

『人体の力学』 演習問題解答

この Web 資料の著作権者は、© 著者名2020で示しています（無断転載禁）。

[注：太字の数字は「人体の力学」における図・表番号と式番号を表わす]

■ 2 章 演習問題 (pp.107-108)

(2.1 節) © 松井剛一2020

【問 2.1】 最小時間 740.2 s (=12 min 20.2 s)

(2.2 節) © 岡本 寛2020

【問 2.2】

x 軸と X 軸とのなす角が θ のとき、座標系 $X - Y$ において (a, b) という成分を持つベクトルは、座標系 $x - y$ においては

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \theta - b \sin \theta \\ a \sin \theta + b \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

という成分を持つ。

座標系 $X - Y$ が一定角速度 $\omega = 30 \text{ deg/s}$ で回転しているので、5秒後に両座標系のなす角度は $\theta = 30^\circ/\text{s} \times 5\text{s} = 150^\circ$ であるから

$$\begin{pmatrix} a \cos \theta - b \sin \theta \\ a \sin \theta + b \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos 150^\circ - b \sin 150^\circ \\ a \sin 150^\circ + b \cos 150^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.87a - 0.5b \\ 0.5a - 0.87b \end{pmatrix}$$

となる。

$$(x, y) = (-0.87a - 0.5b, \quad 0.5a - 0.87b)$$

また、座標系 $x - y$ において (p, q) という成分を持つベクトルは、座標系 $X - Y$ においては

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \cos \theta + q \sin \theta \\ -p \sin \theta + q \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

という成分を持つ。同様に

$$\begin{pmatrix} p \cos \theta + q \sin \theta \\ -p \sin \theta + q \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \cos 150^\circ + q \sin 150^\circ \\ -p \sin 150^\circ + q \cos 150^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.87p + 0.5q \\ -0.5p - 0.87q \end{pmatrix}$$

となる。

$$(X, Y) = (-0.87p + 0.5q, \quad -0.5p - 0.87q)$$

【問 2.3】

- | | |
|--------|--------|
| ① 往復運動 | ⑧ 回転運動 |
| ② 回転運動 | ⑨ 並進運動 |
| ③ 回転運動 | ⑩ 回転運動 |
| ④ 直線運動 | ⑪ 並進 |
| ⑤ 回転運動 | ⑫ 回転 |
| ⑥ 直線運動 | ⑬ 静止 |
| ⑦ 直線運動 | ⑭ 1 |

(2.3 節) © 横山 隆2020

【問 2.4】 大腿皮質骨の軸方向の縦弾性係数 $E = 17 \text{ GPa}$ (表2.3) と降伏点 $\sigma_Y = 80 \text{ MPa}$ (表2.4) から, フックの法則 式 (2.53) を適用すると, 軸ひずみは次のようになる.

$$\varepsilon_Y = \frac{\sigma_Y}{E} = \frac{80}{17 \times 1000} = 4.71 \times 10^{-3}$$

【問 2.5】 図2.36のマクスウェル流体モデルに生じるひずみ ε は

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad \text{ここで} \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E_1}, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\sigma}{\eta_1} \quad (1)$$

と表わせる. ひずみ速度は上式のひずみ成分をそれぞれ時間微分して

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2$$

と書ける. それぞれのひずみ速度成分に式 (1) を代入すると, つぎのマクスウェル流体モデルの構成関係式を得る.

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \frac{\sigma}{\eta_1} \quad \text{即ち} \quad \frac{d\sigma}{dt} + \frac{E_1}{\eta_1} \sigma = E_1 \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.67)$$

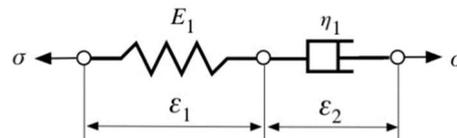


図2.36 マクスウェル流体モデル

一方, 図2.37のフォークト固体モデルに作用する応力 σ は

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad \text{ここで,} \quad \sigma_1 = E_2 \varepsilon, \quad \sigma_2 = \eta_2 \dot{\varepsilon} \quad (2)$$

と表わせる. 上式のそれぞれの応力成分に式 (2) を代入すると, つぎのフォークト固体モデルの構成関係式を得る.

$$\sigma = E_2 \varepsilon + \eta_2 \dot{\varepsilon} \quad \text{即ち} \quad \sigma = E_2 \varepsilon + \eta_2 \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.68)$$

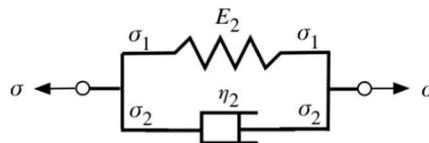


図2.37 フォークト固体モデル

(2.4 節) © 松井剛一2020

【問 2.6】 固有角振動数 $\omega_n = \sqrt{\frac{2g}{l}}$, 周期 $T = \frac{2\pi}{\omega_n}$

【問 2.7】 周期 $T = 2\pi \sqrt{\left(\frac{l_G}{m} + l^2\right) / gl}$

【問 2.8】 等価質量 $M + m/3$

(2.5 節) © 松井剛一2020

【問 2.9】 圧力差 10 kPa

【問 2.10】 粘性係数 $0.989 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$

【問 2.11】 体積流量 19.6 L/s

(2.6 節) © 岡本 覚2020

【問 2.12】 状態式 $PV = GRT$ において、この場合に一定に保たれるのは密閉容器の容積 V 、空気の重量 G およびガス定数 R である。ゆえに

$$\frac{V}{GR} = \frac{T_1}{P_1} = \frac{T_2}{P_2} \quad \therefore T_2 = \frac{P_2}{P_1} T_1 = \frac{15}{10} \times (273.15 + 15) = 432.23 \text{ K}$$

または、 $t_2 = T_2 - 273.15 = 432.23 - 273.15 = 159.08 \text{ }^\circ\text{C}$

空気のガス定数 R は 29.27 kgfm/kg K 、定容比熱 c_v は $0.171 \text{ kcal/kg}^\circ\text{C}$ 、または 0.717 kJ/kgK

($1 \text{ kcal} = 4.19 \text{ kJ}$)で、 $p_1 = P_1 = 10 \times 10^4 \text{ N/m}^2 \text{ (Pa)}$ 、 $V = 1 \text{ m}^3$ なので、加えた熱量は

$$Q = Gc_v(t_2 - t_1) = \frac{P_1 V}{RT_1} c_v(t_2 - t_1) = \frac{10 \times 10^4 \times 1}{29.27 \times 288.15} \times 0.171 \times (159.08 - 15) = 292.1 \text{ kcal}$$

または

$$\frac{P_1 V}{RT_1} c_v(T_2 - T_1) = \frac{10 \times 10^4 \times 1}{29.27 \times 288.15} \times 0.717 \times (432.23 - 288.15) = 1224.8 \text{ kJ}$$

となる。

【問 2.13】 熱貫流率を k [$\text{kcal/mh}^\circ\text{C}$] とすると

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{250} + \frac{0.015}{50} + \frac{1}{5000} = 0.0045$$

$$k = 1/0.0045 = 222.2 \text{ [kcal/mh}^\circ\text{C]} \text{ または、} 930.0 \text{ kJ/m}^2\text{hK}$$

$$Q = k(t_1 - t_2) = 222.2 \times (1100 - 200) = 199,980 \text{ [kcal/mh}^\circ\text{C]} \text{ または、} 836,996 \text{ kJ/m}^2\text{h}$$

ガス側の伝熱面の表面温度は次式

$$t_{w1} = t_1 - \frac{k}{\alpha_1}(t_1 - t_2)$$

より、 $t_{w1} = 1100 - (222.2/250) \times (1100 - 200) = 300 \text{ }^\circ\text{C}$ または、 573.15 K

水側の伝熱面の表面温度は次式

$$t_{w2} = t_2 + \frac{k}{\alpha_2}(t_1 - t_2)$$

より、 $t_{w2} = 200 + (222.2/5000) \times (1100 - 200) = 240^\circ\text{C}$ または、 513.15 K となる。

■ 3章 演習問題 (p.134)

(3.1節) © 田邊裕二2020

【問 3.1】式 (3.10) より

$$D_c(t) = \frac{1}{A} \int_0^{t_b} \{\sigma(\xi)^B\} d\xi \quad (3.10)$$

ここで、 A, B は材料定数。 $\sigma = \dot{\sigma}t$, $t = t_b$ で破壊に至る ($D_c = 1.0$) ことから、上式は

$\frac{1}{A} \int_0^{t_b} \{\dot{\sigma}\xi\}^B d\xi = 1$ と書ける。この式を順次変形していくと、次のようになる。

$$\int_0^{t_b} \{\dot{\sigma}\xi\}^B d\xi = A, \quad \int_0^{t_b} \{\dot{\sigma}\}^B \{\xi\}^B d\xi = A, \quad \{\dot{\sigma}\}^B \int_0^{t_b} \{\xi\}^B d\xi = A,$$

$$\{\dot{\sigma}\}^B \left[\frac{1}{B+1} t^{B+1} \right]_0^{t_b} = A, \quad \frac{1}{B+1} \{\dot{\sigma}\}^B t_b^{B+1} = A, \quad \{\dot{\sigma}\}^B t_b^{B+1} = A(B+1)$$

$$\therefore \{\dot{\sigma} t_b\}^B t_b = A(B+1)$$

ここで、式 (3.17) から

$\sigma_u = \dot{\sigma} t_b$, $t_b = \frac{\sigma_u}{\dot{\sigma}} = \sigma_u (\dot{\sigma})^{-1}$ の関係を上式に代入すると

$$\{\sigma_u\}^B \sigma_u (\dot{\sigma})^{-1} = A(B+1), \quad \sigma_u^{B+1} = A(B+1) \dot{\sigma}$$

$$\therefore \sigma_u = \{A(B+1)\}^{\frac{1}{B+1}} \dot{\sigma}^{\frac{1}{B+1}} \quad (3.18)$$

(3.2節) © 小林公一2020

【問 3.2】

(1) $M_0 = (W \cos \theta) b + (W_L \cos \theta) a = (Wb + W_L a) \cos \theta$

(第1項) W によるO点周りのモーメント (第2項) W_L によるO点周りのモーメント

(2) $M_0 = (9.8 \times 0.5 + 60 \times 0.2) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 14.6 \text{ Nm}$

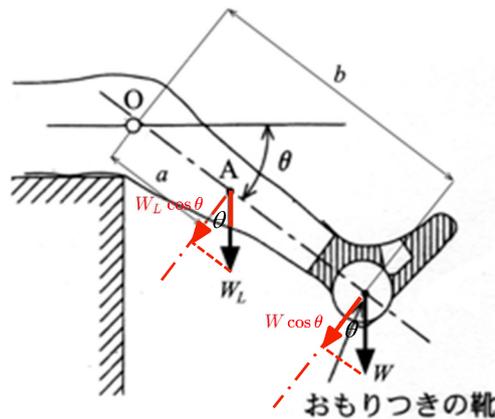


図1 膝関節のO周りの力のモーメント

■ 4 章 演習問題(p.141)

(4.1節) © 坂本 信2020

【問4.1】 歯硬組織はエナメル質 (enamel) , 象牙質 (dentin) およびセメント質 (cementum) から構成されている. それぞれの組織のおもな組成は以下のとおりである.

- ・ エナメル質 : 約97%がハイドロキシアパタイトを主成分とする無機質, 残りの3%が水と有機物である.
- ・ 象牙質 : 約70%がハイドロキシアパタイトを主成分とする無機質, 20%が有機物, 0%が水からできている.
- ・ セメント質 : 約60%がハイドロキシアパタイトを主成分とする無機質, 25%が有機物, 15%が水からできている.

【問4.2】 材料の引張特性を実験的に求める際, 脆性材料の場合には試験片両端を把持することが困難であることがあるために, 間接引張試験であるダイアメトラル試験を行う場合がある. この試験は図2のように円柱試験片を横にして上下から圧縮荷重を作用させるもので, 試験が簡易で汎用性が高いのが特徴であり, コンクリート材料にも使用される. 引張強度 f_t [MPa] は, 試験片が破壊する際の最大荷重 P [N] , 試験片直径 d [mm] , 試験片の長さ l [mm] を用いて次式から求めることができる : $f_t = 2P/\pi d l$.

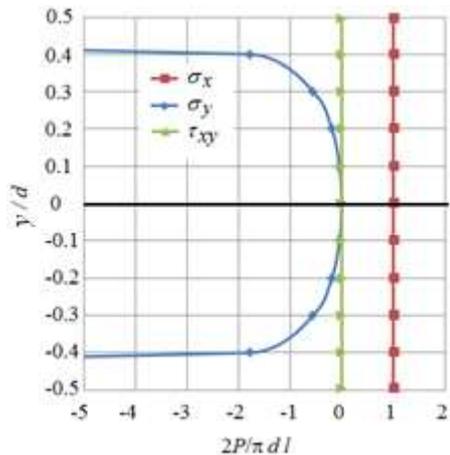
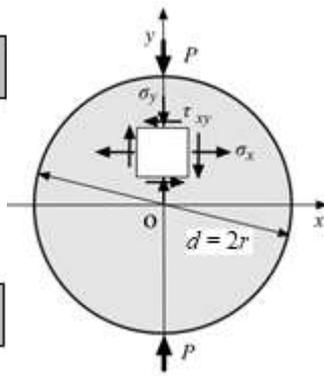
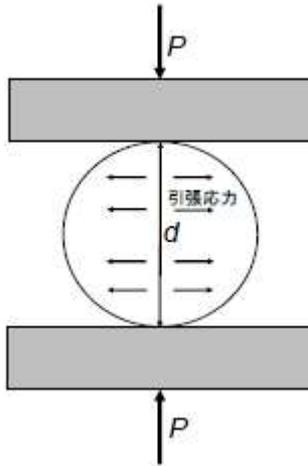


図2 ダイアメトラル (間接引張) 試験

図3 円柱試験片内のy軸上の応力分布

【問 4.3】 力学的特性に方向依存性がない材料を等方性 (isotropic) 材料といい, ヤング率 E , 横弾性係数 G およびポアソン比 ν との間には, 弾性範囲内では次の関係が成り立つ.

$$E = 2G(1 + \nu) \quad (2.58)$$

したがって, 等方性材料の弾性的特性を表す指標は E , G , ν の 3 個であるが, 上式より独立した弾性定数は 2 個であることがわかる.

一方, 生体組織や複合材料のように, 物質の力学的特性が方向によって異なることがあり, これを力学的異方性 (anisotropy) と呼ぶ. 独立した弾性定数が5個の場合を横等方性 (transversely isotropic) 弾性体, 9 個の場合は直交異方性 (general orthotropic) 弾性体という.

■ 5章 演習問題 (p.165)

© 照井直人2020

【問 5.1】

(1) オームの法則に従うとすると、血圧は流量（この場合は心拍出量）と血管抵抗の積である。高齢者は動脈硬化（血管内膜にコレステロールが蓄積し、次第に脂肪分が沈着する、血管が狭くなり動脈の壁が厚くなったり、硬くなったりする状態）になりがちである。血管抵抗が高くなるわけである。普通心拍出量は正常と変わらないが血管抵抗が高くなり高血圧になる。

(2) 心拍出量は毎分の心臓が拍出する血液量で、心臓が一回拍出する血液量と心拍数の積である。これを高めるためには交感神経活動を増やし、一回拍出量と心拍数を増やすことで行われる。動脈の平滑筋は交感神経によって支配されている。動脈のうち、細動脈と呼ぶ血管は抵抗血管とも呼ばれ、細動脈の平滑筋を交感神経が収縮させることで血管抵抗が増加し血圧が上昇する。

© 松井剛一2020

【問 5.2】

音速 6.9 m/s, 音速 15.4 m/s

■ 6章 演習問題 (p.175)

© 岡本 寛2020

【問 6.1】 解析対象とする組織 [kg]の温度を T [°C]、密度を ρ_t [kg/m³]、比熱を c_t [J/(kg·K)]とする。これらは、物理的には本章の式(6.3)中で現れた組織に関する物性値に対応するものとする。組織における発熱量を単位時間、単位体積あたり q [J/(s·m³)]または [W/m³]とする。これは単位質量あたり q/ρ_t の発熱量となる。また、この組織での単位質量あたりに通過する血液灌流量を β [m³/(s·kg)]、血液の密度を ρ_B [kg/m³]、比熱を c_B [J/(kg·K)]とする。この組織から周囲へ熱伝導により直接伝わる熱の流れについて考えるために、組織の熱伝導率を κ [W/(m·K)]または [J/(m·s·K)]とする。

熱伝導により伝わる熱量は、温度の差に比例する。組織の温度と周囲の組織の温度との差が一定とすれば、熱伝導により運ばれる組織の単位体積、単位時間あたりの熱量を q_c とすると、組織の単位時間、単位質量あたりでは q_c/ρ_t [J/(s·kg)]となる。

血液による熱の輸送を考える。血液（動脈血）は温度 T_B [K]で解析対象とする組織に入り、組織の温度 T [K]に平衡となって流出するものとする。このとき一定時間 t で組織での単位質量を流れる血液の体積 V_B [m³/kg]は、 $T - T_B$ の温度差に相当する熱量を運ぶことになる。一定時間 t [s]の間に運ばれる熱量は $V_B \cdot \rho_B \cdot c_B \cdot (T - T_B)$ であり、組織での単位質量あたりの血液灌流量 β は $\beta = V_B/t$ [m³/s·kg]となるので、組織の単位質量、単位時間あたりに運ばれる熱量は $\beta \cdot \rho_B \cdot c_B \cdot (T - T_B)$ となる。ここで、 $\rho_B \cdot c_B$ は単位体積あたりの熱容量 [J/(m³K)]に相当する。熱の収支について考えると、組織の単位質量、単位時間あたりの熱量の変化は、温度の時間変化を

dT/dt とすると $c_t \cdot dT/dt$ となる。熱を供給するのは発熱量 q/ρ_t であり、熱を運び出すのは熱伝導による寄与分 q_c/ρ_t と血流による熱授受の伝達熱量 $\beta \cdot \rho_B \cdot c_B \cdot (T - T_B)$ である。よって、熱収支は

$$c_t \cdot \frac{dT}{dt} = \frac{q}{\rho_t} - \frac{q_c}{\rho_t} - \beta \cdot \rho_B \cdot c_B \cdot (T - T_B)$$

あるいは両辺に組織の密度 ρ_t を掛けて

$$\rho_t \cdot c_t \cdot \frac{dT}{dt} = q - q_c - \beta \cdot \rho_B \cdot \rho_t \cdot c_B \cdot (T - T_B)$$

と表わすことができる。各項は単位時間、単位体積あたりの熱量変化であるので、それぞれの項の単位は、 $[\text{W}/\text{m}^3]$ あるいは $[\text{J}/(\text{s} \cdot \text{m}^3)]$ である。上式の右辺第2項までの式は内部発熱を伴う通常の熱伝導方程式 (heat conduction equation) であり、これに血流による熱授受の伝達熱量 (第3項) を加えた形になっている。このモデルでは血流の影響が考慮されており、解析対象の組織内で組織と血液との熱交換が完全に行われるもの (集中熱源) と仮定しているの、均質で一様な組織として扱える。

【問 6.2】 $dV = 0$ であるから、次式 (ただし、 $\ln()$ は自然対数を意味する)

$$(s_2 - s_1)_v = c_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = c_v \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

により

$$(S_2 - S_1)_v = G c_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 1 \times 0.171 \times \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 0.125$$

ここで、空気の質量 $G = 1 \text{ kg}$ 、空気の定容比熱 c_v は $0.171 \text{ kcal}/^\circ\text{Ckg}$ である。上式から

$$\therefore \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{0.125}{(1 \times 0.171)} = 0.7313 \quad \therefore \frac{T_2}{T_1} = 2.078$$

ゆえに

$$T_2 = 2.078 \times (273.15 + 15) = 598.8 \text{ K}, \quad t_2 = 325.6 \text{ }^\circ\text{C}$$

加えられた熱量は

$$Q_{12} = G c_v (t_2 - t_1) = 1 \times 0.171 \times (325.6 - 15) = 53.1 \text{ kcal}$$

または

$$Q_{12} = G c_v (T_2 - T_1) = 1 \times 0.171 \times (598.8 - 288.15) = 222.7 \text{ kJ}$$

内部エネルギーの増加は

$$(U_2 - U_1)_v = G c_v (t_2 - t_1) = Q_{12} = 53.1 \text{ kcal}$$

または

$$(U_2 - U_1)_v = G c_v (T_2 - T_1) = Q_{12} = 222.7 \text{ kJ}$$

となる。

■ 7 章 演習問題 (p.193)

© 小林公一2020

【問 7.1】

① 不適切な動作の場合における脊柱起立筋力

式(7.13)より求める筋力は

$$F_u = W_0 \frac{L_0}{L_F} + W \frac{L - L_a \cos \phi}{L_F} = 40 \times 9.8 \times \frac{0.3}{0.05} + 60 \times 9.8 \times \frac{0.6 - 0.5 \cos \frac{\pi}{2}}{0.05}$$

$$= 2,352 + 7,056 = 9,408 = 9.41 \text{ kN}$$

② 適切な動作の場合における脊柱起立筋力

式(7.14)より求める筋力は

$$F_s = W_0 \frac{L_a}{L_F} \sin \phi = 60 \times 9.8 \times \frac{0.5}{0.05} \times \sin \frac{\pi}{6} = 2,940 = 2.94 \text{ kN}$$

したがって、適切な動作によって脊柱起立筋力は、 $9.41 - 2.94 = 6.47 \text{ kN}$ だけ低減される。

■ 8 章 演習問題 (p.209)

© 岡本 寛2020

【問 8.1】

インピーダンス $Z_i = \frac{1}{G_i} + \frac{1}{j\omega C_m}$ (ω : 周波数)

アドミタンス $Y_i = \frac{1}{Z_i} = \frac{1}{\frac{1}{G_i} + \frac{1}{j\omega C_m}} = \frac{j\omega C_m}{j\omega C_m + 1} = \frac{j\omega C_m}{(1 + \frac{j\omega C_m}{G_i})(1 - \frac{j\omega C_m}{G_i})} = \frac{j\omega C_m + \frac{\omega^2 C_m^2}{G_i}}{1 + \frac{\omega^2 C_m^2}{G_i^2}}$

【問 8.2】

- | | |
|--------------|------------------------|
| ① 放射線 | ⑨ C/kg |
| ② 原子核崩壊数 | ⑩ 放射線エネルギー |
| ③ ベクレル (Bq) | ⑪ 1J のエネルギー量 |
| ④ γ 線 | ⑫ グレイ (Gy) |
| ⑤ X線 | ⑬ シーベルト (Sv) |
| ⑥ γ 線 | ⑭ 放射線荷重係数 (または放射線加重係数) |
| ⑦ X線 | ⑮ 放射線荷重係数 (または放射線加重係数) |
| ⑧ IC | |

© 松井剛一2020

【問 8.3】

抵抗力 12.8 kN

【問 8.4】

津波の波高 5.2 m