

〈バイオナビ 3.2〉 3 次元運動学

運動学 (キネマティクス: kinematics) は, 運動の原因すなわち力学関係を考えずに動いている物体の動きにのみ注目してそれを幾何学的に記述することにより, 物体運動の解析に利用される. すなわち, 物体の並進運動や回転運動の位置, 変位, 角変位, 軌道 (運動の経路) とその時間微分値 (速度, 角速度, 加速度, 角加速度) を定量化することにより物体運動を記述することである. 運動の定量化は, ワールド (実験室) 座標系および物体ごとの局所座標系を基準に, 座標系間の相対関係を明らかにすることにより行われる.

ここでは, 下肢の関節運動を記述する際に用いる座標系の構築および座標系間の相対位置の表現方法の基礎について述べる.

(1) 座標系について

1-1 座標系の基本⁽¹⁾

3次元の運動分析では通常, 座標系を 2 つ定義しなければならない. それは, ワールドあるいは実験室座標系 (world または laboratory coordinate system: 以下, WCS) と局所座標系 (local coordinate system: 以下, LCS) である.

WCS は慣性座標系とも呼ばれ, 3次元データの収集において物体の存在空間を定義するときに用いられる. WCS は導出されるすべての計測点や参照点の位置が決定される実験室内に固定された座標系であり, 一般的に任意の原点を持つ右手座標系である.

LCS は, 身体またはセグメント内に設定された座標系であり, それらの部位とともに運動する. WCS と同様に, LCS も右手直交座標系であり, 通常, 身体重心またはセグメント重心に原点を設定する. また x 軸は内外側, y 軸は前後, そして z 軸は長軸向きとする. WCS に対する LCS の方向は, 空間内の身体またはセグメントの方向を示し, 身体またはセグメントの 3次元空間での運動を定量化する.

ここでは, WCS を大文字 X, Y, Z で示し, その単位ベクトルをそれぞれ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ で示す. LCS を小文字 x, y, z で示し, その単位ベクトルをそれぞれ $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ で示す (図 3.27). また回転はロール (x 軸まわりの回転角), ピッ

チ（y 軸まわりの回転角）およびヨー角（z 軸まわりの回転角）の表現法に従う。

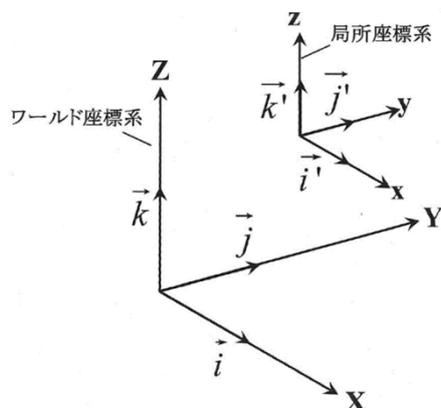


図 3.27 WCS 座標系と LCS 座標系の方向

1-2 局所座標系の決定⁽¹⁾

3次元空間内において LCS を決定するために、多くの方法が使われている。本付録では、骨モデル座標系の構築で用いられた方法について説明する。

座標系の構築において、空間内に存在する 3 つの異なる参照点が必要である。ここではこれらの参照点を矢状面に対して平行に向いていると仮定し、それぞれ $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ として番号付けする（図 3.28）。

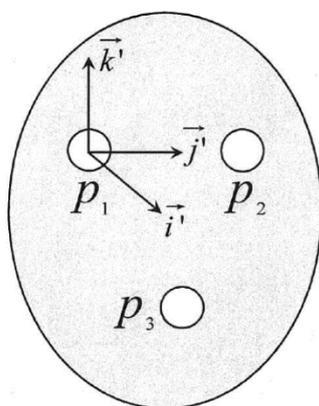


図 3.28 参照点の配置および構築された LCS 座標系

3つの参照点は WCS を基準とする座標値を持っている。しかし、LCS の単位ベクトルは LCS の原点を基準とする座標値を持っているため、ここでは参照点 \vec{p}_1 を原点として座標系を構築する。最初のステップは、参照点 \vec{p}_2 の

位置から参照点 \vec{p}_1 の位置を差し引き、このベクトルをそのノルムで除すことである。これにより、セグメントの前後軸を表す \vec{j}' 方向の単位ベクトルが求められる。2つのベクトルの差として生じるベクトルは、参照点 \vec{p}_1 を起点として、参照点 \vec{p}_2 の方向を向くことになる。その操作は式 (3.58) で表される。

$$\vec{j}' = \frac{(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)}{\|(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)\|} \quad (3.58)$$

この参照点の配列では、セグメントの内外側軸を表す \vec{i}' 軸が LCS の第 2 軸となる。この計算は、2つのステップで行われる。まず、参照点 \vec{p}_3 の位置から参照点 \vec{p}_1 の位置を差し引く。これは先ほどと同様に、参照点 \vec{p}_1 を起点とし、参照点 \vec{p}_3 の方向を向いている。つぎに、式 (3.59) により外積の計算を行い、単位ベクトル \vec{i}' を求める。

$$\vec{i}' = \frac{(\vec{p}_3 - \vec{p}_1) \times (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)}{\|(\vec{p}_3 - \vec{p}_1) \times (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)\|} \quad (3.59)$$

座標系構築では、右手の法則に従い、外積の順を決定する。

LCS の第 3 軸、つまり \vec{k}' は、すでに求められている 2つの単位ベクトル \vec{i}' と \vec{j}' の外積によって決定することができる。同様に、右手の法則に従い、 \vec{k}' が鉛直方向を向くように、式 (3.60) に従って外積計算を行う。

$$\vec{k}' = \vec{i}' \times \vec{j}' \quad (3.60)$$

また LCS の原点位置や各軸方向の定義は自由であり、身体またはセグメント（身体の分節）の特徴などに合わせて、臨機応変に行うことができる。

1-3 座標系間の変換⁽²⁾⁽³⁾

使用される座標系に基づいて、同じ運動や姿勢を異なる方法で表現することができる。つまり、空間で運動する身体またはセグメントを異なる座標系に変換して記述することができるのである。変換とは、1つの座標系で表

現された座標値を，他の座標系で表現された座標値に変えることである．一般的に，変換には並進と回転がある．ここでは，2つの座標系 A, B 間の変換方法を考える．変換では変換する向きが大事であり，一般に添え字を用いて区別する．添え字の付け方として，左肩に基準となる座標系を記し，右下の添え字は相対する座標系を記す．図 3.29 のように，座標系 A を基準とする座標点を用いて座標系 B を構築し，その際の変換行列 T は， ${}^A T_B$ と表わされる．また変換行列は回転行列と並進行列からなり，回転行列 ${}^A R_B$ は以下の式 (3.61) で与えられる．

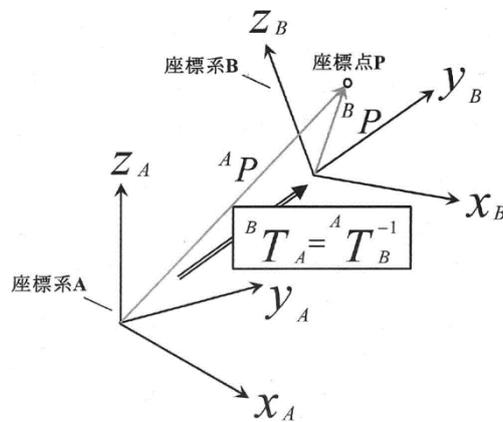


図 3.29 座標系 A から座標系 B への座標変換

$${}^A R_B = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i}'_x & \vec{j}'_x & \vec{k}'_x \\ \vec{i}'_y & \vec{j}'_y & \vec{k}'_y \\ \vec{i}'_z & \vec{j}'_z & \vec{k}'_z \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

並進行列は ${}^A t_B = (t_x, t_y, t_z)$ のように，設定した原点の座標値を用いる．また座標点 P が座標系 A における座標値を ${}^A P = (A_x, A_y, A_z)$ ，座標系 B における座標値を ${}^B P = (B_x, B_y, B_z)$ と置き，座標系 A から座標系 B への座標変換は式 (3.62) を用いて行うことができる．

$${}^B P = {}^A T_B^{-1} {}^A P = {}^A R_B^{-1} ({}^A P - {}^A t_B)$$

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \right) \quad (3.62)$$

また場合によって式（付 1-6）に示す逆変換を用いることもできる。

$${}^A P = {}^A T_B {}^B P = {}^A R_B {}^B P + {}^A t_B \quad (3.63)$$

1-4 座標系間の相対位置⁽²⁾⁽³⁾

WCS 空間内において、複数のセグメントからそれぞれの LCS を構築できる。

アライメント評価や関節運動を表現する際には、各骨モデルに LCS を構築し、空間内における座標系の向きや位置情報を用いて、運動を定量化することができる。前節までは、座標系の構築や構築された座標系への変換について述べたが、この節では、2つの座標系間の相対位置の算出方法について説明する。ワールド座標系を基準とする座標点を用いて、LCS である座標系 A および座標系 B をそれぞれ構築する。また回転、並進行列をそれぞれ算出する（図 3.30）。さらに座標点 P が座標系 A における座標値を ${}^A P$ 、座標系 B における座標値を ${}^B P$ と置く。式（3.63）より、ワールド座標系における座標値 ${}^W P$ は式（3.64）のように与えられる。

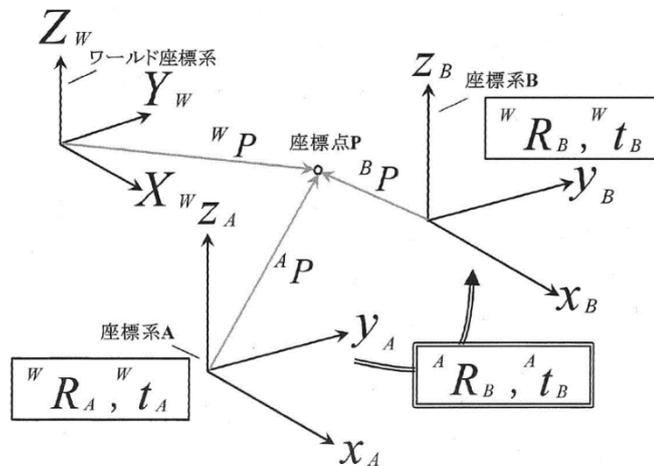


図 3.30 座標系 A からみた座標系 B の相対位置

$$\begin{cases} {}^W P = {}^W R_A {}^A P + {}^W t_A \\ {}^W P = {}^W R_B {}^B P + {}^W t_B \end{cases} \quad (3.64)$$

上式から ${}^W P$ を消去し，さらに ${}^A P$ について解くことで，式 (3.65 付 1-8) が得られる．

$${}^A P = \left({}^W R_A^{-1} {}^W R_B \right) {}^B P + {}^W R_A^{-1} \left({}^W t_B - {}^W t_A \right) \quad (3.65)$$

よって，基準座標系 A からみた座標系 B への回転行列 ${}^A R_B$ および並進行列 ${}^A t_B$ は式 (3.66) で与えられる．また同様にして座標系 B を基準にすることもできる．

$$\begin{cases} {}^A R_B = {}^W R_A^{-1} {}^W R_B \\ {}^A t_B = {}^W R_A^{-1} \left({}^W t_B - {}^W t_A \right) \end{cases} \quad (3.66)$$

最後に得られた回転行列を実際の角度に変換するために，回転行列 ${}^A R_B$ の成分を用いた以下の式 (3.67) ~ (3.69) が使われる．ここで， r_x, r_y, r_z はそれぞれ各軸回りの回転角度である．

$$r_z = \tan^{-1} \left(\frac{R_{21}}{R_{11}} \right) \quad (3.67)$$

$$r_y = \tan^{-1} \left(\frac{-R_{31}}{\cos(r_z) R_{11} + \sin(r_z) R_{21}} \right) \quad (3.68)$$

$$r_x = \tan^{-1} \left(\frac{\sin(r_z) R_{13} - \cos(r_z) R_{23}}{-\sin(r_z) R_{12} + \cos(r_z) R_{22}} \right) \quad (3.69)$$

(2) らせん軸^{(4)~(9)}

2 つの座標系間の方向を表現する別の方法として，有限性らせん軸がある．この方法では，位置ベクトルと方向ベクトルが定義される．座標系の位置から行われる微小な運動は，空間において方向 \vec{n} を持つ単一軸（らせん軸）に沿った運動とその軸回りの回転によって記述することができる．一般的に，この軸は各セグメントの LCS のいずれの軸にも一致しないことに注意

する必要がある．一方の LCS における瞬間位置とその方向が定義され，もう一方の LCS に対して記述されることになる．

図 3.40 のように，2 つの姿勢間のらせん軸を計算する．まず，姿勢 A の LCS からみた姿勢 B の LCS への回転行列 ${}^A R_B$ および並進行列 ${}^A t_B$ から，角度 r_x, r_y, r_z および並進量 t_x, t_y, t_z を算出し，次式のような 4×4 行列を構築する．

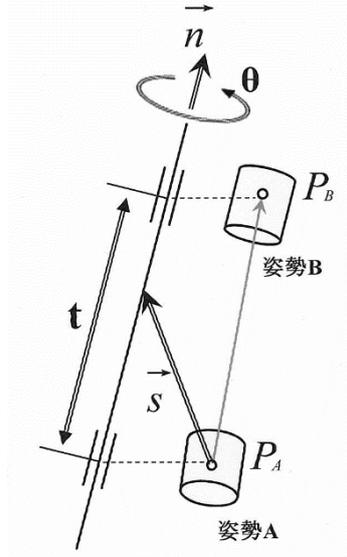


図 3.40 姿勢 A, B 間のらせん軸

$$\begin{aligned}
 & [R_{ij}] (i, j = 1, 2, 3, 4) \\
 & = \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 t_x + s(r_y)t_z & c(r_y)c(r_z) & -c(r_y)s(r_z) & s(r_y) \\
 c(r_x)t_y - s(r_x)c(r_y)t_z & c(r_x)s(r_y) + s(r_x)c(r_y)c(r_z) & c(r_x)c(r_z) - s(r_x)s(r_y)s(r_z) & -s(r_x)c(r_y) \\
 s(r_x)t_y + c(r_x)c(r_y)t_z & s(r_x)s(r_z) - c(r_x)s(r_y)c(r_z) & s(r_x)c(r_z) + c(r_x)s(r_y)s(r_z) & c(r_x)c(r_y)
 \end{bmatrix} \quad (3.70)
 \end{aligned}$$

上式で， c ， s はコサイン（余弦）およびサイン（正弦）の関数である．また，回転行列および並進行列の形からアフィン変換の手法に従い， 4×4 行列に拡張しても良い．次に，得られた行列の成分を用いて，方向ベクトル $\vec{n} = (\vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z)$ およびらせん軸周りの回転量 \cdot を式 (3.78) ~ (3.81) のように算出できる．

$$\vec{n}_x = \frac{(R_{43} - R_{34})}{2 \sin \theta} \quad (3.78)$$

$$\bar{n}_y = \frac{(R_{24} - R_{42})}{2 \sin \theta} \quad (3.79)$$

$$\bar{n}_z = \frac{(R_{32} - R_{23})}{2 \sin \theta} \quad (3.80)$$

$$q = \cos^{-1} \left[\frac{(R_{22} + R_{33} + R_{44} - 1)}{2} \right] \quad (3.81)$$

これらの結果を用いて、らせん軸の位置ベクトル \bar{s} は、2つの LCS の原点座標 P_A , P_B を用いて式 (3.82) ように与えられる。

$$\bar{s} = \frac{(P_B - P_A)}{2} + \frac{\bar{s} \times D}{2 \tan(\theta/2)} \quad (3.82)$$

ここで、 $D = P_B - P_A$ である。最後に、らせん軸に沿った変位 t は式 (3.83) の内積から得られる。

$$t = \bar{n} \cdot D \quad (3.83)$$

らせん軸は回転が小さい場合において特に有効であり、瞬間的な回転軸を表現する。しかし、関節運動の表現に用いた場合、らせん軸による角度表現は臨床で用いられている解剖学的表現とは異なることに注意する必要がある。

参考文献

- (1) ゴートン・ロバートソン：身体運動のバイオメカニクス研究法，大修館書店，(2008)。
- (2) 平岡和幸：プログラミングのための線形代数，アーム社，(2004)。
- (3) 徐剛：3次元ビジョン，共立出版，(1998)。
- (4) Woltring, H.J. et al.: Finite centroid and helical axis estimation from noisy landmark measurements in the study of human joint kinematics, *J. Biomech.*, **18-5** (1985), 379-389.
- (5) Shiavi, R. et al.: Helical motion analysis of the knee -II. Kinematics of uninjured and injured knees during walking and pivoting, *J. Biomech.*, **20-7** (1987), 653-665.
- (6) Blankevoort, L. et al.: The envelope of passive knee joint motion, *J. Biomech.*, **21-9** (1988), 705-721.
- (7) Blankevoort, L. et al.: Helical axis of passive knee joint motion, *J. Biomech.*, **23-12** (1990), 1219-1229.

- (8) Lange, A.D. et al.: Effects of data smoothing on the reconstruction of helical axis parameters in human joint kinematics, *J. Biomech. Eng.*, **112** (1990), 107-113.
- (9) 玉木保, 鈴木一良: 三次元回転角表示のための Helical axis の定義, 日本機械学会論文集 (A 編), **58-551** (1992), 158-163.