定＞(選言，連言)＞含意とする。中の二つは同順位である。選言，連言はそれぞれ結合律が成立するが，含意では成立しない。ここでは，このことは無視して答えよ。)

（1）　**数式の記法**　一般に，2項演算$*$を$x*y$のように表す方法を**演算記号の中置記法**（infix notation）という。

これに対し$*x\ y$の形に書く方法もある。これを**前置記法**（prefix notation）という。ポーランドの論理学者ルカシェヴィッツ（Lucasiewicz：原綴りは字母が異なる）にちなんで**ポーランド記法**（Polish notation）と呼ばれることも多い。計算機のプログラミング言語のLISPでは（$*x\ y$）のように前置記法が用いられる。

演算記号を後置する$x\ y*$の形の記法もよく用いられ，**後置記法**（postfix notation）と呼ばれる。**逆ポーランド記法**ともいう。ある電卓は，後置記法の数式で計算する。

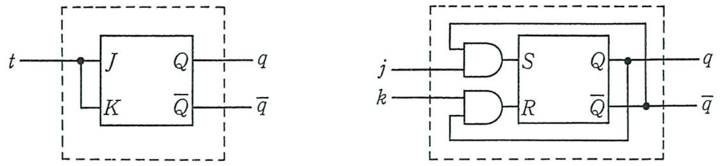
また，コンパイラにおける中間言語の数式の表現も後置記法である。上に触れたように，中置記法では数式の表現においては括弧を用いないと数式の解釈があいまいになるが，前置記法や後置記法では，括弧を用いなくても任意の数式が表せる。

例題 2.56　加法＋と乗法・からなる「前置記法の数式」,「後置記法の数式」の形成規則を帰納的に定義せよ。ただし，変数はすべてxで表す。

解　前置記法数式
- ⓐ　xは数式である。
- ⓑ　X，Yが数式ならば，$+X\ Y$，$\cdot X\ Y$はすべて数式である。
- ⓒ　以上の手続きで得られるものだけが数式である。

後置記法数式
- ⓐ　xは数式である。
- ⓑ　X，Yが数式ならば，$X\ Y+$，$X\ Y\cdot$　はすべて数式である。
- ⓒ　以上の手続きで得られるものだけが数式である。

例題 2.57　前置記法あるいは後置記法で表したブール形式の帰納的定義を示せ（[例題]2.54参照)。



（a）　T-FF の論理回路図　　　（b）　JK-FF の論理回路図

図 4.3

化せず，$t=1$ となるとそれまでの出力が反転する。JK-FF は，SR-FF の遷移関数表（出力関数表と同じ）で，禁止入力となっている $(s,\ r)=(1,\ 1)$ のときに，それまでの出力を反転するようにしたものである。

4.1.2　簡単な順序機械

いくつかの簡単な順序機械について例を挙げてみよう。

例題 4.2　入力アルファベットを $\{a,\ b\}$，出力アルファベットを $\{x,\ y,\ z\}$ として，**図 4.4** のような状態遷移図で表されるミーリー機械を考える。グラフの辺のラベルは，入力記号/出力記号を表している。状態遷移関数と出力関数の表を求めよ。関数表は 1 つの表にして，遷移先の状態 q と出力 w を $(q,\ w)$ のように表せ。例えば図ⓐの関数表では，状態 q_0 で入力 b のとき，表の該当部分には $(q_1,\ x)$ と書く。

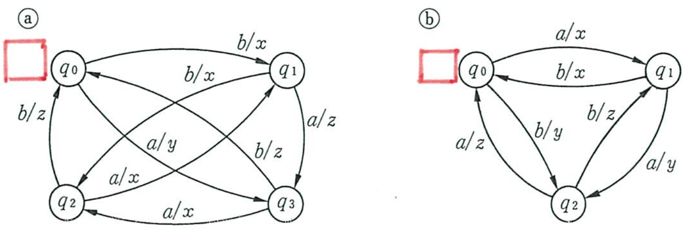


図 4.4

例題 4.3　〔例題〕4.2 のそれぞれのミーリー機械に，つぎの入力系列を与えたときの状態遷移の様子と出力とを示せ。

①　*aababaabba*　　②　*bbaabbaa*　　③　*abaaabbab*　　④　*bababbabb*

例題 4.4　入力記号を $\{0,\ 1\}$ として，つぎのような動作をするムーア機械またはミーリー機械の状態遷移図を示せ。図 4.2 を参考に，状態遷移図を構成せよ。

ⓐ 入力系列を2時点だけ遅らせて出力する。
　例） 011010…が入力されると，・・011010・ を出力する（先頭の出力・・は不定）。

ⓑ 入力系列に1が2個続いたときに1を出力し，それ以外のとき0を出力する。
　例） 入力系列が0011111011100…に対して，・001111001100…を出力する。

ⓒ 系列中に0が3個以上続く連が終了すると1を出力し，それ以外のときは0を出力する。
　例） 入力系列が11000011000101…に対して，00000010000100…を出力する。

ⓓ 入力系列を三つずつ区切って，多数決（2 out of 3方式）で0か1を出力する。（その中に0が過半数あれば0を，1が過半数あれば1を出力する。）
　例） 入力系列が011000010101…に対して，1001…を出力する。

例題 4.5　0，1からなる文字列（ビット列）を入力列とし，読み込んだビット列を2進数と見て，その数を3で割った余りを出力するムーア機械あるいはミーリー機械の状態遷移図を示せ。初期状態のときの出力は0とする。また，この機械に入力列101010011100を読み込ませたときの出力の系列を示せ。入力列の頭（左側）の文字から読み込むから，この例では，2進数としては，1，10，101，1010，10100，…のような入力となる。

例題 4.6　同じ桁数の二つの2進正整数の和を出力するミーリー機械あるいはムーア機械を構成せよ。ただし，入力は二つの数字の同位の桁を下位の桁から入力するとする。例えば，10110+01101を入力するときは，実際には，01，10，11，01，10の記号列が順次入力される。このとき出力は，1，1，0，0，0，1である。これは，10110+01101=100011（22+13=35）に対応している。

4.2 有限オートマトン

4.2.1 有限オートマトン

有限オートマトン（finite automaton，以下FAと書く）は，図4.5のようにモデル化することができる。**有限状態部**，入力用の**入力テープ**と**読取りヘッ**

4.4　DFA と正規表現の同等性および DFA の最小化

4.4.1　非決定性有限オートマトン

前節まで説明してきた FA は，**決定性有限オートマトン**（deterministic finite automaton，DFA）と呼ばれる。それは，状態遷移関数が決定的な性格を有することによっている。DFA の状態遷移関数 δ は

$$\delta : Q \times \Sigma \to Q$$

と定義される関数で，遷移先の状態として一つの状態だけ返すから，入力が決まると動作は一意に決まる。この意味で，**決定性状態遷移関数**といわれる。

状態遷移関数が返す状態を複数にして遷移先を選べるように拡張し，入力が決まっても動作は一意に決まらない**非決定性状態遷移関数**とした FA を，**非決定性有限オートマトン**（non-deterministic finite automaton，NFA）という。そして，文字列の入力終了時に状態遷移で到達可能な状態のなかに一つでも受理状態があれば，入力語は受理される。

例題 4.29　表 4.2 のような状態遷移関数で与えられる NFA の状態遷移図を描け。初期状態は s_0，最終状態は $\{s_1\}$ である。また，$w_1 = 0011001$，$w_2 = 110010101$ を入力したときの状態遷移の様子を示せ。

表 4.2

δ	0	1
s_0	$\{s_0,\ s_1\}$	$\{s_1\}$
s_1	ϕ	$\{s_0\}$

解　図 4.15。

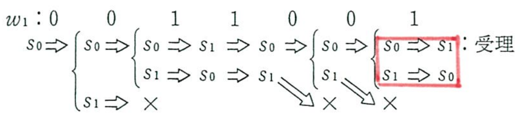
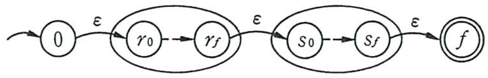


図 4.15

連接　(rs) は正規表現である。



閉包　(r^*) は正規表現である。

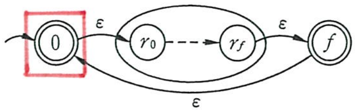


図 4.23

③　以上の手続きによって得られるものだけが正規表現である。

以上で，すべて ε-NFA で表せる。

上に示した正規表現から FA への変換手続きは原理的なものであるから，〔例題〕4.45 のように，実際には無駄な状態や ε - 動作を簡単に省くことができる。

例題 4.47　つぎの正規表現と同等な ε - NFA の状態遷移図を描け。あまり意味のない ε-動作はできるだけ含まないように工夫せよ。

ⓐ　$1^*(0^*1)^*$　　ⓑ　$0^*(10^*)^*$　　ⓒ　$0^*1 + (01^*)^*$　　ⓓ　$01^*(0^*1)^*$

ⓔ　$(0^*1 + 1^*0)^*$

例題 4.48　つぎの正規表現で表される言語を受理する ε-NFA の状態遷移図を示せ。

ⓐ　$1(0 + 10^*)^*$	ⓑ　$11^*(0^*1)^*$	ⓒ　$(01^* + 1^*0)^* + (1^* + 10^*)^*$
ⓓ　$0(10^* + (101)^*)$	ⓔ　$0^*10^*1 + 1^*01^*0$	ⓕ　$(01^* + 1^*01)^* + 0^*1$
ⓖ　$0^*0(01^* + 1)^*$	ⓗ　$10 + (0 + 11)0^*1$	ⓘ　$1^*0 + (0 + 10)^*1$
ⓙ　$(11 + 0)^*(00 + 1)^*$	ⓚ　$1^*01^*(01^* + 1)^*$	ⓛ　$(0 + 10^*10^*)^*$
ⓜ　$(1 + 001)^*(\varepsilon + 00)$	ⓝ　$10 + (0 + 11)0^*1$	ⓞ　$0^*1 + 0^*(1^*0)^*0$

例題 4.49　〔例題〕4.45，〔例題〕4.47，〔例題〕4.48 の正規表現の表す正規言語を受理する ε-NFA を，等価な DFA に変換せよ。

4.4.5　Myhill-Nerode の定理と有限オートマトンの最小化

ある一つの言語を受理する決定性有限オートマトンは多数ある。もちろん，状態記号を書き換えただけではなく，本質的に異なった形態のオートマトンが

存在する。数学的には，同じ言語を受理するDFAで，状態遷移図のグラフが同型にならないDFAである。その中でもできるだけ簡単な（少ない状態数の）有限オートマトンを構成したい。あるDFAを対等な最小の状態数のDFAに変換することを，**DFAの最小化**（minimization）あるいは**DFAの簡単化**という。

例題 4.50　図4.24の三つの状態遷移図で表されるDFAの受理する言語は，たがいに同じであることを示せ。

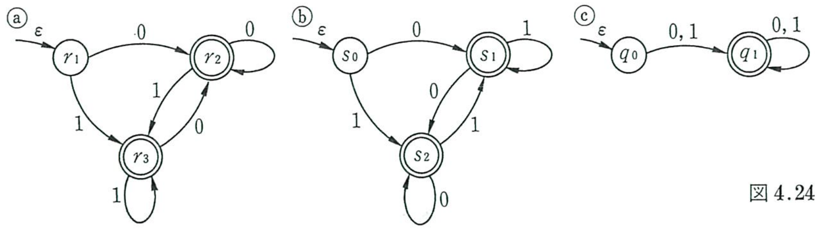


図4.24

解　（ヒント）　それぞれ受理言語を正規表現で表し，その表現が一致することを示せ。

例題 4.51　DFA $M(Q,\ \Sigma,\ \delta,\ S,\ F)$について，つぎの関係$R_M$は$\Sigma^*$上の同値関係であることを示せ。また，この同値関係による同値類の個数は有限個であることを説明せよ。ただしMにおいて，状態遷移関数の定義されていない状態と入力記号の組合せについてはエラー状態を追加定義しておくものとする。

$$x,\ y \in \Sigma^* \text{ に対し，} x\ R_M\ y \overset{def}{=} \delta(S,\ x) = \delta(S,\ y)$$

解　FAにある語を入力してある状態に遷移して停止したとき，その語はその状態で受理されたという。x，$y \in \Sigma^*$に対してFAが同じ状態qに遷移するとき$\delta(S,\ x) = \delta(S,\ y) = q$であり，$x$，$y$は共に状態$q$で受理される語である。この$x$，$y$は関係$R_M$にあり，$x\ R_M\ y$が成立する。関係$R_M$はこのように，同じ状態で受理される語を示す関係である。

ⓐ　同じ語は，当然同じ状態で受理されるから$x\ R_M\ x$が成立し，反射的である。

ⓑ　xがyと同じ状態で受理されれば，当然ながらyはxと同じ状態で受理されるから$y\ R_M\ x$が成立し，対称的である。

ⓒ　xがyと同じ状態で受理され，yとzが同じ状態で受理されるなら，xはzと同じ

状態で受理されるから，$x\ R_M\ y \wedge y\ R_M\ z \rightarrow x\ R_M\ z$ が成立し推移的である。

ⓐ～ⓒより，関係 R_M は同値関係である。

この同値関係 R_M による同値類は，同じ状態で受理される語の集合である。一つの状態で受理される語の集合が一つの同値類に対応する。この対応は1対1である。つまり，同値類の数はDFAの状態の数と等しい。これは，有限オートマトンでは有限である。

例題 4.52　関係 R_M はつぎのような性質を持つ。このことを示せ。

任意の x，$y \in \Sigma^*$ において $x\ R_M\ y$ ならば，任意の $w \in \Sigma^*$ に対し $xw\ R_M\ yw$。

解　$x\ R_M\ y$ ならば x，y は共に同じ状態で受理されているから，そこから共に w で遷移すると遷移先は当然同じである。つまり，xw，yw は共に同じ状態で受理される。したがって，$\delta(S,\ xw) = \delta(S,\ yw)$ であるから，$xw\ R_M\ yw$ である。

一般に，関係 R が，演算・に対し，

$$x\ R\ y \text{ ならば任意の } w \text{ に対し} x \cdot w\ R\ y \cdot w \tag{4.13}$$

となる性質を持つとき，この性質を**右不変**（right invariant）あるいは**右合同**（right congruent）という。R_M は連接演算に対し**右不変同値関係**である。

R_M による同値類は，全体の集合 Σ^* を直和分割する。したがって M の受理言語 L は，有限個に直和分割された Σ^* のいくつかの部分からなることになる。この同値類はDFAの各状態で受理する言語であるから，それを正規表現することができる。具体的には，あるDFAにおいて未定義な状態遷移がないようエラー状態を追加しておき，4.3.2項で用いた方法を用いて各状態で受理される言語の正規表現を求めると，得られたものが R_M の同値類の正規表現である。すべての同値類の和は全体集合 Σ^* になる。

例題 4.53　図4.25のような状態遷移図で示されるDFAにおいて，関係 R_M による同値類を求め，正規表現で表せ。

解　各状態で受理される言語の正規表現を r_i，$i = 0 \sim 6$ とすると

$r_0 = \varepsilon$　　$r_1 = r_0 0 + r_4 1 + r_2 1$　　$r_2 = r_1 1 + r_2 0 + r_6 0$　　$r_3 = r_1 0 + r_2 0 + r_6 1$

$r_4 = r_0 1 + r_5 1$　　$r_5 = r_4 0$　　$r_6 = r_3 1 + r_5 0$

例題 4.54　一般に，言語 L について，つぎの関係 R_L は Σ^* 上の右不変同値関係であることを示せ。任意の x，$y \in \Sigma^*$ において

$x\ R_L\ y \overset{def}{=}$ 任意の $w \in \Sigma^*$ に対し，xw，yw 共に L に属するか，共に属さない。

解　R_L は同値関係である。つまり，$x,y,z \in \Sigma^*$ として

ⓐ　$x\ R_L\ x$ が成立することは明らかであるから，反射律を満たす。

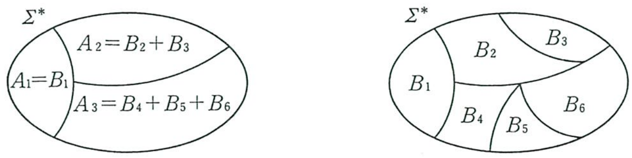
ⓑ　xw，yw が共に L に属するか属さないかならば，yw，xw も共に L に属するか属さないかであるから「$x\ R_L\ y$ ならば $y\ R_L\ x$」も成立し，対称律を満たす。

ⓒ　xw，yw が，共に L に属するか属さないかであり，かつ yw，zw が共に L に属するか属さないか，であるならば，xw と zw も，共に L に属するか属さないか，であるから「$x\ R_L\ y$ かつ $y\ R_L\ z$ ならば $x\ R_L\ z$」が成立し，推移律を満たす。

ⓐ～ⓒより，R_L は同値関係である。R_L は右不変性を持つから，したがって右不変同値関係である。

R_L は同値関係であるから，それによる同値類は Σ^* を直和分割する。つぎの **Myhill–Nerode の定理**によれば，L が正規言語であれば，この同値類の数は有限である。したがって，L は R_L による同値類の有限個の和になる。実際，正規言語では，DFA の右不変同値関係 R_M の同値類は，言語 L の右不変同値関係 R_L の同値類の**細分**になっているのである。つまり，いくつかの R_M の同値類（DFA のいくつかの状態）が R_L の一つの同値類に対応することを意味する。

全体集合 U をいくつかの部分集合の直和で表すことを**分割**という。分割 B が分割 A の細分になっているとき，B を構成する部分集合をいくつか集めた



（a）　R_L の同値類による Σ^* の分割 A　（b）　R_M の同値類による Σ^* の分割 B

図 4.26　Σ^* の同値類による分割

4.20　ⓐ $x = 00^*$，ⓑ $x = (00 + 11)(0 + 1)^*$，ⓒ $x = 01(0^*1)^*$，
ⓓ $x = 0^*(1^*01 + 11(01)^*)^*$，$y = 0^*(1^*01 + 11(01)^*)^*1$，
ⓔ $x = 11 * (0 + 1)(01^*1)^*$，$y = 11^*(\varepsilon + (0 + 1)(01^*1)^*01^*)$

4.21　省略。

4.23　ⓐ $0^*1(0 + 1)^*$，ⓑ $(1 + 00^*1)1^*$，ⓒ $(0^*10^*1)^*0^*10^*$，$(0 + 10^*1)^*10^*$ など

4.24　正規表現はさまざまで以下は解答例。ⓐ $1^*0 + 1^*00(0 + 1)^*$，ⓑ $(00 + 11)(0 + 1)^*$，ⓒ $(1 + 00)((0 + 11)(01)^* + (1 + 00)(10)^*)$，ⓓ $(0^*11^*0)^*0^*11^*22^*$，ⓔ $(00 + 10)^*(01 + 11)0^*$，ⓕ $(11^*0)^*0(0 + 1)^*$，ⓖ $0^*1(10^*1)^*00^*$

4.27　正規表現は，計算や簡単化の方法によってさまざまな表現がある。以下は解答例。状態 q_i，s_i で受理する言語の正規表現を r_i とする。

ⓐ r_1 を消去し，つぎに r_3 を消去して，$r_2 = 01^*0(101^*0 + 0)^*$，
ⓑ r_1，r_2 の順に消去して，$r_3 = (1 + 01^*0)(01^*0)^*$，
ⓒ r_0，r_1 の順に消去して，$r_2 = (1 + 0(10 + 0)^*11)(1(10 + 0)^*11 + 0)^*$，
ⓓ r_0，r_3，r_1 の順に消去して r_2 を求め最後に r_3 を求める。
　$r_3 = 01^*0(101^*0 + 0 + 11)^*1$，
ⓔ r_3，r_2 の順に消去して，$r_1 = (1 + 01^*01^*0)^*$，
ⓕ r_0，r_1，r_2 の順に消去して，$r_3 = (0 + 1(10)^*0)(10(10)^*0)^*$，
ⓖ r_2，r_0 の順に消去して r_1 を求め，最後に r_2 を求める。
　$r_2 = 1(11 + 001 + 01)^*0$，
ⓗ r_2，r_3，r_1 の順に消去して，$r_0 = (0 + 01^*10^*01^*1)^*$，
ⓘ r_1，r_2 の順に消去すると，$r_0 = (10 + (0 + 11)(01)^*(00 + 1))^*$，
ⓙ $r_4 = r_0 + r_2$，$r_5 = r_1 + r_3$ とすると，簡単に r_4，r_5 だけの方程式になって，
　$r_5 = 1^*0(11^*0 + 0)^*$，
ⓚ $r_4 = r_0 + r_1$，$r_5 = r_2 + r_3$ とすると，簡単に r_4，r_5 だけの方程式になって，
　r_5 を消去すると，$r_4 = (0 + 10^*1)^*$

4.28　〔例題〕4.11 は簡単に正規表現が得られる。
　$L_1 : \varepsilon + a + aa + baba$，$L_2 : (b + aa^*bb^*a)(a + b)^*$，

解表 4.4

ⓐ	0	1
$[s_0]$	$[s_2]$	$[s_1, s_3]$
$[s_2]$	$[s_2]$	$[s_0, s_2]$
$[s_1, s_3]$	$[s_0]$	$[s_2]$
$[s_0, s_2]$	$[s_2]$	$[s_0, s_1, s_2, s_3]$
$[s_0, s_1, s_2, s_3]$	$[s_0, s_2]$	$[s_0, s_1, s_2, s_3]$

ⓑ	0	1
$[s_0]$	$[s_1, s_3]$	—
$[s_1, s_3]$	$[s_4]$	$[s_2]$
$[s_2]$	—	$[s_0, s_4]$
$[s_4]$	—	$[s_1]$
$[s_1]$	—	$[s_2]$
$[s_0, s_4]$	$[s_1, s_3]$	$[s_1]$

ⓒ	0	1
$[s_0]$	$[s_1]$	$[s_2]$
$[s_1]$	—	$[s_0, s_3]$
$[s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0]$
$[s_0, s_3]$	$[s_1]$	$[s_2]$
$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0]$

ⓓ	0	1
$[s_0]$	$[s_0, s_4]$	$[s_0, s_1]$
$[s_0, s_4]$	$[s_0, s_2, s_4]$	$[s_0, s_1, s_5]$
$[s_0, s_1]$	$[s_0, s_2, s_4]$	$[s_0, s_1, s_5]$
$[s_0, s_2, s_4]$	$[s_0, s_2, s_3, s_4]$	$[s_0, s_1, s_5]$
$[s_0, s_1, s_5]$	$[s_0, s_2, s_4]$	$[s_0, s_1, s_3, s_5]$
$[s_0, s_2, s_3, s_4]$	$[s_0, s_2, s_3, s_4]$	$[s_0, s_1, s_3, s_5]$
$[s_0, s_1, s_3, s_5]$	$[s_0, s_2, s_3, s_4]$	$[s_0, s_1, s_3, s_5]$

ⓔ	0	1
$[q_0]$	$[q_1]$	—
$[q_1]$	—	$[q_2, q_3, q_4]$
$[q_2, q_3, q_4]$	$[q_1, q_2]$	$[q_3, q_4]$
$[q_1, q_2]$	—	$[q_2, q_3, q_4]$
$[q_3, q_4]$	$[q_1, q_2]$	$[q_3, q_4]$

ⓕ	0	1
$[q_0]$	$[q_0, q_1]$	$[q_1]$
$[q_1]$	—	$[q_0, q_1]$
$[q_0, q_1]$	$[q_0, q_1]$	$[q_0, q_1]$

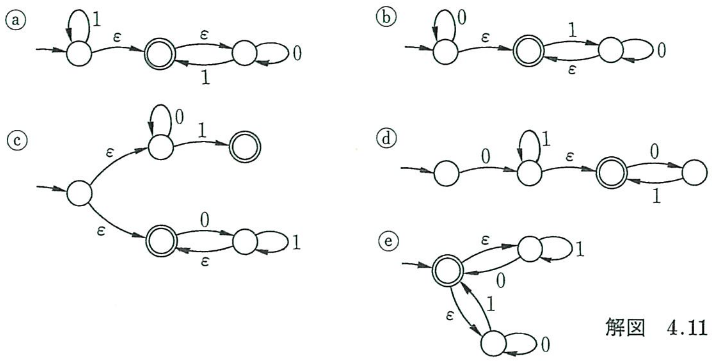
ⓖ	0	1
$[q_1]$	$[q_2, q_3]$	—
$[q_2, q_3]$	—	$[q_1, q_4]$
$[q_1, q_4]$	$[q_2, q_3, q_4]$	$[q_4]$
$[q_4]$	$[q_3, q_4]$	$[q_4]$
$[q_2, q_3, q_4]$	$[q_3, q_4]$	$[q_1, q_4]$
$[q_3, q_4]$	$[q_3, q_4]$	$[q_1, q_4]$

ⓗ	0	1
$[q_0]$	$[q_0, q_1]$	—
$[q_0, q_1]$	$[q_0, q_1]$	$[q_0, q_1]$

4.37，4.39　省略。

4.40　状態遷移図を解図 4.9 に示す。

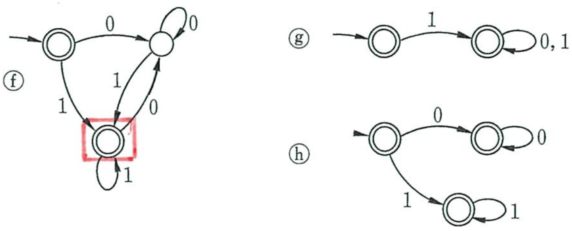
4.47　**解図 4.11**。



解図　4.11

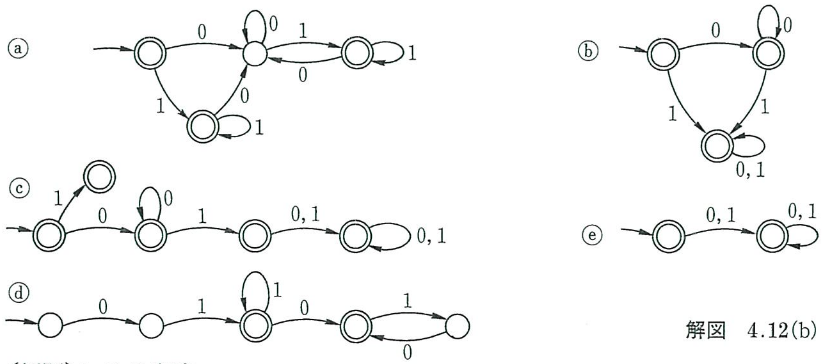
4.48　省略。

4.49　〔例題〕4.45 の一部を**解図 4.12**(a)に示す。



解図　4.12(a)

〔例題〕4.47 は**解図 4.12**(b)に示す。



解図　4.12(b)

〔例題〕4.48 は省略。

── 著者略歴 ──

1969年　京都大学理学部物理学科卒業
1977年　京都大学大学院理学研究科博士課程修了（物理学専攻）
1977年　理学博士（京都大学）
1986年　高知医科大学助教授
1988年　福井大学助教授
1990年　福井大学教授
2012年　福井大学名誉教授

形式言語と有限オートマトン入門
― 例題を中心とした情報の離散数学 ―
Introduction to Formal Language and Finite Automaton
― Discrete Mathematics with Examples and Problems ―

1996年10月15日　初版第1刷発行
2017年9月10日　初版第17刷発行

検印省略

著　者　小倉久和（おぐら ひさかず）
発行者　株式会社　コロナ社
　　　　代表者　牛来真也
印刷所　壮光舎印刷株式会社
製本所　株式会社　グリーン

112-0011　東京都文京区千石4-46-10
発行所　株式会社　コロナ社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)
ホームページ　http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978-4-339-02339-8　C3055　Printed in Japan　（川田）