t)=\varepsilon^{\alpha t}$ の $\mathfrak{L}$ 変換／$f(t)=At\varepsilon^{\alpha t}$ の $\mathfrak{L}$ 変換／定理［1］　加法定理／定理［2］　推移定理／$f(t)=\sin \omega t$ の $\mathfrak{L}$ 変換／$f(t)=\cos \omega t$ の $\mathfrak{L}$ 変換／$f(t)=\sinh at$ の $\mathfrak{L}$ 変換／$f(t)=\cosh at$ の $\mathfrak{L}$ 変換／$f(t)$ の導関数 $\dfrac{df(t)}{dt}$ の $\mathfrak{L}$ 変換／$f(t)$ の不定積分 $\int(t)dt$ の $\mathfrak{L}$ 変換／$f(t)$ の定積分 $\int_0^t f(t)dt$ の $\mathfrak{L}$ 変換／定理［3］　複素微分定理／定理［4］複素積分定理／定理［5］時間スケールの変更定理

演習問題……21

2.　逆ラプラス変換

2.1　$Q(s)$ に重根を含まない場合……22

2.2　$Q(s)$ に重根を含む場合……26

2.3　定理［6］　ヘビサイドの展開定理 ……32

2.4　定理［7］　変形されたヘビサイドの展開定理 ……35

2.5　定理［8］　分母 $Q(s)$ に共役複素数の根をもつ場合のヘビサイドの展開定理 ……37

2.6　未定係数法による場合 ……41

2.7　視察による場合 ……44

2.8　定理［9］　相乗定理（ボレルの定理）……45

演習問題……48

目　　次

3.　簡単な回路の過渡現象

3.1　R, L の直列回路と直流電源……51
3.2　定常値・過渡値・時定数 ……53
3.3　R, L の直列回路の短絡……54
3.4　R, C の直列回路と直流電源……57
3.5　R, C の直列回路の放電……61
3.6　R, L の直列回路と特殊な電源……64
演習問題……66

4.　s 領域の回路

4.1　$\mathfrak{L}$ 変換法での初期値と，その取扱い ……69
4.2　基本的な s 回路……72
4.3　M を含むときの s 回路 ……74
4.4　直流電源と R, L の回路の例 ……78
4.5　直流電源と R, C の回路の例 ……87
4.6　M を含む回路の例……99
4.7　直流電源と L, C を含む回路の例 ……105
4.8　正弦波交流の回路の例……117
演習問題 ……127

5.　単位ステップ関数の $\mathfrak{L}$ 変換と応用

5.1　単位ステップ関数の定義と $\mathfrak{L}$ 変換 ……130
5.2　$u(t-a)$ の $\mathfrak{L}$ 変換 ……130
5.3　$u(t)-u(t-a)$ の $\mathfrak{L}$ 変換 ……131
5.4　単位ステップ関数と任意の時間関数との積の関数の $\mathfrak{L}$ 変換 ……132
5.5　定理［3］ 変時定理……132
演習問題 ……139

目　　次

6.　周期関数の $u(t)$ による表示と $\mathcal{L}$ 変換……141

演習問題 ……151

7.　特殊な波形の周期波入力の応答……152

演習問題 ……159

8.　周期関数の $\mathcal{L}$ 変換とフーリエ級数 ……160

演習問題 ……171

9.　伝 達 関 数 ……172

演習問題 ……179

10.　単位インパルス関数のラプラス変換……180

11.　z 変 換

11.1　$f(t)$ の z 変換の例……188

11.2　逆 z 変換……196

$F^*(z)$ の逆 z 変換を z のべき級数に直して求める方法／$F^*(z)$ の逆 z 変換を部分分数に分解して求める方法

11.3　z 変換の応用 ……205

演習問題 ……209

演習問題解答……210

参 考 書……218

索　　引……219

1. ラプラス変換

ラプラス変換 (Laplace transform) を数学的な厳密性をもって理解するには，複素関数論の知識が必要である．しかしラプラス変換を工学的に応用する立場からすれば，その必要性はほとんどない．数学は工学的に見れば現象を解析するための道具であり，それが理論的に正しいことが証明されていれば，それを正しく応用することに重点が置かれる．したがって実際にラプラス変換を応用する場合には，すでに用意された時間関数 $f(t)$ と，それがラプラス変換された s 関数 $F(s)$ との対応表を利用すればよい．なお，このことがラプラス変換を応用する場合の一つの大きな利益なのである．しかしラプラス変換を有効に応用するには，ラプラス変換そのものに理解と親しみをもたなければならない．それには少なくとも基本的な $f(t)$ 関数については，ラプラス変換の定義に従って $F(s)$ 関数を求め，さらに変換に関する基本的な諸定理を知っておく必要があろう．ここではそれらについて解説する．

1.1 ラプラス変換と逆ラプラス変換

時間 t の関数 $f(t)$ のラプラス変換（$\mathfrak{L}$ 変換と略記する）を求めることを記号的に $\mathfrak{L}[f(t)]$ で表わし，ラプラス変換の数学的な定義は，後に説明するような制限をもった，t には無関係な変数 s を導入して，t について

$$\mathfrak{L}[f(t)]=\int_0^\infty f(t)\varepsilon^{-st}dt \tag{1.1}$$

の定積分を求め，$f(t)$ を s だけの関数に変換することをいう．ただし，$f(t)$ は $t<0$ では 0，$t>0$ のすべての領域[1]で連続であるとする．

ところで，$\mathfrak{L}[f(t)]$ を $F(s)$ と書き，s 関数 $F(s)$，あるいは s 領域の関数 $F(s)$ とも呼び，$f(t)$ を t 関数 $f(t)$，あるいは t 領域の関数 $f(t)$ とも呼ぶ[2]．

また，ある s 関数 $F(s)$ が知られているとき，これに対応する t 関数 $f(t)$ を求めることを，逆ラプラス変換（$\mathfrak{L}^{-1}$ 変換と略記する）といい，記号的に $\mathfrak{L}^{-1}[F(s)]$ で表わし，数学的には，次の複素積分

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)\varepsilon^{st}ds \tag{1.2}$$

によって定義される．

しかし，本書では式 (1.2) から $\mathfrak{L}^{-1}$ 変換を求めることはしない．それは，現実に扱われる $f(t)$ 関数と，その $\mathfrak{L}$ 変換 $F(s)$ との間には1対1の対応があることが知られているから，$f(t)$，$F(s)$ の対応表を使用すれば $\mathfrak{L}^{-1}[f(s)]$ が求まるからである．

なお，式 (1.1)，(1.2) での s は，ラプラス演算子といわれ，一般に複素数

$$s=\sigma+j\omega \qquad (\text{ただし } \sigma,\ \omega \text{ は実数}) \tag{1.3}$$

で，s は式 (1.1) の積分が求まるように[3]，それには $\lim_{t\to\infty}f(t)\varepsilon^{-st}=0$ を満足するような s を選べばよいことが明らかにされている．

それでは，$t>0$ で定義されるすべての $f(t)$ 関数について，$\mathfrak{L}$ 変換を可能とする s が必ず存在するのだろうか．必ずしもそうではないが，現在のところ，現実の物理現象についての $f(t)$ 関数を取り扱う限りでは，要求される s が存在するのである．次に基本的な $f(t)$ 関数の $\mathfrak{L}$ 変換を求めよう．なおそこでは s についての制限も検討しているが，本書の目的からすれば，それほど気にする必要もなく，そのような性質の変数なのだ位に理解しておけばよい．

---

1) 厳密には $t>0$ の領域で部分的に連続であればよい．

2) $f(t)$ を表関数，$F(s)$ を裏関数と呼ぶこともある．

3) 積分が求まれば $\mathfrak{L}$ 変換が可能である．

1.2 基本的な $f(t)$ 関数の $\mathcal{L}$ 変換

ここでは基本的な $f(t)$ 関数および，$f(t)$ 関数の導関数と積分の $\mathcal{L}$ 変換を，その定義に従い，あるいは，いくつかの定理を応用して求める．

1.2.1 $f(t)=A$（定数）の $\mathcal{L}$ 変換（$t\geq 0$ の範囲での定数）

$\mathcal{L}$ 変換の定義式（1.1）によって

$$\mathcal{L}[A]=\int_0^\infty A\varepsilon^{-st}dt=A\int_0^\infty \varepsilon^{-st}dt \quad (A \text{ は定数だから})$$

$$=A\left[\frac{\varepsilon^{-st}}{-s}\right]_0^\infty=\frac{A}{s} \tag{1.4}$$

となる．式（1.4）は重要な式である．

なお式（1.4）の計算で，$\dfrac{\varepsilon^{-st}}{-s}$ に定積分の上限 $t=\infty$ を代入した結果が 0 となったのは，$s=\sigma+j\omega$ の σ を正の実数とし，$\lim\limits_{t\to\infty}\varepsilon^{-st}=\lim\limits_{t\to\infty}\varepsilon^{-\sigma t}\cdot\varepsilon^{-j\omega t}$ を求めれば，$\varepsilon^{-j\omega t}$ は t の値にかかわらず振幅が 1 で，偏角 ωt のみが変化する有限な値[1]だが，$\varepsilon^{-\sigma t}$ が $t\to\infty$ で 0 に収束するからである．したがってこの場合の s には，その実数部 σ が $\sigma>0$ となるような値を選べばよい．

1.2.2 $f(t)=At$ の $\mathcal{L}$ 変換（$t\geq 0$）

At は，一定な勾配 A で t の増加と共に直線的に増加する関数で，ランプ(ramp)関数といわれる．その $\mathcal{L}$ 変換は，定義式から

$$\mathcal{L}[At]=A\int_0^\infty t\varepsilon^{-st}dt$$

によって求められる．この積分には部分積分の公式 $\int u\,dv=uv-\int v\,du$ を利用する．

---

1) $\varepsilon^{-j\omega}=\cos\omega t-j\sin\omega t$ として複素平面にプロットしてみよ．なお $\varepsilon^{\pm j\theta}=\cos\theta\pm j\sin\theta$ は Euler（オイラー）の定理として知られ，これは両辺を級数に展開することによって容易に証明される．また，この定理から，$\cos\theta=\dfrac{\varepsilon^{j\theta}+\varepsilon^{-j\theta}}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{\varepsilon^{j\theta}-\varepsilon^{-j\theta}}{2j}$ の関係が導かれ，重要な公式である．

いま $u=t$, $dv=\varepsilon^{-st}dt$ とおくと, $du=dt$, $v=\dfrac{\varepsilon^{-st}}{-s}$, したがって

$$\mathfrak{L}[At]=A\left\{\left[\frac{t\varepsilon^{-st}}{-s}\right]_0^{\infty}{}^{1)}+\int_0^{\infty}\frac{\varepsilon^{-st}}{s}dt\right\}$$

$$=A\left\{0+\left[\frac{\varepsilon^{-st}}{-s^2}\right]_0^{\infty}\right\}=\frac{A}{s^2} \tag{1.5}$$

となる. 式 (1.5) は重要な式である.

1.2.3 $f(t)=\varepsilon^{\alpha t}$ の $\mathfrak{L}$ 変換(α は一般に複素定数)

$\mathfrak{L}$ 変換の定義式から

$$\mathfrak{L}[\varepsilon^{\alpha t}]=\int_0^{\infty}\varepsilon^{\alpha t}\cdot\varepsilon^{-st}dt=\int_0^{\infty}\varepsilon^{(\alpha-s)t}dt$$

$$=\left[\frac{\varepsilon^{-(s-\alpha)t}}{\alpha-s}\right]_0^{\infty}{}^{2)}=\frac{1}{s-\alpha} \tag{1.6}$$

となる. 式 (1.6) は重要な式である.

1.2.4 $f(t)=At\varepsilon^{\alpha t}$ の $\mathfrak{L}$ 変換

$\mathfrak{L}$ 変換の定義式によって

$$\mathfrak{L}[At\varepsilon^{\alpha t}]=A\int_0^{\infty}t\varepsilon^{\alpha t}\cdot\varepsilon^{-st}dt=A\int_0^{\infty}t\varepsilon^{-(s-\alpha)t}dt$$

ここで部分積分を行なうために $u=t$, $dv=\varepsilon^{-(s-\alpha)t}dt$ とおけば, $du=dt$, $v=\dfrac{\varepsilon^{-(s-\alpha)t}}{-(s-\alpha)}$, したがって

$$\mathfrak{L}[At\varepsilon^{\alpha t}]=A\left[\frac{t\varepsilon^{-(s-\alpha)t}}{-(s-\alpha)}\right]_0^{\infty}{}^{3)}+\frac{A}{s-\alpha}\int_0^{\infty}\varepsilon^{-(s-\alpha)t}dt$$

---

1) $\lim\limits_{t\to\infty}t\cdot\varepsilon^{-st}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{\varepsilon^{st}}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\frac{d}{dt}t}{\frac{d}{dt}\varepsilon^{st}}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{s\varepsilon^{st}}=0$

(ただし $s=\sigma+j\omega$ の定数部 σ が $\sigma>0$ のような s を選ばなければ積分は発散して $\mathfrak{L}$ 変換が求まらない.)

2) 複素数 $(s-\alpha)$ の実数部 $Re(s-\alpha)$ が $Re(s-\alpha)>0$ になるように s を選ばなければならない. でなければ積分は発散して $\mathfrak{L}$ 変換が求まらない.

3) $\lim\limits_{t\to\infty}t\cdot\varepsilon^{-(s-\alpha)t}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{\varepsilon^{(s-\alpha)t}}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{(s-\alpha)\varepsilon^{(s-\alpha)t}}=0$ ただし $Re(s-\alpha)>0$ のように s を選ぶ.

$$=0+\frac{A}{s-\alpha}\left[\frac{\varepsilon^{-(s-\alpha)t}}{-(s-\alpha)}\right]_0^\infty=\frac{A}{(s-\alpha)^2} \tag{1.7}$$

となる.

1.2.5 定理 [1] 加法定理

いま $\mathfrak{L}[f_1(t)]=F_1(s)$, $\mathfrak{L}[f_2(t)]=F_2(s)$ とすれば

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[f_1(t)\pm f_2(t)]&=\mathfrak{L}[f_1(t)]\pm\mathfrak{L}[f_2(t)]\\&=F_1(s)\pm F_2(s)\end{aligned} \tag{1.8}$$

となる. これを加法定理 (addition theorem) という.

〔証明〕 この定理は $\mathfrak{L}$ 変換の定義と積分の定理によって証明される. すなわち,

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[f_1(t)\pm f_2(t)]&=\int_0^\infty\{f_1(t)\pm f_2(t)\}\varepsilon^{-st}dt\\&=\int_0^\infty f_1(t)\varepsilon^{-st}dt\pm\int_0^\infty f_2(t)\varepsilon^{-st}dt\ (\text{積分の定理より})\\&=F_1(s)\pm F_2(s)\end{aligned}$$

となるから, 式 (1.8) が証明された.

【例 1.1】 $f(t)=\varepsilon^{-at}+\varepsilon^{-bt}$ の $\mathfrak{L}$ 変換を求めよ (a, b は定数).

〔解〕 式 (1.6) の α のかわりに $-a, -b$ とおいて

$$\mathfrak{L}[\varepsilon^{-at}]=\frac{1}{s+a},\quad \mathfrak{L}[\varepsilon^{-bt}]=\frac{1}{s+b}$$

したがって, $f(t)$ の $\mathfrak{L}$ 変換は定理 [1] より

$$\mathfrak{L}[\varepsilon^{-at}+\varepsilon^{-bt}]=\frac{1}{s+a}+\frac{1}{s+b}$$

となる.

【例 1.2】 $\mathfrak{L}[f(t)]=F(s)$ とするとき, $Af(t)$ の $\mathfrak{L}$ 変換を求めよ (A は定数).

〔解〕 $Af(t)$ は $f(t)$ の A 個の和と考えれば, 定理 [1] より

$$\mathfrak{L}[Af(t)]=AF(s)$$

索　引
（五十音順）

ア　行

M を含むときの s 回路……74
s 領域のインピーダンス……73
s 領域の回路……68

Euler の定理 ……3

カ　行

過渡値……53
加法定理 ……5

逆 z 変換……196
逆ラプラス変換……22
共役複素数……34, 115

減衰振動の包絡線 ……108

サ　行

鎖交磁束連続の法則……70
サンプリング周期 ……185
サンプル値 ……185
サンプル値関数 ……185, 187

磁界のエネルギー ……105
時間スケールの変更定理……18
時定数……53
周期関数の $u(t)$ に
　よる表示と $\mathcal{L}$ 変換……141
周期関数の $\mathcal{L}$ 変換と
　フーリエ級数 ……160
振動的 ……107, 125

推移定理 ……6, 134

z 変換 ……185, 187
静電エネルギー ……105

相似定理……18
相乗定理（ボレルの定理）……45

タ　行

第一種の初期値……69
第二種の初期値……69
ダブレット・インパルス ……183
単位インパルス関数 ……180, 185
単位ステップ関数 ……130
単位ステップ関数と任意の
　時間関数との積の関数の $\mathcal{L}$ 変換……132

δ 関数 ……180
定常値……53
電圧の伝達関数 ……172
電荷保存の法則……70
伝達イミタンス ……172
伝達関数 ……172
伝達関数 $G_v(s)$ の z 変換 ……206
電流の伝達関数 ……172

特殊な波形の周期波入力の応答 ……152

ハ　行

半波整流波の $\mathcal{L}$ 変換……144

非振動的 ……106, 123

フーリエ級数 ……160
フーリエ係数 ……160
複素積分定理……16
複素微分定理……15
部分分数……23
分母 $Q(s)$ に共役複素数の根をもつ
場合のヘビサイドの展開定理……37

ヘビサイドの展開定理……32
変換インピーダンス……73
変形されたヘビサイドの展開定理……35
変時定理 ……132, 133, 134, 142

マ 行

未定係数法……41

ヤ 行

$u(t-a)$ の $\mathcal{L}$ 変換……129

ラ 行

$\mathcal{L}$ 変換法での初期値 ……69
ラプラス演算子 ……2
ランプ (ramp) 関数……3

臨界的 ……107, 122

— 著 者 略 歴 —

1947 年　日本大学工学部卒業
1947 年　日本大学勤務
1961 年　工学博士（東京工業大学）
1989 年　日本大学名誉教授
2001 年　逝去

ラプラス変換と電気回路
© Mariko Mabuchi 2014

2014 年 9 月 30 日　初版第 1 刷発行
2019 年 9 月 30 日　初版第 4 刷発行

検印省略

著　　者　川村雅恭（かわむら まさ ただ）
発 行 者　株式会社　コロナ社
　　代 表 者　牛来真也
印 刷 所　株式会社平河工業社

112-0011　東京都文京区千石 4-46-10
発行所　株式会社　コロナ社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)
ホームページ http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978-4-339-00868-5　C 3054　Printed in Japan　（中原）

JCOPY　<出版者著作権管理機構 委託出版物>
本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は，そのつど事前に，出版者著作権管理機構（電話 03-5244-5088，FAX 03-5244-5089，e-mail: info@jcopy.or.jp）の許諾を得てください。

本書のコピー，スキャン，デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は，いかなる場合も認めていません。
落丁・乱丁はお取替えいたします。