(3)応力緩和とクリープ（ひずみ緩和）

本項では先に述べた代表的な 3 つの粘弾性モデルを用いて，応力緩和とクリープ（ひずみ緩和）について具体的に説明しよう．

(3.1)応力緩和応答の計算例

マクスウェル流体モデル，フォークト固体モデル，標準線形固体モデルに図 **2.38-1** に示すような一定ひずみε_0をステップ負荷したときの**応力緩和応答**を，各モデルについて求めてみよう．ひずみのステップ入力は次式で表わせる．

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t) \qquad (2.75\text{-}1)$$

ここで，$H(t)$は**ヘビサイド関数**（**単位ステップ関数**）を表し，次式で定義される．

$$H(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \qquad (2.75\text{-}2)$$

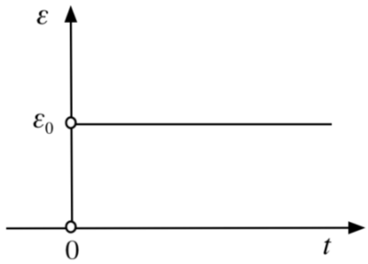


図 2.38-1 ステップひずみ

(a) マクスウェル流体モデルの場合

構成関係式（2.67）とひずみのステップ入力条件（2.75-1）から

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E_1}{\eta_1}\sigma = E_1\varepsilon_0\delta(t), \quad \sigma(0+) = E_1\varepsilon_0 \qquad (2.75\text{-}3)$$

が成り立つ．ここで，上式の右辺の$\delta(t)$はヘビサイド関数 $H(t)$を時間微分して得られるディラックの**デルタ関数** $(= \mathrm{d}H(t)/\mathrm{d}t)$，または**単位インパルス関数**と呼ばれ，次式で定義される．

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & (t = 0) \\ 0 & (t \neq 0) \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = \int_{0-}^{0+}\delta(t)dt = 1 \qquad (2.75\text{-}4)$$

この応力σに関する 1 階微分方程式(2.75-3)を**初期条件**下で解くと，次の応力緩和応答を得る(注：**付録 A1** の 1 階微分方程式の解を参照)．

$$\boxed{\sigma(t) = E_1\varepsilon_0 \exp\left(-\frac{E_1}{\eta_1}t\right) = E_1\varepsilon_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)} \qquad t > 0 \qquad (2.75\text{-}5)$$

ここで，$\tau = \eta_1 / E_1$ を**緩和時間**と呼び，初期応力 $E_1\varepsilon_0$ からその$1/e$* ≒0.368 (約 37％) に減少するまでに要する時間を表す．上式の応力緩和応答を，図 **2.38-2(a)**に示す．この流体モデルでは，初期応力 $E_1\varepsilon_0$ から時間と共に徐々に応

* e = 2.718･･･ で，ネイピア（オイラー）の定数である

力＝ゼロに緩和していく．式（2.75-5）の両辺を入力ひずみ振幅ε_oで除して得られる次の関数

$$G(t)=\frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}=E_1\exp\left(-\frac{E_1}{\eta_1}t\right)=\ E_1\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \qquad (2.75\text{-}6)$$

を**応力緩和関数**(または**緩和係数**，**緩和弾性率**)と呼び，任意の入力ひずみ波形$\varepsilon(t)$に対する応力緩和応答$\sigma(t)$を，**重ね合わせの原理**により求めるときに使用する(**付録** A2 参照).

（b） フォークト固体モデルの場合

構成関係式（2.68）とひずみのステップ入力条件（2.75-1）を考慮すると，次の応力緩和応答を得る.

$$\boxed{\sigma(t)=E_2\varepsilon_0H(t)+\eta_2\varepsilon_0\delta(t)} \qquad t>0 \qquad (2.75\text{-}7)$$

上式の応力緩和応答を**図 2.38-2(b)**に示す．この固体モデルは線形ばね要素と粘性要素が並列結合されているため，一定ひずみε_0をステップ負荷すると，時刻 $t=0$ では粘性要素により応力は無限大*になるが，瞬時（緩和時間$\tau=0$）に一定応力 $E_2\varepsilon_0$ に緩和してその応力値を保持する．このひずみのステップ入力条件では，応力緩和応答は連続関数としては求められない.

（c）標準線形固体モデルの場合

構成関係式（2.75）とひずみのステップ入力条件（2.75-1）を考慮すると

$$\frac{d\sigma}{dt}+\frac{E_1}{\eta_1}\sigma=(E_1+E_2)\varepsilon_0\delta(t)+\frac{E_1E_2}{\eta_1}\varepsilon_0H(t),\quad \sigma(0+)=(E_1+E_2)\varepsilon_0 \qquad (2.75\text{-}8)$$

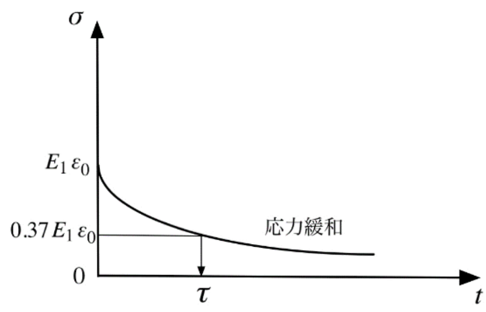
が成り立つ．この応力σに関する 1 階微分方程式を初期条件下で解くと，次の応力緩和応答を得る.

$$\boxed{\sigma(t)=E_1\varepsilon_0\exp\left(-\frac{E_1}{\eta_1}t\right)+E_2\varepsilon_0=E_1\varepsilon_0\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)+E_2\varepsilon_0} \qquad t>0 \qquad (2.75\text{-}9)$$

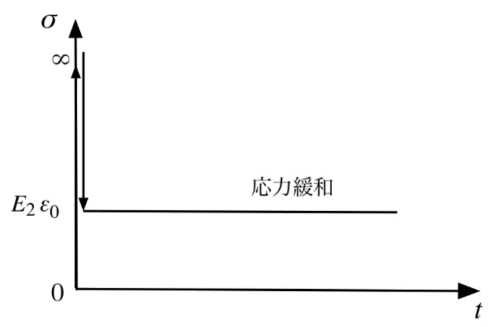
上式の応力緩和応答を**図 2.38-2(c)** に示す．標準線形固体モデルでは，初期応力 $(E_1+E_2)\varepsilon_0$ から時間と共に徐々に一定応力 $E_2\varepsilon_0$ に緩和していく点において，マクスウェル流体モデルの応力緩和応答と異なる．緩和時間$\tau=\eta_1/E_1$は，マクスウェル流体モデルの場合の緩和時間と同一である.

---

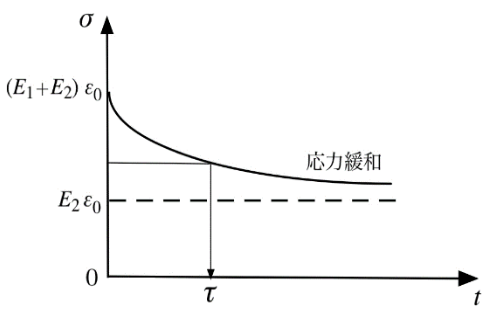
*直線の立上がり部を持つひずみのランプ入力（図 2.49 参照）の場合には，時刻 t=0 で応力は無限大にはならない



(a)　マクスウェル流体モデルの応答



(b) フォークト固体モデルの応答



(c)　標準線形固体モデルの応答

図 2.38-2　ひずみのステップ入力に対する 3 つの粘弾性モデルの応力緩和曲

(3.2)クリープ（ひずみ緩和）応答の計算例

次にマクスウェル流体モデル，フォークト固体モデル，標準線形固体モデルに**図 2.38-3**に示すような一定応力σ_0をステップ負荷したときの**クリープ応答**を，各モデルについて求めてみよう．応力のステップ入力条件は次式で表わせる．

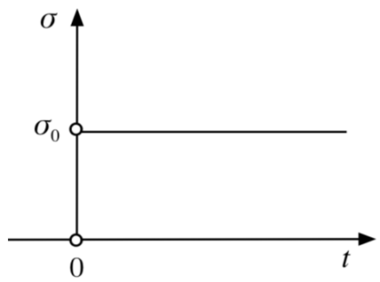


図 2.38-3　ステップ応力

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t) \qquad (2.75\text{-}10)$$

ここで，$H(t)$は式（2.75-2）で与えたヘビサイド関数を表す．

（a）　マクスウェル流体モデルの場合

構成関係式（2.67）と応力のステップ入力条件（2.75-10）を考慮すると

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma_0 H(t)}{\eta_1} + \frac{\sigma_0 \delta(t)}{E_1}, \qquad \varepsilon(0+) = \frac{\sigma_0}{E_1}$$

が成り立つから，上式を時間積分すると次のクリープ応答を得る．

$$\boxed{\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta_1} t + \frac{\sigma_0}{E_1}} \qquad t > 0 \qquad (2.75\text{-}11)$$

上式のクリープ応答を**図 2.38-4(a)**に示す．この図から，ひずみは瞬間に弾性応

答して初期ひずみσ_0/E_1 の値から時間と共に直線的に増大する（定常クリープ）ことがわかる．上式の両辺を入力応力振幅σ_oで除して得られる次の関数

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{\eta_1}t + \frac{1}{E_1} \tag{2.75-12}$$

を**クリープ関数**（または**クリープ・コンプライアンス**）と呼び，任意の入力応力波形$\sigma(t)$に対するクリープ応答$\varepsilon(t)$を，重ね合わせの原理により求めるときに使用する(**付録** A2 参照).

（b）　フォークト固体モデルの場合

構成関係式（2.68）と応力のステップ入力条件（2.75-10）を考慮すると

$$\frac{d\epsilon}{dt} + \frac{E_2}{\eta_2}\varepsilon = \frac{\sigma_0 H(\mathrm{t})}{\eta_2}, \quad \varepsilon(0+) = 0 \tag{2.75-13}$$

が成り立つ．このひずみε に関する 1 階微分方程式を初期条件下で解くと，次のクリープ応答を得る.

$$\boxed{\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_2}\left\{1 - \exp\left(-\frac{E_2}{\eta_2}t\right)\right\} = \frac{\sigma_0}{E_2}\left\{1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right\}} \quad t > 0 \tag{2.75-14}$$

ここで，$\tau = \eta_2/ E_2$ を**遅延時間**と呼び，初期ひずみε =0 から一定ひずみ$\sigma_0 /E_2 \cdot (1-1/e)$ ≒0.632 σ_0 /E_2 (約 63 %)に増加するまでに要する時間を表す. 上式のクリープ応答を，**図 2.38-4(b)**に示す．この図からこの固体モデルは粘性抵抗のために瞬間弾性応答を示さず，ひずみはゼロから時間と共に増大し，ばねの弾性ひずみσ_0 /E_2に漸近すること（**遅延弾性**）がわかる.

（c）標準線形固体モデルの場合

構成関係式(2.75)と応力のステップ入力条件（2.75-10）を考慮すると

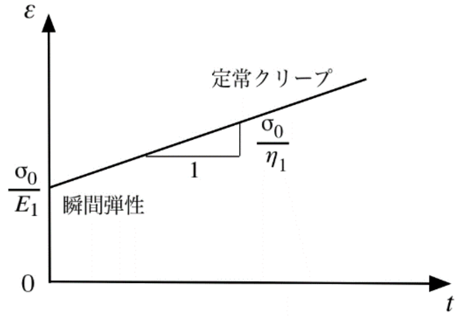
$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_1E_2}{\eta_1(E_1+E_2)}\varepsilon = \frac{E_1\sigma_0}{\eta_1(E_1+E_2)}H(t) + \frac{\sigma_0}{E_1+E_2}\delta(t), \quad \varepsilon(0+) = \frac{\sigma_0}{E_1+E_2} \tag{2.75-15}$$

が成り立つ．このひずみε に関する 1 階微分方程式を初期条件下で解くと，次のクリープ応答を得る.

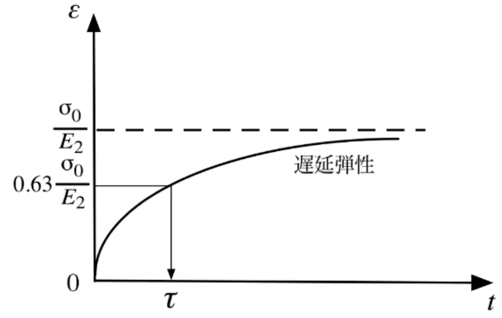
$$\boxed{\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_2}\left[1 - \frac{E_1}{E_1+E_2}\exp\left\{-\frac{E_1E_2}{\eta_1(E_1+E_2)}t\right\}\right]} \quad t > 0 \tag{2.75-16}$$

上式のクリープ応答を**図 2.38-4(c)**に示す．この図からひずみは瞬間弾性応答値$\sigma_0/(E_1+E_2)$から時間と共に増大して, フォークト固体モデルのクリープ応答の場合と同様に，ばねの弾性ひずみσ_0/E_2に漸近すること（遅延弾性）がわかる．標

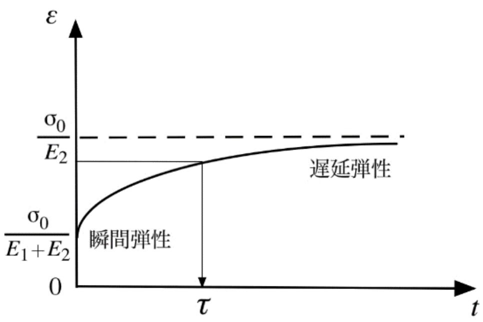
準線形固体モデルの遅延時間は，式(2.37-15)から $\tau=\eta_1(E_1+E_2)/E_1E_2=\eta_1/E_1+\eta_1/E_2$ となる（$\eta_1=\eta_2$, $E_1=E_2$ のときは，$\tau=2\eta_2/E_2$ となる）.



(a)マクスウェル流体モデルの応答



(b) フォークト固体モデルの応答



(c) 標準線形固体モデルの応答

図 2.38-4 応力のステップ入力に対する 3 つの粘弾性モデルのクリープ応答曲線

3 つの粘弾性モデルの応力緩和応答とクリープ応答の特徴の比較を，**表 2.4-1** に示す．この表から本項で説明した代表的な 3 つの粘弾性モデルの中では，要素数の多い標準線形固体モデル（3 要素モデル）が最も優れていることがわかる．さらに要素数を増やすことにより，複雑な応力緩和応答とクリープ応答を表すことができる。

表 2.4-1 3 つの粘弾性モデルの応力緩和応答とクリープ応答の比較（○：有，×：無 ）
（ひずみと応力のステップ入力条件に対する応答の場合）

粘弾性モデル名	応力緩和応答	クリープ応答	
		瞬間弾性応答	遅延弾性応答
マクスウェル流体	○	○	×
フォークト固体*	○**	×	○
標準線形固体*	○	○	○

*固体モデルはつねに遅延弾性応答を示す特徴を有する

**緩和時間 τ ＝0 の応力緩和とみなす

[例題 2.3-1]下図に示すような持続時間 t_1 をもつひずみパルス（振幅ε_0）または応力パルス（振幅σ_0）を，マクスウェル流体モデル（**図 2.36**）に負荷したときの(1)応力緩和応答と(2)クリープ応答を求めて，それぞれを図示せよ．

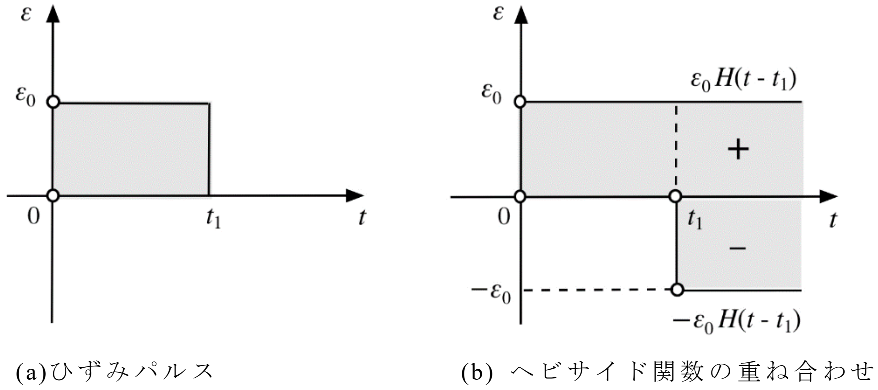


図 2.38-5 (a)ひずみパルスと(b)ヘビサイド関数の重ね合わせによるひずみパルス表示

[解-(１)]応力緩和応答の解

ひずみパルスは**図 2.38-5(b)**に示すように，ヘビサイド関数 $H(t)$と時刻を t_1 だけ右へ移動させたヘビサイド関数$-H(t-t_1)$との重ね合わせによって

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t) - \varepsilon_0 H(t - t_1) \qquad t>0$$

と表せる．一方，ひずみのステップ入力に対する応力緩和関数 $G(t)$（2.75-6)から求めた応力緩和応答

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 G(t) = E_1 \varepsilon_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \qquad t>0$$

を重ね合わせると，**付録 A2** の式(A3)より次のように求まる．

$$\sigma(t) = E_1 \varepsilon_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \qquad 0<t<t_1$$

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 G(t) - \varepsilon_0 G(t - t_1) = E_1 \varepsilon_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - E_1 \varepsilon_0 \exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau}\right)$$

$$= E_1 \varepsilon_0 \left\{1 - \exp\left(\frac{t_1}{\tau}\right)\right\} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \qquad t>t_1$$

上式を図示すると，**図 2.38-6(a)**のようになる．

[解-(２)]クリープ応答の解

持続時間 t_1 をもつ応力パルスは前述のひずみパルスの場合と同様に，２つのヘビサイド関数の重ね合わせによって，次式で表せる．

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t) - \sigma_0 H(t - t_1) \qquad t>0$$

応力のステップ入力に対するクリープ関数 $J(t)$ (2.75-12)から求めたクリープ応

答

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(\mathrm{t}) = \frac{\sigma_0}{\eta_1}t + \frac{\sigma_0}{E_1} \qquad t>0$$

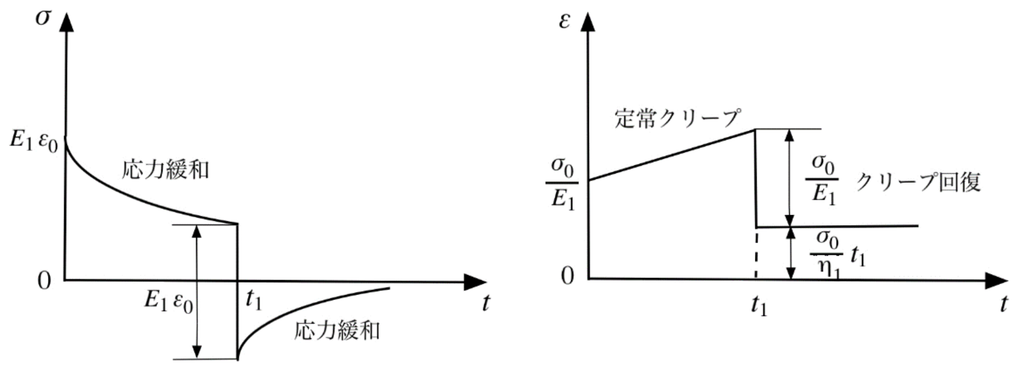
を重ね合わせると，**付録 A2** の式(A6)より次のように求まる．

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta_1}t + \frac{\sigma_0}{E_1} \qquad 0<t<t_1$$

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) - \sigma_0 J(t-t_1) = \frac{\sigma_0}{\eta_1}t + \frac{\sigma_0}{E_1} - \left\{\frac{\sigma_0}{\eta_1}(t-t_1) + \frac{\sigma_0}{E_1}\right\}$$

$$= \frac{\sigma_0}{\eta_1}t_1 \ (\text{一定}) \qquad t>t_1$$

上式を図示すると，**図 2.38-6(b)**のようになる．



(a) 応力緩和曲線　　(b)クリープ応答曲線

図 2.38-6　マックスウェル流体モデルの応答：(a)ひずみパルスに対する応力緩和曲線，(b)応力パルスに対するクリープ応答曲線

ステップ入力とパルス入力の差（除荷過程の有無）が，マックスウェル流体モデルの応答緩和曲線（図 2.38-2a と図 2.38-6a）とクリープ応答曲線（図 2.38-4a と図 2.38-6b）へ及ぼす影響に注意することが重要である。

2.3.7　円形断面の軸の初等ねじり理論

下図に示す中実円形断面の**軸要素**を考えよう．軸要素は左端で固定され，右端で軸心線の正方向に対して右回りのねじりモーメント（トルク）T を受けてねじれ変形する．以下では，次の事項を仮定する．

(i) 横断面はねじれ変形後も平面を保持し，半径線は直線を保持する

(ii) 横断面のねじれ変形 は軸心線に沿って一様で，かつ小さい

(iii) 軸要素の長さ，直径は，ねじれ変形後も変化しない

(iv) 軸要素の材料は等方均質，線形弾性である

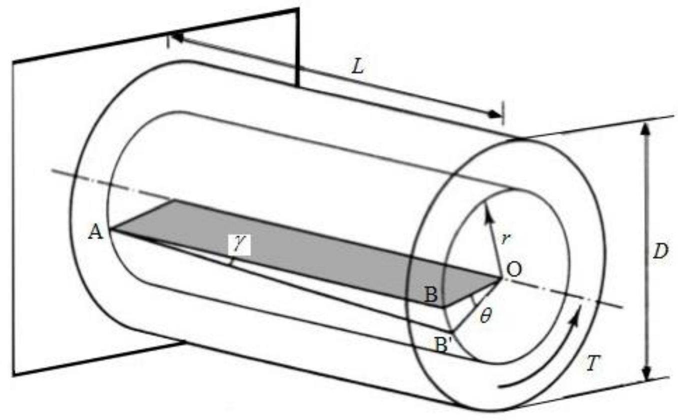
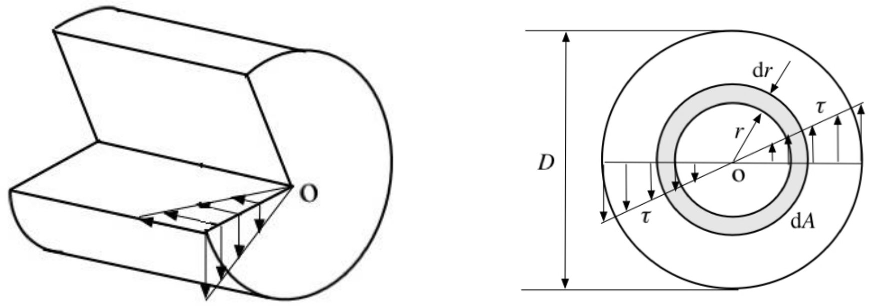


図 2.38-7　トルクを受ける中実円形断面の軸要素



(a)　(b)

図 2.38-8　(a) 横・縦断面におけるせん断応力分布図　(b)横断面における円環要素

初等ねじり理論は，**ひずみ－変位関係**，**応力－ひずみ関係**，**つり合い式**から導出される．図2.38-7に示す軸心Oから半径方向の位置 r でのせん断角（ひずみ）γは，横断面の**ねじれ角**θと軸要素の長さLによって次のように書ける．

$$\tan\gamma \cong \gamma = \frac{\widehat{\mathrm{BB}'}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{r\theta}{L} \tag{2.75-17}$$

ここで，単位長さ当りのねじれ角θ/Lを**比ねじれ角**という．軸心Oから半径方向の位置 r でのせん断（ねじり）応力τは，式（2.54）のフックの法則から

$$\tau = G\gamma = G\frac{r\theta}{L} \tag{2.75-18}$$

と書ける．図2.38-8(a)に示すようにせん断応力τ は半径方向に線形に分布し，軸心Oにおいてゼロであり最外周上で最大となる．またせん断応力は横断面だけでなく，縦断面にも共役せん断応力として作用する．次にせん断応力τの軸心

O周りのモーメントの総和が，トルクTとつり合う条件から

$$T = \int_A \tau \,\mathrm{d}A \cdot r = \int_A G \frac{r}{L} \theta \,\mathrm{d}A \cdot r = \frac{G\theta}{L} \int_A r^2 \mathrm{d}A = \frac{GJ}{L} \theta \qquad (2.75\text{-}19)$$

が成り立つ．上式の右辺の GJ/L を軸要素の**ねじり剛性**[Nm/rad]という．J は軸心 O 周りの**断面二次極モーメント**[m^4]であり，次式で定義される．

$$J = \int_A r^2 \mathrm{d}A \quad (\mathrm{d}A = 2\pi r \mathrm{d}r) \qquad (2.75\text{-}20)$$

式（2.75-18），式（2.75-19）から，次の初等ねじり理論が導かれる．

$$\boxed{\frac{\tau}{r} = \frac{T}{J} = \frac{G\theta}{L}} \qquad (2.75\text{-}21)$$

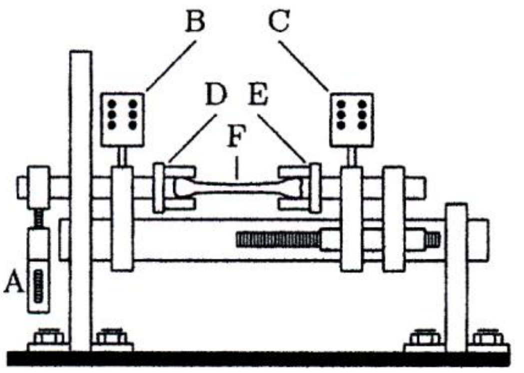
直径D の円形断面の軸心O周りのJ を，定義式（2.75-20）から算出すると

$$J = \int_0^{D/2} r^2 2\pi r \mathrm{d}r = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{D/2} = \frac{\pi D^4}{32} \qquad (2.75\text{-}22)$$

となる．外直径D_o, 内直径D_i の中空軸（円筒）要素では，上式の積分範囲を［$D_\mathrm{i}/2$, $D_\mathrm{o}/2$］に変更すると，J は次のように求まる．

$$J = \frac{\pi ({D_\mathrm{o}}^4 - {D_\mathrm{i}}^4)}{32} \qquad (2.75\text{-}23)$$

【例題 2.3-2】下図に示すようにヒトの**大腿骨**の試験片 F が**ねじり試験機** 7)に取り付けられている．この試験機のつかみ具（D と E）間の大腿骨の長さは，L＝370 mm である．振り子式重錘 A によるねじり負荷（トルク）を受けて試験片は固定つかみ具(E)から距離 l＝250mm の位置で，軸心線と約 45° をなす表面から脆性的に破断した．トルク T はトルク変換器 C により，試験片の横断面のねじれ角θ は角変位変換器 B により測定した．測定された試験片の破断までのトルク T －ねじれ角θ 関係を，図 2.38-9 に示す．破断位置での試験片の横断面形状はほぼ中空円形形状で，外半径 r_o=13 mm，内半径 r_i =6 mm である．破断位置での大腿骨の最大せん断応力 τ_{max}（せん断強度），最大せん断ひずみ γ_{max}（せん断破断ひずみ） とその剛性率 G を求めよ．



A　振り子式重錘（トルク負荷調整用）

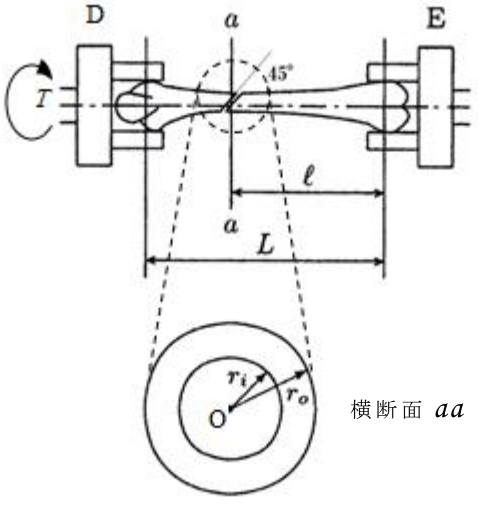
B　角変位変換器（ねじり角測定用）

C　トルク変換器（トルク測定用）

D　可動つかみ具

E　固定つかみ具

F　大腿骨試験片



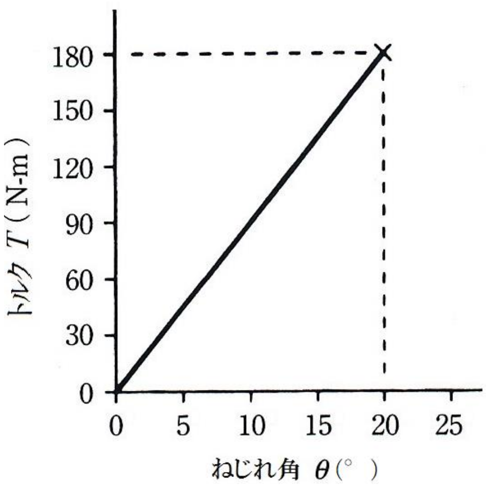


図 2.38-9　ねじり試験機（上）と大腿骨試験片（下）の破断位置での断面形状

図 2.38-10　大腿骨試験片の破断（×印）までのトルク T—ねじれ角 θ 関係

［**解**］図 2.38-10 から，点 D での最大ねじれ角 θ_f =20°＝20π/180＝0.349 rad のとき，最大せん断ひずみは破断位置(l＝250mm)の最外層（r = r_o）に生じるので，横断面 aa でのねじれ角 θ_{aa} (=0.349×250/370)から，式（2.75-17)より

$$\gamma_{\max} = \frac{r_o \theta_{aa}}{l} = \frac{0.013 \times 0.236}{0.25} = 0.0123 \quad \mathrm{rad}$$

となる．大腿骨試験片の横断面に作用する最大せん断応力を求めるには，まず軸心 O 周りの断面二次極モーメント J が必要となる．式（2.75-23）から

$$J = \frac{\pi(D_o^{\,4} - D_i^{\,4})}{32} = \frac{\pi\{(0.026)^4 - (0.012)^4\}}{32} = 42.8 \times 10^{-9} \ \mathrm{m}^4$$

となる．したがって，破断位置の最外層における最大せん断応力は，式（2.75-21)

の最初の 2 項の関係式から導出される以下の**ねじり公式**から

$$\tau_{max}=\frac{r_o T}{J}=\frac{(0.013)180}{42.8\times10^{-9}}=54.6\times10^{6}=54.6\ \ \text{MPa}$$

となる. 一方, せん断応力—せん断ひずみ関係はフックの法則に従うとすると, 式（2.75-18）から剛性率 G は次のように求まる.

$$G=\frac{\tau_{max}}{\gamma_{max}}=\frac{54.6\times10^{6}}{0.0123}=4.44\times10^{9}=\ 4.44\ \text{GPa}$$

大腿骨は**非均質異方性**を有するので，その剛性率は試験片の位置やねじり負荷方向に大きく依存するが，一般的な熱可塑性高分子材料の剛性率（G＝0.6 ～1.2 GPa）と比較すると，かなり大きいことがわかる.

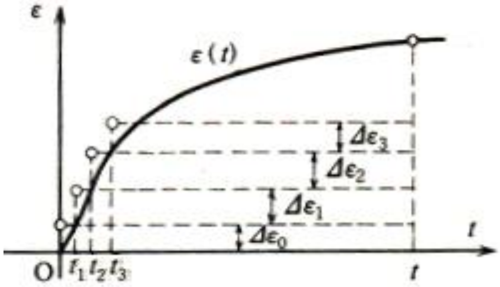
付 録Ａ１：１階微分方程式の初期値問題の解–ステップ入力の場合

$$\frac{dx(t)}{dt}+ax(t)=b\delta(t)+cH(t),\qquad x(0+)=b \tag{A1}$$

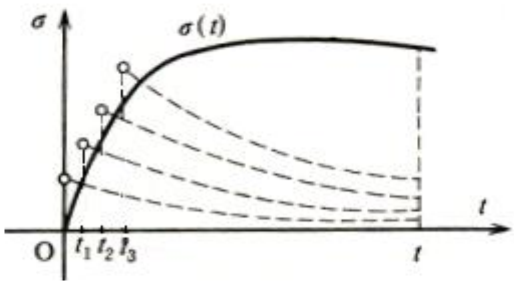
$$x(t)=\left(b-\frac{c}{a}\right)\exp(-at)+\frac{c}{a}\quad (t>0) \tag{A2}$$

1 階微分方程式(A1)の解析解（A2）の証明は，初等解析学の教科書を参照されたい。

付 録Ａ 2：応力緩和応答とクリープ応答の計算法–任意入力波形の場合



(a) 入力ひずみ波形 $\varepsilon(t)$



(b) 応力緩和応答 $\sigma(t)$

図 A.1　重ね合わせによる応力緩和応答の計算の図的説明 [8)]

図 A.1(a)に示すように任意の入力ひずみ波形 $\varepsilon(t)$ をステップ関数列($\Delta\varepsilon_o, \Delta\varepsilon_1, \Delta\varepsilon_2 \cdots$)で近似すると, 重ね合わせの原理によって時刻 t=t における応力緩和応答

$\sigma(t)$は，応力緩和関数 $G(t)$を用いて次のように表せる．

$$\sigma(t) = G(t)\Delta\varepsilon_0 + G(t-t_1)\Delta\varepsilon_1 + G(t-t_2)\Delta\varepsilon_2 + \cdots + G(t-t_n)\Delta\varepsilon_n = \sum_n G(t-t_n)\Delta\varepsilon_n \tag{A3}$$

ここで，t_1, t_2, t_3 . . . の間隔Δt_nを十分小さく取って$\Delta t_n \to 0$ の極限で$\Delta\varepsilon_n \to \mathrm{d}\varepsilon(t_n)$ とし，ステップ状入力を連続的な入力ひずみ波形$\varepsilon(t)$で置き換えると，式(A3)は

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t G(t-\tau)\frac{\mathrm{d}\varepsilon(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \tag{A4}$$

と表せる．上式の積分形は，重ね合わせ積分または**デュアメル積分**と呼ばれる．なお，入力ひずみ波形$\varepsilon(t)$が時刻 t=0 でゼロでない場合，式(A3)は次のように書ける．

$$\sigma(t) = G(t)\varepsilon(0+) + \int_{0+}^t G(t-\tau)\frac{\mathrm{d}\varepsilon(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \tag{A5}$$

一方，任意の入力応力波形$\sigma(t)$に対するクリープ応答$\varepsilon(t)$は，応力とひずみを交換し応力緩和関数 $G(t)$をクリープ関数 $J(t)$と書き換えれば，式（A3）と式（A5）から同様にして，それぞれ次のように求められる．

$$\varepsilon(t) = J(t)\Delta\sigma_0 + J(t-t_1)\Delta\sigma_1 + J(t-t_2)\Delta\sigma_2 + \cdots + J(t-t_n)\Delta\sigma_n = \sum_n J(t-t_n)\Delta\sigma_n \tag{A6}$$

$$\varepsilon(t) = J(t)\sigma(0+) + \int_{0+}^t J(t-\tau)\frac{\mathrm{d}\sigma(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \tag{A7}$$